# ATTI

DELLA

# ACCADEMIA GIOENIA

## DI SCIENZE NATURALI

## IN CATANIA.

ANNO XCV

1918.

SERIE QUINTA.

VOLUME XI.

CATANIA,
C. GALÀTOLA, EDITORE
1918.

# ATTI

DELLA

# ACCADEMIA GIOENIA

## DI SCIENZE NATURALI

## IN CATANIA.

—

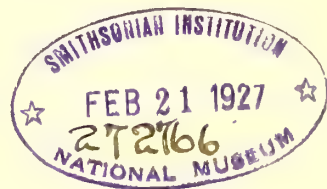
ANNO XCV

1918.

---

SERIE QUINTA.

---

VOLUME XI.

CATANIA,

C. GALÀTOLA, EDITORE

1918.

# CARICHE ACCADEMICHE

PER L'ANNO 1917-'918

## UFFICIO DI PRESIDENZA

RICCÒ Comm. Prof. Annibale — *Presidente*

CLEMENTI Comm. Prof. Gesualdo — *Vice-Presidente*

RUSSO Cav. Prof. Achille — *Segretario*

BOGGIO-LERA Prof. Enrico — *Vice-Segretario per la sezione di Scienze fisiche e matematiche*

FELETTI Cav. Prof. Raimondo — *Vice-Segretario per la sezione di Scienze naturali*

## CONSIGLIO DI AMMINISTRAZIONE

STADERINI Cav. Prof. Rutilio

SEVERINI Prof. Carlo

CAPPARELLI Comm. Prof. Andrea

FODERÀ Cav. Prof. Filippo Arturo

GRASSI Cav. Prof. Giuseppe — *Cassiere*

DANIELE Prof. Ermenegildo — *Bibliotecario*

# SOCI ONORARI

NOMINATI DOPO L' APPROVAZIONE DEL NUOVO STATUTO.

## S. A. R. IL DUCA DEGLI ABBRUZZI

TODARO sen. comm. prof. Francesco
CHAIX prof. Emilio
MACALUSO comm. prof. Damiano
NACCARI uff. prof. Andrea
RÒITI sen. uff. prof. Antonio
GRASSI sen. prof. Battista
WIEDEMANN prof. Eilhard
CAPELLINI sen. comm. prof. Giovanni
RIGHI sen. prof. Augusto
VOLTERRA sen. prof. Vito
DINI sen. comm. prof. Ulisse
CIAMICIAN sen. comm. prof. Giacomo
BRIOSI comm. prof. Giovanni
BIANCHI comm. prof. Luigi
GOLGI sen. comm. prof. Camillo
PALAZZO comm. prof. Luigi
LUCIANI sen. comm. prof. Luigi
ENGLER prof. Arturo
FLAMMARION Camillo
LA CROIX prof. Alfredo
PRENANT prof. A.
CALDARERA gr. uff. prof. Francesco

# SOCI EFFETTIVI

1. CLEMENTI comm. prof. Gesualdo
2. BASILE prof. Gioachino
3. CAPPARELLI comm. prof. Andrea
4. ARADAS cav. prof. Salvatore
5. UGHETTI cav. prof. Giambattista
6. FELETTI cav. prof. Raimondo
7. PETRONE comm. prof. Angelo
8. RICCÒ comm. prof. Annibale
9. BUCCA cav. prof. Lorenzo
10. GRIMALDI comm. prof. Giov. Pietro
11. GRASSI cav. prof. Giuseppe
12. DI MATTEI comm. prof. Eugenio
13. D'ABUNDO comm. prof. Giuseppe
14. STADERINI cav. prof. Rutilio
15. RUSSO cav. prof. Achille
16. BUSCALIONI prof. Luigi
17. MINUNNI prof. Gaetano
18. MUSCATELLO uff. prof. Giuseppe
19. SEVERINI prof. Carlo
20. BOGGIO-LERA prof. Enrico
21. FODERÀ cav. prof. Arturo
22. CARUSO prof. Francesco
23. ASCOLI prof. Maurizio
24. CIPOLLA prof. Michele
25. MIRTO prof. Domenico
26. CONDORELLI FRANCAVIGLIA prof. Mario
27. DANIELE prof. Ermenegildo
28. FUCINI prof. Alberto
29. SCORZA prof. Gaetano
30. . . . . . . . .

# SOCI EFFETTIVI

DIVENUTI CORRISPONDENTI PER CAMBIAMENTO DI RESIDENZA.

SPECIALE prof. Sebastiano
STRACCIATI prof. Enrico
PERATONER prof. Alberto
RICCIARDI uff. prof. Leonardo
BACCARINI prof. Pasquale
ZANETTI prof. Carlo Umberto
CAVARA prof. Fridiano
FUBINI prof. Guido
DI LORENZO sen. prof. Giuseppe
PERRANDO cav. prof. Gian Giacomo
LOPRIORE prof. Giuseppe
VINASSA DE REGNY prof. Paolo
DE FRANCHIS prof. Francesco

# SOCI CORRISPONDENTI

NOMINATI DOPO L' APPROVAZIONE DEL NUOVO STATUTO.

PELLIZZARI prof. Guido
MARTINETTI prof. Vittorio
MELI prof. Romolo
PAPASOGLI prof. Giorgio
GAGLIO cav. prof. Gaetano
MOSCATO dott. Pasquale
GUZZARDI dott. Michele
ALONZO dott. Giovanni
MAGNANINI prof. Gaetano
PAGLIANI cav. prof. Stefano
CHISTONI cav. prof. Ciro
GALITZINE Principe Boris
GUGLIELMO prof. Giovanni
CARDANI cav. prof. Pietro
GARBIERI cav. prof. Giovanni
GIANNETTI cav. prof. Paolo
CERVELLO comm. prof. Vincenzo
ALBERTONI sen. comm. prof. Pietro
LA MONACA dott. Silvestro
BAZZI prof. Eugenio
MORSELLI prof. Enrico
RAFFO dott. Guido
MATERAZZO dott. Giuseppe
BORZÌ cav. prof. Antonio
FALCO dott. Francesco
DEL LUNGO prof. dott. Carlo
GIOVANOZZI prof. Giovanni
KOHLRAUSCH prof. Giovanni
ZAMBACCO dott. N.
DONATI prof. Luigi
DE HEEN prof. Pietro
PERNICE prof. Biagio
CALDARERA dott. Gaetano
SALOMONE MARINO prof. Salvatore
PANDOLFI dott. Eduardo
GUZZANTI cav. Corrado
VALENTI prof. Giulio
MAJORANA prof. Quirino
PINTO prof. Luigi
ROMITI prof. Guglielmo
BEMPORAD prof. Azeglio
BELLECCI dott. Luigi
DRAGO prof. Umberto
POLARA dott. Giovanni
RINDONE dott. Carlo
CERMENATI prof. Mario
DE FRANCO prof. Salvatore
FOÀ prof. Carlo
PLATANIA prof. Gaetano
PLATANIA prof. Giovanni
SCALIA prof. Salvatore
COMES prof. Salvatore
CUTORE prof. Gaetano
DI MATTEI prof. Emilio
ODDO uff. prof. Giuseppe
BERTOLO prof. Pasquale
EREDIA prof. Filippo
MARLETTA prof. Giuseppe
MUSCHLER prof. Remo
CERRUTI prof. Attilio
CITELLI prof. Salvatore
PONTE prof. Gaetano
CLEMENTI prof. Antonino

Prof. A. FUCINI

# Ragioni stratigrafiche e litologiche che convalidano l'età wealdiana del Verrucano tipico del M. Pisano desunta dai fossili.

## PARTE I.

Tanto l' Ing. Lotti quanto il Prof. De Stefani hanno di recente, per ciascuno, pubblicato una nota per combattere o, meglio, per mettere in dubbio i risultati del mio ultimo lavoro dal titolo " *Fossili wealdiani del Verrucano tipico del M. Pisano* „ (1) per il quale è dimostrata l' età wealdiana del Verrucano tipico, intendendo con tale denominazione di designare e limitare strettamente la formazione che costituisce il M. Verruca e che, essendo estesa a tante altre parti del M. Pisano e largamente rappresentata in gran parte della Catena metallifera, della Liguria e delle Alpi Marittime, era per l' avanti incondizionatamente creduta di età permiana.

I termini: Verrucano, formazione verrucana, che da molti sono stati fino ad ora adoprati in senso cronologico, quali sinomini di Permiano, vanno dunque assolutamente scartati dalla scienza, tanto più ora che il Verrucano della Verruca, che fu creduto il prototipo delle formazioni scistose permiane, non deve più ammettersi paleozoico e nemmeno triasico, come alcuni tuttavia ammetterebbero, bensì della Creta più inferiore o del Giura più superiore, il che è ancora da decidersi. Deve lasciarsi sempre, ben inteso, nell'Antracolitico la formazione scistosa e profonda della valle del Guappero, che non è Verrucano tipico, ma che se vuolsi designare come verrucana ciò potrà farsi solo nel senso limitato e generico litologico.

Il Lotti ed il De Stefani hanno idee in gran parte antitetiche, non corrispondenti a realtà, non avvalorate da alcuna documentazione, che io son costretto a confutare minutamente, per quanto stimi inopportune le loro pubblicazioni, poichè potevano aspettare a farle di aver conosciuto anche i risultati dello studio geologico del M. Pisano, che essi sanno avere io in preparazione, e per quanto ritenga che meglio avrebbero fatto, e con più profitto scientifico, se avessero richiesto i miei fossili per studiarli direttamente o farli ristudiare da altri più competenti di me in materia. Avrei potuto, è vero, anche io aspettare a ribattere gli argomenti dei miei illustri competitori nel lavoro che sto preparando e che è quasi pronto per la stampa, ma poichè ad esso andranno unite tavole di sezioni e

(1) Palaeontographia italica Vol. XXI — 1915.

carta geologica, che nelle attuali contingenze non è possibile potere eseguire, non sapendo quando avrei potuto farlo, e d' altra parte non intendendo rimandare tanto oltre una discussione che ritengo molto utile e proficua, mi son deciso a pubblicare queste mie osservazioni. La questione involge fatti di tale interesse che è poi bene cercare di risolverla più presto che sia possibile.

Mi si perdonerà se per ribattere gli argomenti ed i concetti dell' uno e dell' altro dovrò essere di troppo minuzioso e se dovrò, talora, ripetere le stesse argomentazioni ed insistere sopra gli stessi fatti, a scapito della forma, ma a vantaggio, credo, della verità e della sostanza.

Comincerò, per precedenza, ad esaminare la pubblicazione del Lotti che ha per titolo " *Il Permiano del M. Pisano ed i suoi tipi mesozoici di fossili* „ (1) nel quale egli vuol dimostrare che i fossili del Verrucano tipico, da me ritenuti wealdiani, hanno solo l' apparenza di fossili recenti, ma che in realtà sono permici, sostenendo con varie citazioni la frequenza del fatto di aversi in terreni carboniferi e permiani fossili a tipo mesozoico. Insiste poi sulla permicità del Verrucano tipico, basandosi sul suo conosciuto e dibattuto carreggiamento delle formazioni, così dette, delle Mulina, nella parte settentrionale del M. Pisano.

Farò subito notare all' egregio Ingegnere che siamo perfettamente d' accordo nel ritenere che nel Paleozoico si possano trovare fossili di tipo mesozoico, ma il concetto di tipo non va preso in senso cotanto ristretto; nel Paleozoico non potranno mai trovarsi le specie wealdiane, ma, se mai, qualche genere; si tratta sempre di aspetto simile conferito alle conchiglie, anche di generi differenti, dalle stesse condizioni di vita e dalla stessa *facies* dei depositi. Che il White (2) abbia trovato nel Permiano del Texas una fauna di conchiglie che in parte (si noti) era costituita da forme non pubblicate appartenenti a tipi di età mesozoica, non presenta niente di strano ed il fatto è più frequente di quel che non creda e riferisca il Lotti, ma si tratta sempre di una parte di fossili e non di intiere faune; di generi simili e non di specie; di fossili appartenenti ad un sol gruppo organico e non di vegetali e di animali insieme, poichè è bene chiarire subito a questo proposito che io non ho mai creduto che la formazione verrucana tipica, che a me ha fornito i fossili wealdiani, sia la stessa di quella, che litologicamente potrebbe continuarsi a chiamare verrucana, che somministrò al De Stefani ed al De Bosniaski la ben nota flora antracolitica e che da tutti, escluso però il De Stefani, viene considerata la base delle formazioni verrucane del M. Pisano. Il Lotti dicendo a pag. 304 " Il Verrucano del M. Pisano nel quale furono raccolti i fossili studiati dal Fucini, venne attribuito al Permiano prima per il posto che occupava nella serie dei terreni, poi per la ricca flora in esso raccolta dal De Stefani e dal De Bosniaski „ verrebbe a far credere che io avessi ritenuta possibile la confusione paleontologica sopra accennata. Confusione paleontologica mai; quella litologica, fino ad un certo punto però, posso ammetterla e n' è indice la denominazione e la distinzione dei due verrucani.

Non quadra dunque affatto al caso mio l' osservazione del White espressa per *parte* dei fossili del Permiano del Texas, aventi forme appartenenti a tipi di età mesozoiche,

---

(1) Bull. d. soc. geol. ital. Vol. XXX, 1917.

(2) WHITE. *The Texan Permian and its mesozoic types of fossils.* Bull. of the U. S. Geol. Surv. n. 77, 1891.

riportata in nota dal Lotti, e cioè che tali forme, se esse sole, e *senza altre indicazioni di fatti correlativi*, fossero state sottomesse al paleontologo, questi non avrebbe potuto riferirle ad un periodo più antico del Trias.

Lasciando anche andare che la differenza di età tra Permiano e Trias accennata dal White è molto piccola in confronto a quella che sarebbe da me constatata tra Permiano, cioè, e Wealdiano, non bisogna dimenticare che nel caso presente non si tratta, come ho detto, di una parte dei fossili, ma di tutti e non mancano, è quel che voglio dimostrare per la prima cosa, i *fatti correlativi* che indicano la pertinenza del Verrucano tipico all' età wealdiana e nemmeno mancano, e lo dimostrerò pure, quegli *argomenti stratigrafici e litologici* per dar valore cronologico decisivo alle deduzioni paleontologiche, invocati dal Lotti a pag. 307. La mia memoria, e lo dissi anche chiaramente, fu appunto pubblicata a dimostrazione paleontologica di concetti precedenti, stratigrafici e litologici, che avevano tenuto viva una lunga polemica col Lotti stesso, iniziatasi dall' avere io fatto riconoscere la liassicità dei marmi gialli di Siena, da lui ritenuti triassici, l' età cretacea dei calcari cavernosi, dolomitici, fetidi, della Toscana, da lui pure ritenuti triassici, e la corrispondenza del suo Pseudoverrucano cretaceo e del Verrucano di Rupe Cava nel M. Pisano ritenuto triassico dal Lotti, col Verrucano tipico della Verruca, stabilendo tanti di quei fatti correlativi sopra detti e che riassumerò brevemente a migliore schiarimento della questione.

Il marmo giallo di Siena — parva favilla gran fiamma seconda — non aveva presentato che pochissimi fossili e scarsamente attendibili per determinare l' età sua che, dopo essere stata un tempo ritenuta liassica dal De Stefani, era riguardata in seguito generalmente, ed anche dallo stesso De Stefani, come triassica, dietro studî del Pantanelli e del Lotti (1) e per la ragione principale che quel marmo sottostà a scisti ed a calcari cavernosi ritenuti triassici. Io (2) potei stabilire che esso appartiene al Lias inferiore e non al Trias per avervi notato alcuni fossili, *Vermiceras* cfr. *perspicuum* Fuc., *Arnioceras* sp., *Lytoceras Phillipsi* Sow. *Rhachophyllites* sp., *Phylloceras Lipoldi* Hauer, *Terebratula* sp., *Montivaultia* sp., *Pentacrinus sp.*, che il Lotti (3) ammette da me ben determinati, ma che ritiene triassici, però di abito liassico. No ; o io ho sbagliato determinazione specifica ed anche generica o quei fossili sono di Lias inferiore, nè più alti, nè più bassi. Con lo stesso modo di argomentare adoprato ora per i fossili verrucani anche allora egli disse che io " avrei perfettamente ragione di ritenere quei marmi di età liassica se il criterio paleontologico non avesse contro in questo caso i più chiari ed incontestabili fatti stratigrafici e litologici. „ Il De Stefani, (4) però, ed il Vinassa, (5) gli unici che per ora si occuparono della questione, mi dettero ragione. Stabilita l' età liassica dei marmi gialli di Siena bisognava convenire che i calcari cavernosi, dolomitici, fetidi, che stan loro sopra, essendo postliassici, potevano ammettersi cretacei addirittura, una volta che nel M. Maggiore nel M. Pisano sono in condizioni stratigrafiche tali da essere ritenuti giustamente cretacei, quan-

(1) PANTANELLI e LOTTI. *I marmi della Montagnola senese,* Boll. R. Comit. geol. 1878.

(2) FUCINI. *Sopra l' età del marmo giallo di Siena.* Proc. Verb. soc. tos. sc. nat. Vol. VIII e *Ancora sopra l' età del marmo giallo di Siena.* Mem. Soc. tosc. sc. nat. Vol. XXIII.

(3) LOTTI. *Sull' età dei marmi della Montagnola senese.* Boll. R. Comit. geol. 1907.

(4) DE STEFANI. *Di alcuni carreggiamenti locali recentemente supposti in Italia.* Rend. Accad. Lincei Vol. XVIII s. 5 f. 8 pag. 493, 1908.

(5) VINASSA. *Osservazioni geologiche sui dintorni di Rosia (Siena)* Mem. soc. tosc. sc. nat. Vol. XXIV, 1908, pag. 13.

do, ben inteso, non si ammetta la spiegazione artificiosa, della quale parlerò estesamente in seguito, voluta dal Lotti per seguitare ad ammetterveli triassici. Il Lotti non approvò, naturalmente, ma Ugolini (1) e De Stefani, (2) gli unici che anche qui si occuparono della questione, mi dettero ragione.

Qui cominciano però le divergenze col De Stefani, seguito dal Vinassa, (3) ammettendo essi che i calcari cavernosi si riferiscano ad età diverse, mentre io, e qui d'accordo con il Lotti, ritengo che in Toscana, nella loro forma tipica ben inteso, appartengano ad una stessa età, segnando anzi un distinto livello geologico. Probabilmente il De Stefani ed il Vinassa seguitano nella confusione fatta fin qui dai geologi che si sono occupati della catena metallifera, compresi me ed il Lotti, tra calcari cavernosi tipici e calcari brecciati cavernosi del tipo di quelli delle cave di Caprona e di Uliveto che sono liassici, e più specialmente con le breccie calcari cavernose che sono quaternarie, sviluppatissime anche nelle Alpi Apuane ed in tutta la Toscana e, cosa strana, spesso in stretto rapporto con i calcari cavernosi tipici. E esempio di tal confusione la citazione fatta ora dal De Stefani il quale nota (4) come calcare cavernoso secondario quello ove è scavata la famosa grotta di Cucigliana, che è invece quaternario, come quaternarie sono parte delle breccie cavernose che in campioni si trovano al Museo di Pisa a far parte della collezione di roccie triasiche delle Alpi Apuane. So bene che vi sono calcari cavernosi anche di altre epoche ; basterebbe citare quelli oolitici di Laconi in Sardegna, bellissimi e molto simili a quelli toscani, ed ammetto anche che altri calcari all' infuori di quelli cretacei possano acquistare una certa cavernosità, ma questa non è mai quella tipica, descritta da tanti e tanto conosciuta, ed è sempre parziale.

Ammesso dunque che i calcari cavernosi tipici fossero cretacei nasceva filata la persuasione che le roccie verrucane di Rupe Cava nel M. Pisano, che stanno sotto a quei calcari e sopra al Titonico, dovessero essere pure riferite al Cretaceo e di conseguenza diretta mi nasceva il dubbio che fosse cretacea anche una parte del Verrucano, quella più tipica ed autentica, delle regioni meridionali di quel Monte, nonchè di tante altre parti della Toscana, ove, come a Rupe Cava, è sempre in intimo rapporto con i soprastanti calcari cavernosi tipici, che geologi e litologi dichiararono identiche. Mi confortava nel mio modo di vedere il fatto che il Lotti aveva trovato in più luoghi della provincia di Grosseto, in condizione da essere riguardata anche da lui come cretacea una formazione verrucana, che non ha alcuna differenza con la tipica, tanto che anche da lui fu un tempo ritenuta per tale, ma che credette di dover poi distinguere col nome di Pseudoverrucano, solo quando si accorse che stava sopra al Lias.

Ecco come fu aperta la questione sull' età del Verrucano ed ecco i primi fatti correlativi cui fu accennato sopra e che danno sempre di cozzo contro l' idea, quanto si vuole vecchia ed inveterata, dell'antichità del Verrucano dalla Verruca; preconcetto fondato sopra un apparente sottomissione di esso al Retico fossilifero della cava Cubbe presso Caprona

---

(1) UGOLINI. *Brevi osservazioni sui calcari cavernosi brecciformi del M. Pisano.* Proc. verb. soc. tosc. sc. nat. 1908.

(2) DE STEFANI. *Di alc. carregg. loc.* ecc. l. cit.

(3) VINASSA. *Sui calcari cavernosi dei dintorni di Uliveto,* Boll. soc. geol. ital. Vol. XXVII, 1908.

(4) DE STEFANI. *Escursione geologica da Buti a Calci nel M. Pisano,* pag. 23, Mem. Soc. tosc. sc. nat. Vol. XXXII.

ed al Lias inferiore della valle del Guappero, ossia meglio sopra alla sua reale sottomissione ai calcari cavernosi, ecc., che si vogliono ritenere retici per forza, anzichè cretacei.

Ma il Verrucano tipico aveva già dato alcuni fossili, che sebbene brutti e difettosi potevano avere grande importanza. Io stimai opportuno esaminarli senza preconcetti e fui sorpreso nel constatare che essi avevano una grande rassomiglianza con le *Cyrenae* wealdiane. Veniva così a determinarsi la strana combinazione che nello stesso M. Pisano si aveva, a Rupe Cava, un Verrucano litologicamente identico a quello tipico della Verruca, la cui posizione stratigrafica fra il Titonico ed il Neocomiano superiore (calcari maiolica), non tenendo conto dei calcari cavernosi che sono di Neocomiano inferiore o medio, ne indicava l' età neocomiana inferiore o wealdiana, mentre poi alla Verruca l'età wealdiana del Verrucano tipico, non indicata stratigraficamente, veniva però designata dai fossili. Venne così in ballo l'età wealdiana del Verrucano tipico che io credo di aver dimostrato con il lavoro paleontologico, attualmente oppugnato dal Lotti e dal De Stefani, per il quale dovetti fare lunghe, pazienti ed accurate ricerche di fossili e che è in aperto contrasto con la loro convinzione di non potere o dovere scindere la complessa formazione verrucana dal M. Pisano in due parti, una antracolitica ed una più recente wealdiana.

Che tale separazione sia, non solo possibile, ma doverosa e necessaria, oltre che paleontologicamente, litologicamente e stratigraficamente è indicato anche da diversi fatti in contrasto con l' opinione ora emessa dal Lotti (pag. 312) secondo la quale i due verrucani, se mai " verrebbero a contatto senza alcun fenomeno stratigrafico o litologico che serva a distinguerli. „ Ma distinzioni litologiche sono però sempre state fatte anche dal Lotti tanto ad Iano (1) quanto, e molto corrispondentemente, nel M. Pisano, (2) ove egli ed altri non sdegnerebbero di mettere nel Trias la parte superiore del complesso roccioso Verrucano, cioè il mio Wealdiano. Il fatto che il Verrucano tipico (Wealdiano) si inizia in trasgressione sopra gli scisti più antichi, con le sue roccie clastiche più grossolane, puddinghe e quarziti, è dimostrato anche dal fatto che al contatto scaturiscono appunto le maggiori e numerose sorgenti che sgorgano sulle pendici del nostro Monte, mentre è, in contrapposto, da notare la mancanza assoluta di sorgenti al contatto tra Verrucano ed i calcari mesozoici, ciò che sarebbe strano se il primo, scistoso, fosse sottoposto ai secondi aventi forte permeabilità in grande.

Mentre talora, per trovare le corrispondenze cronologiche di terreni privi di fossili si dà valore esagerato al criterio litologico, per il Verrucano tipico, che per me è una formazione a *facies* poco comune e caratteristica, non si vuole tenerne conto affatto e la si riferisce, quasi sempre in ordine al terreno sottostante, ora alla Creta superiore — Pseudoverrucano del Lotti — se riposa sopra il Lias; ora alla Creta di età non esattamente precisata — Verrucano di Rupe Cava (De Stefani) e della Pania orientale nelle Alpi Apuane (De Stefani) — se sta sopra al Titonico; ora al Trias, se come nelle Alpi Apuane ed in Liguria, sta sopra al Trias, ed ora infine al Permiano se riposa sul Permiano, come è il caso del Verrucano tipico del M. Pisano, di Iano, dell' Elba e forse di qualche altra località della Toscana.

Se invece si ammettesse l' età wealdiana del Verrucano tipico e quindi, anche per esso, il carattere di grande trasgressività, di grande mutabilità di potenza, di una certa varia-

---

(1) Lotti. *Osservazioni sui dintorni di Iano.* Boll. R. Comit. geol. Vol. X, 1879.

(2) Lotti. *Geologia della Toscana,* Mem. descritt. d. carta geol. d' Italia Vol. XIII.

bilità litologica, fenomeni tutti che caratterizzano il tipico Wealden, come è da tutti saputo, tutto verrebbe spiegato pianamente. Capisco: molti cambiamenti dovrebbero farsi nella geologia italiana per lo meno; della Toscana, delle Alpi Apuane e della Liguria specialmente; ma non sarebbe male prendere una decisione definitiva o, come si suol dire, il toro per le corna. Certo se si vuol seguitare a mettere i calcari cavernosi ecc. nel Retico, sol perchè sono spesso calcari dolomitici, grigio scuri, fetidi, simili ai retici, e vi si vogliono riferire calcari brecciati di età diversa od anche le breccie cavernose che sono quaternare, ed addossate talora ai primi, lungo il loro contatto con le roccie verrucane sottostanti, mascherandolo, e facendosi credere formazione interposta, non si approderà certo a nulla; ognuno rimarrà della propria opinione, e si seguiterà ad ammettere che nel Trias si trovino generi e specie di Ammoniti liasiche, che nel Permico si abbiano piante e conchiglie marine e di estuario che in altri regioni caratterizzano le formazioni wealdiane, e si dovrà ricorrere a carreggiamenti, a ribaltamenti e a faglie insussistenti, come ora deluciderò per spiegare la posizione del Verrucano tipico, talora in disaccordo con quella che dovrebbe avere, secondo l' età preconcetta che gli si vuole assegnare, costringendo a cambiamento di opinioni cronologiche, stratigrafiche e litologiche, quando ulteriori osservazioni e scoperte avrebbero infirmata l' età prestabilita dello stesso Verrucano, che non doveva mai esser suscettibile di cambiamento.

Ma vediamo intanto di spiegare le affermazioni ora fatte.

Nella parte N. del M. Pisano, fin da tempi assai antichi, fu osservata nei pressi del Convento di Rupa Cava, una formazione verrucana che fu ritenuta identica a quella tipica della Verruca ed il LOTTI (1), non preso allora dal preconcetto, scriveva delle sue roccie: " dallo scisto quarzoso micaceo alla puddinga grossolana o anagenite, sono ***letteralmente*** identiche a quelle del verrucano permico e contengono gli stessi elementi allotigeni di quarzo bianco e roseo e di tormalinite nera, cementati da un minerale micaeo autigeno. „ Egli attribuendola giustamente alla stessa età, ma considerando questa permica, secondo il concetto di allora, per spiegare la sua posizione fra roccie giuresi e cretacee, ricorse ad un fenomeno tettonico non frequente, una piega faglia inversa a piano di scorrimento molto inclinato, che non presenterebbe nulla di strano in se, ma che, come più tardi vedremo meglio, non ha assolutamente consistenza. Se il LOTTI anzichè riferire l'età del Verrucano di Rupe Cava a quella fino ad ora creduta permica del Verrucano della Verruca avesse riferito l' età di questa a quella dello stesso Verrucano di Rupe Cava che, senza ricorrere a nessuna complicata spiegazione tettonica, resultava manifestamente interposta fra il Giura superiore ed il Neocomiano, sarebbe stato nel giusto.

Nelle Alpi Apuane fu osservata però una formazione Verrucana che fu riferita al Trias, ed in parte lo sarà anche, ma che, tuttavia, fu ritenuta identica a quella tipica della Verruca, tanto che il DE STEFANI ne fece un tempo il suo più valido argomento per riferire appunto al Trias anche quest' ultima, ed il LOTTI, (2) correggendo il suo primo riferimento, del Verrucano di Rupe Cava, cioè, a quello della Verruca, lo riportò al creduto triassico delle Alpi Apuane e per avvalorare la nuova idea corresse l' interpretazione tettonica di prima, cambiando la piega faglia in quel fenomeno di scorrimento o di ricoprimento, meglio sarebbe detto di intrusione, che è sostenuto dal LOTTI molto tenacemente e portato

(1) LOTTI. *Un problema stratigrafico del M. Pisano*, Boll. R. Comit. geol. 1888, pag. 13.

(2) LOTTI. *Di un caso di ricoprimento presso Spoleto*. Boll. R. Comit. geol. 1905.

anche attualmente come principale argomento contro la mia concezione e che discuteremo più tardi. Se egli, pure in questo caso, avesse riferito anche il Verrucano delle Alpi Apuane a quello cretaceo di Rupe Cava sarebbe stato nel giusto. Il Verrucano, in parola, delle Alpi Apuane, al quale, col nome complesso di scisti superiori ai marmi, sono uniti scisti lucidi che crederei realmente triassici e scisti rasati varicolori giuresi, non ha posizione stratigrafica ben chiara nè colà, nè alla Spezia, e la sua assegnazione al Trias è al solito basata sulla sovrapposizione a calcari con fossili triassici, scoperti dal De Stefani, e specialmente sulla sua sottoposizione al calcare cavernoso, ai calcari grigi, fetidi, dolomitici, o più o meno simili al Portoro, di tipo triasico.

Al M. Argentario il Verrucano di grande potenza ricopre una formazione complessa di calcari grigi, di grezzoni, di bardigli, di marmi, di cipollini, di calcescisti, di scisti lucidi e di roccie verdi che dal Lotti (1) furono un tempo riportate al Presiluriano, quando i consimili calcescisti e le roccie verdi associate delle Alpi erano riguardate di tale epoca, e da lui (2) fu invece riferita al Trias e giustamente, quando fu riconosciuta l' età triassica e mesozoica di quelle formazioni alpine. Orbene; perchè il Lotti, che aveva riconosciuta, come è in realtà, la sovrincombenza del Verrucano a quella formazione quando questa fu per lui presiluriana, non seguitò a ritenerlo nelle stesse condizioni tettoniche quando riconobbe la triassicità di quella stessa formazione e credette meglio, piuttosto che ringiovanire anche esso, cambiarlo di posizione e metterlo arbitrariamente al di sotto?

Nella valle del Rosia, alla Montagnola senese, il Vinassa (3), col preconcetto della permicità del Verrucano, avendo osservato questo al di sopra del Lias ha dovuto ricorrere ad un ribaltamento per spiegare il fenomeno che invece è naturalissimo.

Al M. Pisano, fra S. Giuliano e S. Maria del Giudice la strada corre, in un' incavatura del Monte, sopra scisti verrucani, che secondo quel che si è detto (4) sarebbero venuti a giorno per effetto di una faglia che avrebbe spostato i calcari liassici sovrastanti. È invece evidente che il Verrucano, addossatosi liberamente alle testate del Lias inferiore di quelle località dalla parte orientale, estese i suoi depositi in quella gola precedentemente erosa fino a soprammettersi al Lias medio che riveste quelle colline dalla parte occidentale. Non vi è nulla di strano in ciò. I calcari cavernosi che anche colà stan sopra al Verrucano, con l' interposizione di una formazione argilloso-diasprina rossa, cui deve darsi molta importanza, come vedremo, ricoprono anche i calcari di Lias inferiore e medio e, quel che più conta, da ambedue le parti della supposta faglia, senza che si possa avvertire alcuno spostamento in nessuna delle formazioni circostanti.

Fra i fatti strani che il Lotti deve sostenere per non ammettere il ricoprimento del Lias per parte del Verrucano tipico si deve ricordare anche la terminazione a cuneo del Lias inferiore che avverrebbe, oltre che in diverse località toscane, anche nel M. Pisano, sul poggio delle Fate, presso la Villa Bosniaski, ove il Verrucano ed i calcari cavernosi vanno, sul versante S. del poggio, a contatto con il Lias medio senza l' interposizione dei calcari bianchi ceroidi di Lias inferiore che sono sviluppatissimi a brevissima distanza verso N. ove, anzi, mostransi di frequente ricoperti dai calcari cavernosi ecc.

---

(1) LOTTI. *Appunti di osservazioni geologiche nel Promontorio Argentario,* Boll. R. Comit. geol. Vol. XIV.

(2) LOTTI. *Sull' età delle roccie ofiolitiche del Capo Argentario.* Boll. R. Comit, geol. Vol. XXXVI.

(3) VINASSA. *Osservazioni geologiche sui dintorni di Rosia* (Siena) Mem. soc. tosc. sc. nat. Vol. XXIV.

(4) LOTTI. *Un problema stratigrafico nel Monte Pisano.* Loc. cit. pag. 14.

Un indizio che fa credere errata la concezione del Lotti io lo vedo anche nel fatto di aversi al paese delle Mulina, proprio fra mezzo alla massa da lui ritenuta triassica e carreggiata, un lembo di diaspri titonici, che vengono naturalmente a giorno al fondo della valle, regolarmente sotto agli scisti rasati varicolori, che sono pure titonici, ma che farebbero parte di quella massa. Il Lotti dirà forse che il fatto rappresenta una delle così dette finestre.

Ma continuiamo ad esaminare ed a citare altri di quei fatti correlativi a sostegno delle mie deduzioni paleontologiche.

È nota la polemica fra me ed il Lotti a proposito del suo Pseudoverrucano, arbitrariamente, secondo me, da lui *ora* ritenuto differente dal Verrucano tipico, ma giustamente posto nel Cretaceo e che da me è riguardato come vero Verrucano e posto nel Wealdiano. La questione ebbe due aspetti, stratigrafico l'uno, litologico l'altro, mancando allora quello paleontologico che è venuto dopo e che, come già dissi, ha servito da corollario al mio modo di vedere primitivo, confermandolo pienamente.

Il Lotti, in più luoghi della provincia di Grosseto, rinvenne una formazione verrucana ricoperta dal Senoniano (?) e dall'Eocene, che, prima di vederne la sovrapposizione al Lias, giudicò essere Verrucano tipico (1) e che dopo, ritenendola anche collegata col superiore Senoniano (?), pose nel Cretaceo, distinguendola col nome di Pseudoverrucano. Quanto meglio avrebbe fatto il Lotti se invece di cambiare il suo primo riferimento avesse riguardato se era il caso di scindere il Verrucano del M. Pisano in uno antico ed in uno recente e della stessa età del suo Pseudoverrucano!

Data dunque l'età cretacea del Pseudoverrucano e data la posizione cretacea del Verrucano di Rupe Cava, pareva strano che lo stesso complesso di roccie anagenitiche, quarzitiche, scistose, di tipo così speciale, dovessero appartenere in Toscana a quattro epoche geologiche differenti, al Permico, cioè, al Trias, ed alla Creta inferiore ed a quella superiore ed era facile pensare o per lo meno dubitare che tutte invece dovessero riferirsi alla stessa età e che per conseguenza il Verrucano della grande massa centrale e meridionale del M. Pisano dovesse dividersi in un Verrucano permiano ed in uno cretaceo, quello tipico della Verruca e di tante altre località. Confermava tale idea il fatto, noto a tutti, che il Permiano delle Alpi Apuane è litologicamente diverso dal Verrucano della Verruca, che l'Antracolitico con fossili della Valle del Guappero e di Iano è differente dalla soprastante formazione verrucana tipica e, se mai, almeno in parte, più somigliante al Permiano delle Alpi Apuane e dirò anche alle roccie dell'Elba, ritenute siluriane, devoniane o carbonifere, ma che potrebbero essere magari permiane.

Studiando il M. Argentario, (2) riconobbi che il Verrucano vero e tipico di colà sta sopra al Trias, come già aveva riconosciuto il Lotti, e che è in stretta connessione con i sovrastanti calcari cavernosi ecc., talora rossi sideritici, mercè diaspri rossastri e grigi manganesiferi interposti, e rammento anche da argille rosse, come appunto potei constatare avvenire anche per il Pseudoverrucano cretaceo del Lotti e che resulta anche dagli studi di questi. (3) Allora volli vedere se anche il Verrucano tipico della Verruca fosse

(1) LOTTI. *Note descrittive sul rilevamento geologico delle tavolette di Orbetello*, Boll. R. Comit. geol. 1887 e *Lembo Verrucano presso Castiglion della Pescaia*, Boll. R. Comit. geol. 1887.

(2) FUCINI. *Studi geologici sul Promontorio Argentario*, Ann. d. Università toscane. Vol. XXXII.

(3) LOTTI. *Note descrittive sul rilevamento geologico delle tavolette di Orbetello*. Boll. R. Comit. Geol. 1891.

LOTTI. *Verrucano e Pseudoverrucano in Toscana*. Boll. R. Comit. Geol. 1910.

connesso con i terreni soprastanti per mezzo delle stesse formazioni argillose rosse diasprine e potei constatare che tanto a Lugnano, quanto ad Uliveto, ad Agnano e ad Asciano esso presenta indubbiamente tali roccie quale formazione di passaggio ai calcari cavernosi ecc. spesso rappresentati da calcari rossi sideritici. Esaminando la formazione verrucana di Rupe Cava ed il Pseudomacigno di Corliano, che per me non è che una quarzite verrucana, fui lietamente sodisfatto nell'accorgermi che anche tali terreni, ritenuti ora cretacei pure dal De Stefani, facevano passaggio ai calcari cavernosi ecc., i cui primi banchi sono spesso dati da calcari rossi sideritici, sempre per mezzo della solita formazione argillosa rossa con diaspri. Tali corrispondenze sarebbero state davvero ben strane se non vi fosse stata, tra le varie formazioni verrucane e pseudoverrucane, anche corrispondenza cronologica. Come spiegare altrimenti, dal modo mio, la ripetizione nel Permico, nel Trias e nella Creta inferiore e superiore, periodi così distanti fra loro ed in uno spazio tanto limitato in superficie, di un complesso roccioso (Anageniti, quarziti, scisti — Argille rosse e diaspri — Calcari rossi sideritici e calcari cavernosi ecc.) avente ovunque identità litologica, lo stesso ordine e la stessa successione? In ogni modo non sarà esigenza ritenere che tali fatti possano essere considerati quali indicazioni di quei fatti correlativi invocati dal White ed ora richiesti dal Lotti per dar valore ai resultati del mio lavoro paleontologico, cui questi (pag. 307) vorrebbe negare ogni importanza cronologica senza il " sussidio di argomenti stratigrafici e litologici. „

Ma non basta; i vari diaspri che stan sopra al Pseudoverrucano, al Verrucano tipico del M. Pisano, dell'Argentario, dell' Elba, come al Verrucano della parte settentrionale del M. Pisano stesso (Pseudomacigno compreso) risultano essere radiolariti e, per quanto mostrino talora le radiolarie più o meno alterate, evidentemente formate dagli stessi generi e dalle stesse specie. Io (1) ho ritenuto che tali roccie diasprine corrispondessero a quelle di Cairo Montenotte, studiate dal Parona e Rovereto, (2) anche là sovrastanti al Verrucano, riguardate un tempo come permiche ed ora ammesse giuresi.

" Nel caso nostro, dice Lotti (pag. 313) bisognerebbe dimostrare che la presenza di fossili di tipo mesozoico nel Permiano è un assurdo paleontologico e non che essi costituiscano un'indicazione, la quale sarebbe sufficientemente probatoria per terreni sconosciuti di regioni inesplorate, ma non per terreni la cui posizione stratigrafica e l'età son fatti ormai acquisiti alla scienza, non solo d'Italia, ma anche in buona parte d'Europa. „ Ma come si può, anche per le sole cose dette fin qui, parlare ora di assurdi paleontologici e dire che la posizione stratigrafica e l'età del Verrucano sono fatti acquisiti alla scienza? Assurdi non esistono in Paleontologia; ma, talora, solo interpretazioni e determinazioni errate. Bisogna ricordarsi poi di non prendere il nome di Verrucano per sinonimo di Permiano e non bisogna dimenticare che quella parte della complessa formazione verrucana del M. Pisano, che io metto nel Wealdiano, sebbene sia quella tipica, è pure quella che egli ha sempre ritenuta differente da quella antracolitica con fossili e che non sarebbe alieno dal porre nel Trias.

Il Lotti (3) sostiene attualmente la diversità del suo Pseudoverrucano dal Verrucano

(1) FUCINI. *Studi geologici sul Promontorio Argentario.* Loc. cit. pag. 20.

(2) PARONA e ROVERETO. *Diaspri permiani a Radiolarie di Montenotte* (Liguria occidentale) Atti R. Accad. d. sc. di Torino Vol. XXXI.

(3) LOTTI. *Verrucano e Pseudoverrucano in Toscana.* Boll. R. Comit. geol. Vol. XLI.

tipico ed ha creduto di potere stabilire quale differenza essenziale il fatto di trovarsi la tormalinite fra i componenti dall' anagenite verrucana tipica, mentre in quella pseudoverrucana si avrebbe in sua vece una selce nera, che secondo lui mai era stata trovata nel vero Verrucano e mai lo sarebbe, per sua convinzione, perchè tale selce non potrebbe provenire che da terreni più recenti del Permiano. Feci (1) osservare allora al LOTTI che nel Verrucano tipico, tale essendo anche per lui, del M. Argentario ed appunto dei dintorni di Porto Ercole, aveva notato tra i componenti di quella anagenite numerosi ciottoli di quella stessa selce nera, della quale gli inviai un campione. Fatto esaminare questo dal FRANCHI, l' egregio Ing. LOTTI (2) osservò, ribattendo, che esso, anzichè di selce, cioè con struttura di aggregato calcedonioso, caratteristico delle selci, resultava costituito di un *minuto mosaico di quarzo, intersecato da minute e numerose venule dello stesso minerale*, ma ammise però che tale silice a mosaico quarzoso possa essere stata origine anche una selce.

La lieve differenza notata nei ciottoli silicei del Verrucano tipico e nel Pseudoverrucano, anzi che a differenza sostanziale di formazione, si deve piuttosto imputare alla diversità di campione ed alla diversa alterazione subita da uno rispetto all' altro. Tanto è vero che I. CANAVARI (3) studiando precedentemente, e quindi spregiudicatamente per l'attuale controversia, il Pseudoverrucano dei dintorni di Grosseto ebbe ad osservarvi ciottoli dell' apparenza di tormalinolite, ma che invece resultavano costituiti da *silice criptocristallina attraversata da venuzze quarzose* il che, in altre parole, non sarebbe che la silice a *minuto mosaico di quarzo* osservata dal FRANCHI e dal LOTTI nel Verrucano tipico del M. Argentario.

La questione era dunque ridotta a nulla ed è strano che il LOTTI (4) vi ritorni ora sopra e vi insista nuovamente aggiungendo, a differenza tra Verrucano e Pseudoverrucano, che nel primo quei ciottoli sarebbero arrotondati e nell' altro invece a spigoli netti, il che pure non è affatto vero poichè io posso assicurarlo che nel Verrucano tipico dei dintorni di Porto Ercole, verso le Grotte specialmente, si trovano anche ciottoli silici a spigoli acuti.

Poichè siamo a parlare dei ciottoli che si trovano nel Verrucano tipico, credo utile avvertire che non regge nemmeno la differenza fatta rilevare oggi dal LOTTI, in confronto col Pseudoverrucano, dalla presenza in quest' ultimo di ciottoli di diaspro rosso, in quanto che anche io ho trovato nel Verrucano tipico di Agnano un ciottoletto di diaspro rosso, che ha tutto l' aspetto del diaspro rosso titonico dei prossimi monti di S. Giuliano, e come questo costituito evidentemente dagli stessi generi e dalle stesse specie di radiolarie.

Non occorre spendere molte parole per fare rilevare l' importanza di questo fatto, che basterebbe da solo a risolvere in favore dell' età relativamente recente del Verrucano tipico l' attuale controversia; a me preme solo di avvertire che il campione di Verrucano con l' incluso ciottoletto di diaspro e relativa sezione microscopica trovasi nelle collezioni del Museo geologico di Catania ed è a disposizione di chiunque voglia esaminarlo.

Fatto così conoscere il numero ed il valore dei dati stratigrafici e litologici che hanno

(1) FUCINI. *Verrucano e Pseudoverrucano in Toscana*. Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat. Vol. XX.

(2) LOTTI. *Sopra un ciottolo siliceo del M. Argentario*. Boll. R. Comit. geol. 1911.

(3) CANAVARI. *Roccie della formazione verrucana e pseudoverrucana dei dintorni di Grosseto*. Mem. soc. tosc. sc. nat. Vol. XXVI, 1919.

(4) LOTTI. *Il Permiano del M. Pisano* ecc. Loc. cit., pag. 312.

dimostrata l' età cretacea del nostro Verrucano, prima che io ne documentassi paleontologicamente i resultati, passerò ad esaminare gli altri argomenti portati contro di me dal Lotti.

L'egregio Ingegnere si diffonde a combattere i resultati miei paleontologici, mettendo in dubbio le determinazioni fatte da me. È questa una discussione oziosa, ed io non posso mettermi qui a fare la difesa o la giustificazione di ogni singolo mio riferimento generico e specifico. Il dire questo genere, questa specie, se rassomiglia ad una wealdiana rassomiglia anche ad una permiana, non approda a nulla. Potrei allora suggerire al Lotti di esaminare il lavoro di Henry Schaler Williams — *The fauna of the Chapman Sandstone of Maine,* U. S. geol. Sur. P. P. 89 — ove troverebbe da potere asserire, con una certa apparenza di verità, che le mie *Gervilliae* sono *Actinoporellae* o *Folmannellae;* che le *Cyrenae*, che con altri lavori potrebbero divenire *Edmondiae,* appartengono invece a *Nuculoida*, *Tellinites*, *Paleonello;* che la *Mactromya* è una *Glossites;* che *l' Arcomya* è una *Goniophora*, e che *l' Inoceramus,* di cui fra breve dirò, si riferisce ad una *Myalina* ecc. ecc. Il Lotti poteva, come già dissi richiamare la mia collezione, che è al Museo di Pisa e che è a disposizione di tutti, studiarla o farla studiare a suo piacere, procurando il mezzo di valutare e discutere i disparati riferimenti. Nel mio studio avrò forse troppo suddiviso specificamente le *Cyrenae*, ma il fatto è dovuto alla combinazione di aver potuto riferire a specie diverse e conosciute forme che a caso nuovo potevano essere tenute unite. Da altra parte era per me strettamente doveroso distinguere e far conoscere tutte le forme, anche poco differenti fra loro, e non trascurarne alcuna. Ma, senza stare a discutere di specie o di generi, l'importanza dei miei fossili e del mio studio emerge dal fatto, di valore indiscutibile, di aversi la combinazione che tanto i fossili animali come i vegetali si trovano di accordo ad essere, dirò anche, di tipo wealdiano e dal fatto di aver potuto determinare quasi completamente gli uni e gli altri con la sola pubblicazione del Dunker sopra il Wealden dell' Hannover.

Riferimenti generici e differenti interpretazioni specifiche potranno sicuramente venir fatte nel materiale da me studiato, data anche la sua manchevole conservazione, ma son persuaso che mai potranno cambiare i resultati ottenuti. Io stesso, per esempio, crederei attualmente che l' *Anisocardia verrucana* Fuc. da me descritta (1) che, al De Stefani (2) parrebbe piuttosto riferibile ad un Gasteropode, magari ad un *Platyceras*, dovesse ora meglio rapportarsi ad una *Gryphaea*, avendo di questa osservati alcuni individui, aventi anche conservata la piccola valva, fra i fossili giura-cretacei, si noti, riportati dal Dainelli nella sua spedizione al Caracorum e che, se non ostasse la curvatura dell'apice in senso opposto, non dubiterei trattarsi anched ella stessa specie. Così debbo riconoscere che l'esemplare riportato da me con dubbio, perchè allora non potuto esaminare direttamente, alla *Cyrena mactroides* Rmr, e che dal Tommasi (3) fu dubitativamente riferito al gen. *Pecten*, non è nè una *Cyrena*, nè un *Pecten*, ma certamente un *Inoceramus*, e ciò dico dopo averlo avuto in esame dalla cortesia dello stesso Ing. Lotti che lo conservava nelle collezioni del R. Ufficio geologico.

---

(1) FUCINI. *Fossili Wealdiani del Verrucano tipico del M. Pisano* (Loc. cit.), pag. 21, tav. IV fig. 19-21.

(2) DE STEFANI. *Escursione geol. da Buti a Calci* ecc. (Loc. cit.) pag. 21.

(3) TOMMASI. *Note paleontologiche. Fossili della Verruca.* Boll. soc. geol. ital. Vol. IV pag. 220, tav. XIV fig. 25.

Tale *Inoceramus*, come resulta dalle unite figure, di grandezza alquanto maggiori dell' originale, non ha nulla a che fare coi *Pecten*. La conchiglia è molto rigonfia ed ha la maggior gonfiezza verso la parte posteriore per modo che questa scende al margine più rapidamente dell' anteriore, la quale è però molto più di quella curvata verso l'apice ove mostrasi, anzi, leggermente escavata. L'apice è leggermente ricurvo in avanti. Non si ha alcun indizio di orecchietta anteriore, che in ogni modo non poteva che essere rudimentale. La posteriore è evidente, ma sembra essere stata artificialmente resa più distinta ed individualizzata, nella preparazione del fossile, da una scalfitura prodotta da una punta di ferro, nel punto ove essa si distacca dalla parte convessa della conchiglia. Questo punto trovasi molto alto, per cui l' orecchietta, che è rigonfia e con superficie obliquamente scendente all'esterno, sembra essere la continuazione della parte dorsale della conchiglia stessa, apparendone solo separata da una lieve depressione che irradia dall' apice e che termina circa sul terzo superiore del margine posteriore. Questo resulta per ciò, corrispondentemente, alquanto sinuoso. Il margine cardinale è diritto ed orizzontale, spessito e rigonfio. La superficie della conchiglia è ornata da incerta e leggera striatura radiale e da strie e pieghe concentriche di accrescimento, che si prolungano evidentemente, attraverso l' orecchietta, fino al margine cardinale.

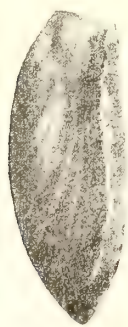



Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Questa specie, che chiamerò *I. verrucanus*, ha qualche rassomiglianza con l' *I. neocomiensis* d'ORB. (1) che è alquanto più slargato, e si avvicina moltissimo all' *I. cuneiformis* d'ORB. (2), di età un poco più recente e dal quale differisce solo che per l' orecchietta più individualizzata.

Ma procediamo ancora nella discussione.

Nel Verrucano antracolitico di Iano si trovano fossili piante e conchiglie, e tanto le une che le altre non hanno affatto relazione con le piante e con le conchiglie fossili del Verrucano tipico del M. Pisano. E un caso? Sarebbe ben strano perchè si ripete anche in confronto con l' Antracolitico dell' Elba e diventa ancora più strano ed inammissibile se si pensa che nello stesso M. Pisano si hanno, nel Verrucano tipico, delle piante assolutamente diverse da quelle numerosissime del Verrucano paleozoico, mentre poi in questo non si hanno alcuna di quelle conchiglie che si trovano tanto abbondanti ed in più luoghi dell' altro Verrucano, dovendosi riguardare meglio come fruttificazioni quei fossili attribuiti a molluschi dal CANAVARI (3), incidentalmente citati nel Paleozoico di Villa Massagli e ritenuti identici a quelli da me studiati.

Ed a proposito dell' Elba, ove a N. di Rio si hanno due Verrucani, non precisamente

(1) D' ORBIGNY. *Paléontologie française*. Terr. crét. T. III, pag. 503, tav. 403 fig. 1, 2.

(2) D' ORBIGNY. *Idem*, pag. 512, tav. 407.

(3) CANAVARI. *Nuove località nel M. Pisano con resti di piante carbonifere*. Proc. verb. soc tosc. sc. nat. 1891.

connessi fra loro, uno tipico ed identico a quello della Verruca ed uno per molti riguardi uguale o simile a quello permico delle Alpi Apuane e specialmente del M. Pisano, ma che viene dal Lotti attribuito al Siluriano perchè sottoposto all' altro ritenuto permico e perchè il Meneghini vi avrebbe osservato, insieme con *Orthoceras* ed *Actinocrinus* indeterminati, una *Cardiola* cfr. *boehmica*, dove il Lotti metterebbe il Verrucano tipico se l' altro sottoposto e ritenuto siluriano fosse, come dubiterei, permiano ? Il De Angelis (1) trovò in questo un'impronta di pianta, attribuendola ad un *Asterophyllites*, che potrebbe dubitarsi essere permiana per quanto da lui creduta del Carbonifero, forse per non ringiovanire troppo la formazione che era ritenuta, ripeto, siluriana e sottoposta al Verrucano creduto permiano. Il Sacco (2) vi rinvenne una *Fenestella* che per le stesse ragioni non venne probabilmente riferita al Permiano, ma al Carbonifero. L'*Actinocrinus* e l'*Orthoceras* osservati dal Meneghini fanno pensare ad una corrispondenza col Verrucano permiano, ugualmente ad *Actinocrinus* ed *Orthoceras*, delle Alpi Apuane e l'*Actinocrinus* è un fossile che io ho trovato nel Permiano della Valle del Guappero. Mi pare che vi sia di che pensare alla permicità di quella formazione. La fauna che più recentemente vi ha trovato il De Stefani (3) riferita prima al Devoniano poi al Carbonifero, senza escluderne del tutto la permicità, ha carattere tali da aumentare il dubbio da me emesso e che sarebbe infine avvalorato dal rinvenimento di altri resti di piante operatovi or non è molto dal Canavari.

Ma l' argomento sul quale specialmente si basa il Lotti è l' esistenza di quella specie di carreggiamento di roccie triasiche fra mezzo a diaspri titoniani, al quale ho accennato in addietro e che io (4) per il primo dichiarai insussistente, seguito dall' Ugolini (5) e poi molto autorevolmente dal De Stefani (6) che ampliò i medesimi argomenti portati da me. Potrei perciò rimandare a tali studi precedenti per le considerazioni da contrapporsi al modo di vedere dal Lotti, ma poichè ho nuove osservazioni ed altri fatti interessanti da aggiungere e da contrapporre, credo utile fermarmi alquanto sopra questa questione e discuterla piuttosto ampiamente.

Sostiene dunque il Lotti che nel M. Pisano settentrionale, al di sopra dei diaspri titoniani, seguenti la serie liassica, e sotto altri diaspri , sottoposti ai calcari maiolica neocamiani, e che egli ritiene pure titoniani, si trovino incluse delle formazioni costituite da scisti e calcescisti di vario colore, da Pseudomacigno, da scisti, quarziti, e anageniti, nonchè da calcari grigi fetidi, talora con selce, simili a portoro, dolomitici o cavernosi, che secondo lui rappresentano la serie triasica al disopra dei marmi nelle Alpi Apuane e che quindi, essendo colà in posizione anormale, ma in serie regolare, si sono incuneate fra mezzo alla formazione dei diaspri titoniani la quale sarebbe rimasta divisa in due parti.

Argomento principale a sostegno di questo modo di vedere è che, secondo il Lotti, quelle formazioni mancano tra il Titonico ed il Cretaceo nei prossimi monti di Oltre Serchio.

(1) DE ANGELIS. *Sopra il primo fossile vegetale trovato negli scisti carboniosi paleozoici dell' Elba orientale*. Boll. soc. geol. ital. Vol. XIII 1894.

(2) SACCO. *Rinvenimento di Fenestelle all' Elba*. Boll. soc. geol. ital. Vol. XXII.

(3) DE STEFANI. *Fossili paleozoici dell' Isola d' Elba*. Rend. Acc. Lincei Vol. XXIII. 1914.

(4) FUCINI. *Ancora sopra l' età del marmo giallo di Siena*. Mem. soc. tosc. sc. nat. Vol. XXIII, 1917. e *Notizie sulla geologia dell' Isola del Giglio*. Proc. verb. soc. tosc. sc. nat. 1907.

(5) UGOLINI. *Brevi osservazioni sui calcari cavernosi del M. Pisano*. Proc. verb. soc. tosc. sc. nat. 1908,

(6) DE STEFANI. *Di alcuni carregg, loc. recent. supp. in Italia*. Rend. R. Accad. Lincei 1908.

Per non entrare in questioni che uscirebbero dai confini di questo mio studio, tralascio di trattare per ora della corrispondenza, in gran parte vera, di quelle formazioni con quelle superiori ai marmi delle Alpi Apuane e di quella dell'assegnazione al Trias di queste ultime, per gran parte errata, come ho detto altre volte. Si tratta per me di dimostrare, ancora una volta, l' insussistenza della spiegazione tettonica escogitata dal LOTTI.

Come ho già detto in addietro, essendo venuto nella persuasione che i calcari cavernosi ecc. della Toscana fossero cretacei e non retici, come per l' avanti era incondizionatamente ammesso da tutti, ritenni (1) che quelli della parte settentrionale del M. Pisano, che farebbero parte del complesso roccioso carreggiato del LOTTI, stessero colà in posto normale e che quindi quel fenomeno tettonico fosse insussistente " escludendolo anche il fatto di ritrovarsi la stessa formazione delle Mulina e di Rupe Cava, nella parte quasi opposta del M. Pisano, fra Caprona ed Uliveto ove essa è sovrapposta al Lias inferiore. „

Il DE STEFANI (2), dopo aver fatto, insieme con l' UGOLINI, alcune escursioni sul M. Pisano riconobbe la inesistenza del fenomeno sostenuto dal LOTTI e lo combattè, come avevo già fatto io, sostenendo la presenza nel poggio fra Caprona ed Uliveto, in lembi sparsi ma sicuri, della controversa formazione delle Mulina, compresi gli scisti varicolori, che io veramente non vi ho osservato e che per me sono più antichi del Verrucano tipico. Egli sostiene inoltre che quella formazione deve tenersi nel Cretaceo, secondo le antiche idee del SAVI, anche per il fatto che negli scisti varicolori di essa — che io ritengo del Titonico superiore, come a suo tempo dimostrerò — furono trovati dei *Condrites*, *C. intricatus* STERNB., *C. furcatus* STERNB., che sarebbero specie cretacee ed eoceniche, e perchè essa è differente dalla formazione triassica delle Alpi Apuane, cui vien riferita dal LOTTI, differenza che, con questi, io non ammetto, almeno in modo così assoluto ed esclusivo. Il DE STEFANI sostiene poi, e giustamente, che al fenomeno del LOTTI mancano quelli concomitanti per l' attrito derivante da scivolamenti interni. Escludendo egli infine la corrispondenza cronologica dei calcari cavernosi delle varie parti della Toscana, ammessa, però con concetti differenti, da me e dal LOTTI, finisce col porre tali calcari cavernosi del M. Pisano nel Cretaceo superiore, mentre da me sono ritenuti non più recenti del Neocomiano medio.

Replicò il LOTTI (3) che la presenza, fra Caprona ed Uliveto, di lembi della formazione delle Mulina gli sembra un fatto " ovvio, perchè la piega con scorrimento di cui è questione non poteva essere limitata alla parte settentrionale del gruppo e se mancavano traccie di essa nella parte S. O., ciò non poteva essere avvenuto che in seguito a denudazione. „

A questo punto si può ora domandare : se quella formazione delle Mulina è triasica, perchè secondo il LOTTI starebbe nelle Alpi Apuane fra i marmi ed il Retico, come mai a Caprona si trova solamente sopra ai calcari ad *A. contorta* ed al Lias e non si trova anche sotto, al suo posto normale fra Retico, cioè, e Verrucano tipico, come dovrebbe se questo fosse Permiano ?

---

(1) FUCINI. *Notizie sulla geologia dell' Isola del Giglio* Loc. cit. 1902.

(2) DE STEFANI. *Di alcuni carreggiamenti locali ecc.* Loc. cit. 1908.

(3) LOTTI. *A proposito di una nota di* C. DE STEFANI *su alcuni carreggiamenti locali recentemente supposti in Italia.* Boll. R. Comit. geol, 1908.

Il fatto sta che fra Caprona ed Uliveto la formazione delle Mulina è rappresentata dalla sua parte superiore, calcari cavernosi ecc., e da quella media, scisti argillosi rossi con diaspri e Pseudomacigno, e vi manca l' inferiore degli scisti rasati varicolori. Il Pseudomacigno e la formazione argillosa rossa con diaspri, della quale ho tanto parlato e parlerò in seguito, stanno sopra al Lias inferiore ed al Lias medio e sono lateralmente accompagnati e fusi con le più tipiche roccie del Verrucano della Verruca, nello stesso modo che il Pseudomacigno delle Mulina si accompagna di fianco al Verrucano di Rupe Cava. I calcari cavernosi ecc. stanno sopra indistintamente, spesso con l'interposizione della formazione argillosa rossa con diaspri, tanto al Retico quanto al Lias inferiore ed al medio.

Ma i geologi, per convenire delle idee del Lotti, non devono fermarsi a ritenere che il carreggiamento delle formazioni delle Mulina si sia esteso solo a S. O. del M. Pisano fino a Caprona ed Uliveto, ma dovranno estenderlo ancora più oltre, al M. Bianco ed al Castellare di S. Giovanni alla Vena, ove si trovano pure lembi di quelle formazioni, e ritenere anche, il che sarà molto difficile, che esso, attraversando da O. a E. tutto il M. Pisano, dalla pianura pisana, quindi, a quella lucchese, sia giunto fino a S. Michele in Escheto ed a Vico Pelago, ove gli scisti rasati varicolori di quelle formazioni si trovano colà fino ad immergersi sotto al quaternario della pianura.

Date le pendenze regolarmente volte verso la pianura pisana od a quella lucchese, come verso la valle del Guappero o del Serchio, presentate dalle formazioni in discussione, resulta evidente la loro disposizione a ricoprire a mantello tutta la parte settentrionale del M. Pisano, talora in successione normale sopra formazioni precedenti, e talora, ma più raramente, in trasgressione sopra altre più antiche, delle quali hanno anche penetrato le cavità precedentemente erose. In questa parte del M. Pisano hanno sviluppo prevalente gli scisti rasati varicolori (Titonico superiore), seguono gli scisti, quarziti, Pseudomacigno e anageniti verrucane (Wealdiano) e per ultimo il complesso di calcari del cavernoso, che non si trovano che sulle pendici che guardano la pianura del Serchio, pisana e del Guappero, mancando in quelle che sovrastano alla lucchese.

Anche nella parte meridionale del M. Pisano, astraendo da alcune ripiegature secondarie, si ha in quelle stesse formazioni la medesima disposizione a ricoprire a mantello le formazioni più antiche. Queste però anzichè liasiche o giuresi sono in massima parte paleozoiche, per cui la trasgressione è più forte; quelle sono rappresentate, mancando gli scisti rasati varicolori, dal Verrucano tipico, dalle argille rosse con diaspri ed in parte minore dai calcari cavernosi ecc. Il mantello del Verrucano tipico è continuo dalla pianura pisana a quella di Bientina e lucchese, come dalla valle del Guappero all' Arno; le altre roccie sono limitate ai fianchi, occidentali e meridionali, da S. Giuliano a S. Giovanni alla Vena, e rappresentano la parte più esterna del mantello, lacerata ed interrotta in più punti, mancante del tutto sui fianchi orientali, ma rappresentata nella Valle del Guappero da lembi, appoggiati alle testate del Lias del M. Penna e del M. Le Croci, che occupano, si dirà, la parte più profonda del sinclinale che s' interpone fra le due ricopriture a mantello descritte.

Ma se anche non si volesse tener conto del mio modo di vedere, resta sempre stabilito che le formazioni delle Mulina, Pseudomacigno, scisti argillosi con diaspri e calcari cavernosi ecc., si trovano sicuramente rappresentate nella parte profonda della valle del Guappero, ove a S. Lorenzo ricoprono forse diaspri titoniani, addossandosi al Lias ed al

Paleozolico, per cui bisognerebbe ammettere che il noto carreggiamento si fosse esteso ed abbassato fin là.

Il LOTTI deve convenire della reale importanza di tali constatazioni, ogni qual volta che a Lui già apparve di una certa gravità per la sua tesi il fatto di aver osservato la presenza degli scisti rasati delle Mulina in un' area ristretta fra il M. Alle Croci ed il Grottone, che credette dovuto una prima volta (1), a frammenti più o meno grandi di una massa franata e poi (2), più tardi, a masse facenti parte di quelle carreggiate. Bisogna ricordare che non si tratta di una area ristretta nè di lembi di roccie isolati, ma di estese plaghe di territorio, che vanno, come ho già detto, fino alla pianura lucchese, e di masse ragguardevoli di scisti rasati varicolori, ricoperte anche da scisti e da Pseudomacigno verrucani (Wealdiano).

È importante notare che presso S. Lorenzo gli scisti argillosi rossi con diaspri ed il Pseudomacigno trasgrediscono sull' Antracolitico di Villa Massagli senza l' interposizione degli scisti rasati varicolori, che pur vi dovrebbero essere facendo parte delle formazioni carreggiate del LOTTI, e comportandosi allo stesso modo quindi del Verrucano tipico con l'Antracolitico di ogni altra parte del M. Pisano. Mentre sarebbe ora strano che mancasse a S. Lorenzo il membro inferiore dalle masse ipoteticamente carreggiate, il fatto conferma la corrispondenza cronologica del Pseudomacigno col Verrucano tipico, del quale non è che una delle tante modalità litologiche.

" Il nocciolo della questione risiede per me „ dice il LOTTI (pag. 310) " in questo fatto, dell' assenza assoluta di roccie clastiche del tipo Verrucano nella zona del Giura superiore dei gruppi mesozoici più volte citati. „

Come si può fare a discutere su questo punto quando, ripeterò, il Verrucano di Rupe Cava non è più Verrucano identico a quello della Verruca, come un tempo credette anche il LOTTI; quando il Pseudoverrucano non è più Verrucano tipico, come pure un tempo credette anche il LOTTI; quando il Verrucano delle Alpi Apuane e di Spezia, perchè sta sopra al Trias, non è Verrucano tipico; quando non è più vero che all' Argentario il Verrucano tipico sta sopra al Trias; quando non sarà vero che il Verrucano di Casal di Pari riposi sopra al Trias, per quanto il LOTTI (3) abbia constatato che colà il giacimento di stibina sta fra Verrucano e calcari cavernosi, quindi senza l'interposizione di quel vero Trias, il che dovrebbe accadere per le idee di lui; quando non sarà vero che all' Elba il Verrucano stia sopra agli scisti varicolori di Lias superiore e titonici del Capo Pero; quando non sarà vero che alla Montagnola senese quel Verrucano stia sopra al Lias, per cui il VINASSA credette che vi fosse rovesciato, oppure si vuol ritenere che quel Lias non sia che Trias con fossili liassici; quando, cioè, si vuol negare sistematicamente tutti quei fatti che contradicono le vedute del LOTTI? Ora torno a ripetere, avendolo già fatto altra volta (4), ma, pare, senza essere stato creduto, che anche nei Monti di Oltre Serchio si hanno, come alle Mulina, roccie

(1) LOTTI. *Un problema stratigrafico nel M. Pisano.* Loc. cit. pag, 12.

(2) LOTTI. *Di un caso di ricoprimento presso Spoleto.* Loc. cit. pag. 12. figura.

(3) LOTTI. *Rapporti di origine fra i gessi del calcare retico,* pag. 10. Rass. min. e dell'industria chimica Vol. XXX.

(4) FUCINI. *Ulteriori osservazioni sui calcari cavernosi della Toscana,* Proc. verb. soc. tosc. sc. nat. Vol. XVIII.

verrucane, puddinghe, quarziti e scisti, al di sopra di diaspri titoniani, seguenti il caratteristico Lias superiore ed al di sotto dei calcari grigio cupi con selce che vi rappresentano i calcari cavernosi e che, come alle Mulina ed in tutte le altre località, hanno per formazione di passaggio i tanto ricordati scisti argillosi rossi con diaspri, essendo poi ugualmente seguiti da altra formazione diasprina.

Il Lotti (1) ha già avvertito che, quando tali fatti fossero dimostrati, a lui non resterebbe che estendere anche ai Monti di Oltre Serchio quel suo famoso carreggiamento. Con la penna si può far carreggiare quel che si vuole, ma io stimo più utile discutere e vedere dettagliatamente come stanno le cose in quei Monti, e per spiegare meglio le cose comincerò dal riportare nei quadri seguenti la serie delle formazioni di essi, messa a confronto con la serie della parte settentrionale del M. Pisano, secondo i criteri miei e del Lotti, cominciando per brevità dal Retico e terminando all' Eocene.

**Prospetto comparativo della successione dei terreni nel M. Pisano e nei Monti di Oltre Serchio — Secondo l' Ing. LOTTI.**

| | MONTE PISANO | Monti di Oltre Serchio |
|---|---|---|
| Eocene | *a*) Calcare nummulitico | *a*) Idem |
| Creta sup. | *b*) Scisti e calcari rossi verdastri e grigi | *b*) Idem |
| » inf. | *c*) Calcari bianchi e grigi con selce (Maiolica) | *c*) Idem |
| Giura sup. | *d*) Diaspri, scisti rossi e calcari verdi e violetti granulari con Aptici titoniani | *d*) Idem |
| (serie carreggiata o intrusa) sc. Lotti | *i*) Calcare dolomitico, calcare grigio cupo compatto venato, simile a Portoro, calcare cavernoso fetido | |
| | *k*) Calcare a lastre che presso Caprona sta sotto ai calcari neri con *A. contorta* | |
| | *l*) Arenaria (Pseudomacigno) con galestri alla base che passano a scisti argillosi ardesiaci | |
| | *m*) Scisti quarzitici, puddinghe quarzose (Verrucano) scisti rasati, calcescisti violetti e verdastri | |
| Giura sup. | *d*) Diaspri e scisti rossi con Aptici titoniani | |
| Giura medio | *e*) Calcari grigi con selce, detti picchiettati | *e*) Calcari stratificati grigi cupi con selce. |
| Lias sup. | *f*) Calcari marnosi scistosi con *Posidonomya Bronni* | *f*) Idem |
| Lias medio | *g*) Calcari bianchi con selce Ammoniteferi e calcari rossi con Arieti | *g*) Idem |
| Lias inf. | *h*) Calcare bianco ceroide con gasteropodi e coralli | *h*) Idem |
| Retico | *i*) Calcare subcristallino e calcare cavernoso fetido. | *i*) Calcare con *Av. contorta* e scisti a Bactrilli calcare cavernoso fetido. |

(2) LOTTI. *Sulla posizione stratigrafica dei calcari cavernosi della Toscana*, pag. 6. Boll. R. Comit. gel. 1909.

**Prospetto comparativo della successione dei terreni nel M. Pisano e nei Monti di Oltre Serchio — secondo A. FUCINI.**

| | MONTE PISANO | Monti di Oltre Serchio |
|---|---|---|
| Eocene m. | 1) Calcare screziato e nummulitico | 1) Idem |
| » » | 2) Scisti rossi e grigi | 2) Idem |
| Neocomiano sup, | 3) Calcari bianchi e grigi con selce (Maiolica) | 3) Idem |
| » sup. | 4) Diaspri grigi | 4) Idem |
| Neocomiano med. | 5) Calcare dolomitico, calcare grigio cupo con selce, calcare compatto venato simile a Portoro, calcare cavernoso fetido, calcare rossastro sideritico (calcare a lastre di Caprona e Asciano) | 5) Idem |
| Wealdiano sup. | 6) Scisti argillosi rossi con diaspri | 6) Idem |
| inf. | 7) Pseudomacigno, scisti argillosi ardesiaci, puddinghe quarzose, quarziti, scisti (scisti quarzitici di Agnano e di Calci con fossili wealdiani) | 7) Idem |
| Titonico sup. | 8) Scisti rasati e calcescisti varicolori, calcari scistosi bianco verdastri (cipollini) | 8) Mancano ? |
| inf. | 9) Diaspri e scisti rossi con Aptici titoniani | 9) Diaspri grigio verd. |
| Calloviano ? | 10) Calcari bianchi e grigio chiari con selce, detti picchiettati | 10) Mancano ? |
| Lias sup. | 11) Calcari marnosi scistosi con *Posid. Bronni.* | 11) Idem |
| Charmoutiano sup. | 12) Calcari grigio chiari con selce | 12) Idem |
| Charmoutiano inf.<br>Sinemuriano sup. | 13) Calcari rossi ammoniteferi | 13) Idem |
| » inf. | 14) Calcari ceroidi rosati e giallastri | 14) Idem |
| Ettangiano | 15) Calcari bianchi ceroidi | 15) Idem |
| Retico | 16) Calcari grigio azzurrognoli, con scisti terrosi interposti, lumachella minuta di Caprona e di Agnano. | 16) Idem |

Dal prospetto presentato dal Lotti, ascendendo la serie, si scorge subito che egli, al disopra del Giura superiore *d*), rappresentato da diaspri e scisti rossi con Aptici titoniani, segna le formazioni dette delle Mulina *m*, *l*, *k*, *i*, e poi un' altra volta un Giura superiore *d*) pure costituito da diaspri, scisti rossi e (si noti) calcari verdi violetti con Aptici titoniani.

Le formazioni *m*, *l*, *k*, *i*, che apparterrebbero al Trias, si sarebbero dunque intromesse fra una stessa formazione di diaspri e calcari con Aptici titoniani, la quale sarebbe stata tagliata in mezzo e proprio secondo un piano di stratificazione, per modo che una parte sarebbe rimasta al di sotto, al suo posto, ed una portata al di sopra di esse, insieme con le formazioni più recenti. Notevole è il fatto della perfetta concordanza stratigrafica di tutte le formazioni in discussione, che si sarebbe mantenuta malgrado tale sconvolgimento, e strana è la mancanza di qualunque breccia di frizione.

Perchè tale costruzione o spiegazione fosse giusta ed accettabile bisognerebbe che in primo luogo fosse provata la corrispondenza cronologica delle due formazioni di diaspri, messe indistintamente nel Giura superiore e segnate ambedue con *d*) e poi che le formazioni segnate con *m*, *l*, *k*, *i*, si ripetessero nello stesso ordine, al di sotto del Lias inferiore od al Retico e prima del Permiano, nei luoghi vicini, ciò che non resulta affatto, come si rileva anche dal prospetto del Lotti stesso.

I diaspri che stanno al disotto di quelle formazioni sono infatti certamente del Giura superiore per la loro posizione e per gli Aptici titoniani trovativi dal Canavari, ma che i diaspri che stanno al di sopra sieno pure titoniani è assolutamente erroneo. Il Lotti li ritiene tali, non perchè al M. Pisano o nei Monti d' Oltre Serchio abbiano fornito Aptici titoniani, ma perchè li considera corrispondenti a diaspri ed a calcari verdi e violetti che nelle Alpi Apuane contengono Aptici titoniani. Tali calcari mancano tanto nel M. Pisano quanto nei Monti d' Oltre Sarchio nelle formazioni diasprine poste nel Giura superiore dal Lotti, siano inferiori o superiori alle formazioni delle Mulina *m*, *l*, *k*, *i*; non potrebbe esser difficile però che trovassero corrispondenza con i calcari più o meno scistosi bianco verdastri (cipollini) che si trovano nel M. Pisano, ove formano lenti connesse con gli scisti rasati varîcolori da me posti nel Titonico superiore 8).

Le formazioni delle Mulina, *m*, *l*, *k*, *i*, sono poste nel Trias dal Lotti perchè corrispondono, ed è vero almeno in massima parte, a quelle credute triasiche delle Alpi Apuane, ma tale corrispondenza è cronologicamente retrovertibile ed anzichè riferire quelle a queste si dovrebbe riportare queste a quelle. Se le stesse formazioni, cioè, stanno al M. Pisano in condizioni stratigrafiche tali da esser ritenute del Cretaceo inferiore e che, voglio ammetterlo possibile, nelle Alpi Apuane si trovino in maniera da essere riguardate come triasiche, vorrebbe dire che in una delle due località avrebbero posizione anormale. Perchè tale località deve essere appunto il M. Pisano e non le Alpi Apuane, quando per insisterci si deve andare incontro a negare tanti mai fatti che lo escludono, fino ad oppugnare l' età wealdiana dei miei fossili, che nessun paleontologo potrebbe mettere in dubbio? Ma la posizione di quelle formazioni non è poi nel M. Pisano tanto più chiara, aperta e manifesta che non nelle Alpi Apuane? Qui essa è data dalla sovrapposizione ai Marmi, fatto che non può escludere l' età wealdiana, e dalla generale sottoposizione ai calcari cavernosi ecc., ritenuti retici, ma che devono, ogni dove, mettersi nella Creta. La strada è aperta ed in parte trascorsa a questo riguardo, e non da me solo, basti ricordare De Stefani, Ugolini, Vinassa e perfino Lotti per quelli delle Val di Lima, ove il Murchison trovò un *Crioceras*. Ma se in qualche luogo si avesse colà la reale sovrapposizione di vero Retico, perchè non guardare se fosse il caso di spiegare ivi il fenomeno?

Nel M. Pisano sarebbe stato importante e necessario che quelle formazioni *m*, *l*, *k*, *i*, si trovassero anche fra il Permiano ed il Retico, che secondo il Lotti si seguono per lungo tratto dalla Valle del Guappero, ad Uliveto ed oltre, od anche fra lo stesso Permiano ed il Lias inferiore, che realmente sono a contatto nella Valle del Guappero, a poco più di un chilometro dalle Mulina. Ed importante e concludente sarebbe anche stato, come infatti avrebbe dovuto accadere, il fatto di aversi sopra tali discusse formazioni, se triasiche, quelle che nei luoghi vicini le seguirebbero in perfetto ordine cronologico, e cioè; calcari retici ad *A, contorta*, calcari ceroidi ettangiani, calcari rossi ammonitiferi sinemuriani, calcari grigi con selce domeriani, calcari marnosi a *P. Bronni* ecc. Ma queste cose non avvengono e fanno pensare che quei famosi fatti correlativi, anzichè mancare a sostegno delle mie resultanze paleontologiche, manchino invece in appoggio della spiegazione tettonica escogitata dal Lotti.

La successione dei terreni nella parte settentrionale del M. Pisano da me ammessa non diversifica da quella del Lotti che per l' aggruppamento e l' apprezzamento cronologico di alcuni membri.

Sopra al Lias inferiore (15, 14, 13), al Lias medio (12), ed a quello superiore (11)

si trovano, talora in forte trasgressione, i calcari bianchi e grigio chiari con selce (10), detti picchiettati per la loro caratteristica apparenza, data da speciali punteggiature spatiche, che il Lotti ritiene titonici, ma che potrebbero essere invece Calloviani, e sopra a questi i diaspri e gli scisti rossi (9), nei quali il Canavari trovò aptici caratteristici. Viene poi la serie che dirò esotica del Lotti, costituita da quattro membri. Il più profondo di questi è dato da scisti rasati, talvolta calcariferi, grigi e verdastri, spesso violacei (8), nei quali si trovano quelle curiose concentrazioni dette *Siphonites*, tanto frequenti nelle stesse formazioni delle Alpi Apuane, e nei quali si hanno lenti più o meno estese di quei calcari bianco perlati o verdolini scistosi (cipollini) citati superiormente. Il Lotti tiene riunito a questa formazione il Verrucano di Rupe Cava; ma questo, essendo indiscutibilmente superiore ed anche nettamente distinto litologicamente, è invece meglio collegato e connesso con il Pseudomacigno e con gli scisti ardesiaci alternanti (7), che il Lotti tiene separato da ogni altro terreno. Io ritengo che gli scisti (8) che seguono gradualmente i diaspri titoniani sieno pure titoniani e tale riferimento è avvalorato dal fatto della loro sottoposizione al Verrucano che per le ragioni che vado esponendo deve considerarsi wealdiano. Come succede ovunque si abbia il Verrucano, ritenuto da altri tipico o no, permiano (pars), triasico o cretaceo, o che si chiami Pseudoverrucano ecc., anche nella parte settentrionale del M. Pisano segue ad esso, con graduale passaggio e con evidentissima connessione, la formazione tanto rammentata degli scisti argillosi rossi con diaspri a radiolari (6), da alcuno mai fatta fin qui rilevare, che non può considerarsi altrimenti che quale membro superiore della formazione wealdiana, per quanto essa faccia pure passaggio graduale ed insensibile alla superiore formazione calcare che bene spesso comincia con calcari cavernosi rossi, sideritici, talora diasprini. Al suo posto il Lotti pone i calcari a lastre *k* ed in realtà, come a Caprona ed in qualche luogo presso Asciano, essi si trovano alla base della formazione calcare cavernosa, fra questa ed il wealdiano; ma non capisco quale importanza abbia la citazione loro nella formazione delle Mulina fatta ora dal Lotti, quando non vi sono realmente rappresentati e quando essi non possono considerarsi che una delle tante forme con cui si presenta il complesso del calcare cavernoso. Il fatto di essere calcari divisibili più o meno a lastre non avrà certo valore cronologico, come parrebbe essere nell' intenzione del Lotti, ed in ogni modo la corrispondenza cui parrebbe volesse dar valore il Lotti, fra calcari a lastre, cioè, del M. Pisano e quelli molto noti delle Alpi Apuane, non sarebbe mai ammissibile, poichè là anzichè sopra si troverebbero sotto alla formazione Verrucana corrispondente.

Termina la serie delle così dette formazioni delle Mulina il complesso del calcare cavernoso (5), che stando tra Wealdiano e Neocomiano superiore può ragionevolmente riferirsi al Neocomiano medio. In questo complesso si trovano dei calcari organogeni, costituiti da corpiccioli tubuliformi che hanno grande apparenza di *Serpulae,* ciò che farebbe correre il pensiero alla Serpulite, roccia purberkiana, costituita da ammassi di *Serpula coacervata,* che accompagna il Wealden dell' Hannover. Anche nelle Alpi Apuane si trovano calcari con simili fossili (1), ma non è da credersi che si tratti della stessa formazione. Al M. Pisano essa sta in ogni modo sopra il Verrucano di Rupe Cava, che anche nell'idea del Lotti sarebbe sempre superiore ai marmi delle Alpi Apuane; qui si trova invece alla base dei marmi stessi.

---

(1) LOTTI. *Un problema stratigrafico nel M. Pisano.* Loc. cit.

Senza che si scopra alcuna manifestazione di discontinuità, ai calcari descritti succede una formazione di diaspri grigi (4), che il Lotti, molto arbitrariamente, come ho spiegato in addietro, ritiene titoniani, ma che sono in modo assoluto e più intimo collegati ai soprastanti calcari maiolica (3). Questi infatti si sviluppano da quelli per alternanze di strati silicei, da prima prevalenti, con strati calcari, predominanti dopo, gradualmente resi privi di qualunque vestigia di selce. Poichè tali calcari maiolica in altre località vicine fornirono *Aptichus angulicostatus* ed *A. Didayi*, che ne indicano la età neocomiana superiore, io ritengo che anche nel M. Pisano siano da riferirsi a questa e vi riferisco pure i diaspri (4). L' eocene (2) (1), seguente, non ha alcuna importanza per la questione discussa.

Ma vediamo ora come stanno le cose nei Monti di Oltre Serchio in rapporto alla successione dei terreni dal Lias superiore al calcare Maiolica ed alle corrispondenze con quelli del M. Pisano, che racchiudono uno dei principali nodi di divergenze fra me e l'egregio Ing. Lotti.

Egli pone anche colà, sopra al Lias superiore, dei calcari stratificati grigi cupi con selce *e*) e li fa corrispondere ai calcari picchiettati del M. Pisano, commettendo due sostanziali errori d'interpetrazione e di fatto. D'interpetrazione perchè essi non corrispondono nè possono farsi corrispondere certo ai calcari picchiettati; di fatto perchè non succedono al Lias superiore, ma al Wealdiano o, se non vuolsi tale espressione, a roccie verrucane sovrastanti al Titonico ed al Lias superiore.

I calcari picchiettati rappresentano una formazione estremamente caratteristica e che si trova solo al M. Pisano e nei Monti di Casciana. Il farvi corrispondere i calcari grigi cupi con selce dei Monti di Oltre Serchio è del tutto arbitrario e lo ammette implicitamente anche il Lotti, quando nel suo prospetto pone rimpetto ad essi non il consueto *idem,* ma la citazione di una roccia differente. I calcari picchiettati sono quasi sempre bianchi, subcristallini, non bene stratificati, quelli invece si presentano grigio-cupi e benissimo stratificati; i primi sono trasgressivi, cominciando con un conglomerato, anche ad elementi molto grossi, i secondi si trasformano gradatamente dagli scisti argillosi rossi con diaspri e succedono alle altre roccie verrucane. Già Savi e Meneghini ritennero quel che ritengo io che, cioè, i calcari grigio cupi con selce dei Monti di Oltre Serchio corrispondessero ai consimili calcari del M. Pisano, che fanno parte del complesso cavernoso neocomiano.

I calcari in discussione non succedono immediatamente al Lias superiore, ma a questo segue: da prima, in mancanza dei calcari picchiettati, una formazione diasprina grigio verdastra, (9) che io ho trovato sulle falde N. O. del M. Bastione e che per il suo aspetto e per la sua posizione non può riguardarsi che come titoniana, e poi, mancando probabilmente gli scisti rasati varicolori (8), il Wealdiano, caratterizzato, oltre che per la sua posizione e per le sue roccie, simili specialmente a quelle della valle delle Mulina ed in generale del M. Pisano settentrionale, anche per la nota condizione di essere rappresentato dai soliti due membri, delle roccie verrucane (7), cioè, e delle argille rosse con diaspri (6).

Quei calcari non possono dunque esser fatti corrispondere in alcun modo ai calcari picchiettati; ed allora non possono che riferirsi al complesso cavernoso (5) del quale hanno i caratteri litologici e quelli stratigrafici, essendo interposti, cioè, tra gli scisti argillosi rossi con diaspri wealdiani e la formazione diasprina (4) che anche colà si trasforma gradatamente nella calcare (Maiolica) del n. 3.

Concludendo; dimostrata la corrispondenza della serie cronologica dei terreni dei Monti di Oltre Serchio con quella del M. Pisano, deve ragionevolmente escludersi il carreggiamento delle formazioni delle Mulina ed io ritengo che il LOTTI non vi insisterà ulteriormente. Domandando allora all'egregio Ingegnere, quale posizione cronologica assegnerebbe al Verrucano di Rupe Cava e della valle delle Mulina, egli non potrebbe rispondere altrimenti che al Neocomiano inferiore, poichè sta fra i diaspri con Aptici titoniani ed il Neocomiano superiore ad *A. angulicostatus* ed *A. Didayi* e dovrebbe anche ammetterne (e perchè no?) la corrispondenza col suo Pseudoverrucano cretaceo. E poichè il Verrucano di Rupe Cava fu riconosciuto litologicamente identico a quello tipico della vicina Verruca ed il Pseudoverrucano è resultato identico al Verrucano tipico del vicino M. Argentario, essendo tutti, compreso il Verrucano creduto triassico delle Alpi Apuane e della Liguria, ovunque e sempre seguiti dai calcari cavernosi ecc., con la interposizione immancabile, l'ho detto tante volte, della formazione argillosa rossa con diaspri a radiolarie, come vorrebbe fare egli a non riconoscere che tutti questi diversi Verrucani sono una cosa sola ed a svalutare i fossili da me trovati in quello tipico della Verruca che, ripeterò ancora una volta, non fanno che documentare l'età resultante stratigraficamente per il Verrucano di Rupe Cava, quando, per giunta, io sono sempre pronto a fargli osservare, sui monti di S. Giuliano, lembi di Verrucano tipico che stanno sopra il Lias e che servono da mirabile e sicuro tratto di unione tra il Verrucano della Verruca a quello di Rupe Cava?

## PARTE II.

Per quanto sia superfluo, dopo le cose fin qui scritte, dirò ora due parole di risposta al Prof. DE STEFANI (1) che, dopo avermi dato ragione dell' età del marmo giallo di Siena e specialmente dell' insussistenza del carreggiamento delle formazioni delle Mulina, voluto dal LOTTI, per cui egli (2) ebbe a scrivere, " occorre tornare al primo modo di vedere del SAVI „ faccia a me colpa di quel che anche egli ha creduto e dica ora, giudicando errate le mie attuali concezioni, che il FUCINI " nel considerare la geologia del M. Pisano ed in generale della Toscana è mosso del concetto di restaurare gli ordinamenti di SAVI e MENEGHINI anteriori alla pubblicazione della loro Geologia della Toscana del 1861. „ Ma che io sappia nè SAVI, nè MENEGHINI, nè altri ebbero mai a manifestare l' idea o la più lontana ipotesi dell' età cretacea o wealdiana del Verrucano della Verruca da me ora sostenuta e che rappresenta il nocciolo delle attuali discussioni. In ogni modo io son mosso dal desiderio obiettivo di far conoscere più che sia possibile la verità, senza farmi trascinare da preconcetti.

(1) DE STEFANI. *Escursione geologica da Buti a Calci nel Monte Pisano.* Mem. d. soc. tosc. d. Sc. nat. Vol. XXXII.

(2) DE STEFANI. *Di alcuni carreggiamenti locali* ecc. Loc. cit. p. 488.

Egli si trattiene a descrivere la puddinga del Verrucano tipico, generalmente conosciuta e distinta col nome di Anagenite, e nella sezione rappresentata dalla fig. 1 le assegna una giusta posizione, (*b*) intermedia, cioè, tra due formazioni scistose (*a*). La dice però sottostante alle quarziti ed alle filladi del Carbonifero superiore, stefaniano, fossilifero, della Valle del Guappero, il che non è, e poichè ritiene che gli strati con i fossili wealdiani da me studiati sieno inferiori alle puddinghe, anche per aver incontrato fossili, secondo lui identici ai miei, nella Valle di Buti, in roccie appunto sottostanti alla puddinga stessa, ne deduce, a base delle sue argomentazioni, che i miei " fossili non possono appartenere alla Creta, non potendo essere più recenti del Carbonifero superiore. „

L' errore iniziale e sostanziale del De Stefani, già da tempo enunciato (1), consiste dunque nel credere che le filliti carbonifere e permiane provengano dagli scisti superiori alle puddinghe, e che i miei fossili sieno invece raccchiusi negli scisti inferiori a quelle stesse puddinghe; mentre è semplicemente il contrario.

La puddinga del Verrucano tipico, nella Valle del Guappero, sta sopra all' Antracolitico fossilifero, ed il Canavari (2) fu il primo a riconoscerlo, seguito immediatamente dal Lotti (3) e poi dal Capellini (4).

Tale rapporto di giacitura resulta anche per la corrispondenza che se ne ha ad Iano, ove fu già riconosciuto da Savi e Meneghini (5) e noto per altri lavori del Lotti (6). Non si capisce perchè il De Stefani non lo riconosca, mentre ammette (pag. 18) la corrispondenza della puddinga in discussione del M. Pisano con quella di Iano, ove asserisce star sopra al deposito antracolitico con fossili.

Io ritengo che la roccia discussa, al cui livello corrispondono talora roccie meno grossolanamente elastiche, sia quella con la quale si iniziò la deposizione del Verrucano tipico, segnando la trasgressione wealdiana, che talora è a contatto con le roccie antracolitiche, dalle quali ebbe in gran parte gli elementi costitutivi, con la dovuta cernita dei più resistenti, e bene spesso adagiata sopra una formazione scistosa arenacea rossastra, che potrebbe appartenere al Rothliegendes e magari ai Werfener-Schichten.

I fossili studiati da me provengono indubbiamente dai banchi quarzitici scistosi superiori alle puddinghe ed è in errore anche il Lotti (7) che ritiene diversamente per quelli trovati da lui ai Tre Colli, nell' alta valle di Castelmaggiore, sopra a Calci. Tale errore proviene da inesatta interpretazione tettonica della regione per la quale De Stefani e Lotti ritengono che l' intiera valle di Calci sia una valle di erosione, per cui nel profondo di essa, ove si trovano appunto i Tre Colli, vengano a giorno i terreni più antichi. Ma se questo è giusto per l' ultima porzione di tale valle cioè per quella che si apre avanti a Montemagno, non è vero affatto per quella superiore al di là di Castelmaggiore. Qui si ha

---

(1) DE STEFANI. *Fossili paleozoici dell' Isola d' Elba.* Rend. R. Accad. dei Lincei Vol. XXIII, S. 5 p. 912

(2) CANAVARI. *Due nuove località nel Monte Pisano ecc,* Loc. cit. 1891.

(3) LOTTI. *Due parole sulla posizione stratigrafica della flora fossile del Verrucano nel M. Pisano.* Boll. R. Comit. geol. 1891.

(4) CAPELLINI. *Note esplicative della carta geologica dei dintorni del golfo della Spezia e val di Magra inferiore 1902.*

(5) SAVI e MENEGHINI. *Considerazioni sulla geologia della Toscana,* pag. 11, 12.

(6) LOTTI. *Alcune osservazioni sui dintorni di Iano presso Volterra,* Boll. Comit. geol. V. X; e *Geologia della Toscana* loc. cit.

(7) LOTTI. *Geologia della Toscana.* Loc. cit. pag. 9.

una conca tettonica evidentissima; gli strati del Verrucano tipico inclinano da ogni parte verso il fondo della valle, ove, naturalmente, si trovano in basso i medesimi strati che si hanno alla periferia in alto. Così ai Tre Colli si trovano gli stessi banchi fossiliferi, con gli stessi scisti quarzitici verdastri della vetta dello Spuntone di S. Allago.

Il De Stefani, seguendo il modo di vedere del Lotti, tiene riuniti nello stesso piano, che per lui è però cretaceo, gli scisti rasati paonazzi, grigi e verdastri con il Pseudomacigno e dice di aver trovato gli uni e l'altro sul poggio di Caprona, imputando a me di riportarli indistintamente al Verrucano (pag. 24). È vero che un tempo ebbi questa opinione, influenzato dalla riunione fatta dal Lotti, ma in quanto agli scisti, già da qualche anno, sono stati da me (1) tenuti separati e riportati al Titonico superiore, ciò che ritengo ancora giusto, ed in quanto al Pseudomacigno, credo ancora che esso non sia che una delle tante modalità rocciose con cui si presenta il Verrucano tipico, tanto è vero che questo è costituito anche da quello sulle pendici del M. della Fontana, guardanti la valle del Guappero.

Si capisce come io non possa ammettere facilmente che gli scisti rasati varicolori possano trovarsi nel poggio di Caprona, poichè per me la loro giusta posizione è sotto il Verrucano della Verruca, e, per quanto questo sia rappresentato su quel poggio, al di sopra delle formazioni liasiche, dal Pseudomacigno e forse da scisti tipici presso la T. Upezzinghi, non potrebbe tanto pianamente spiegarsi la loro presenza colà, mentre pare sicura la loro mancanza a poca distanza al di sotto del Verrucano tipico. In altri termini la formazione che ricoprì trasgressivamente, ma in diverso modo, tanto il Retico ed il Lias di Caprona, quanto il Paleozoico della profonda valle di Montemagno, al quale quelli erano addossati, non è quella titoniana degli scisti rasati varicolori, bensì la wealdiana. Gli scisti rasati varicolori non si trovano che nella parte settentrionale del M. Pisano e seguono esattamente e sempre la formazione diasprina titoniana. Già abbiam visto, discutendo con il Lotti, che essi non si hanno nemmeno nei pressi di S. Lorenzo a prender parte alla trasgressione del Wealdiano con l'Antracolitico di Villa Massagli, determinata appunto fin da là dal Pseudomacigno verrucano e dalla superiore formazione degli scisti argillosi con diaspri. Ma se il De Stefani cita sul poggio di Caprona degli scisti connessi col Pseudomacigno, vuol dire che ve li ha effettivamente osservati, ed io non posso allora che fare rilevare che il riferimento dell' illustre professore non può che riguardare la formazione scistosa-argillosa rossastra con diaspri, ora e per l' avanti tante volte ricordata, ed a questo modo di vedere sono tanto più condotto dalla dichiarazione che il De Stefani fa, di avere, cioè, un tempo, osservato tali scisti sopra al Lias del poggio su cui è costruita la villa Bosniaski a S. Giuliano, ove appunto è assai sviluppata quella formazione.

Il De Stefani nella sezione che disegna a traverso il M. Pisano (fig. 1), partendo dal concetto della indivisibilità del complesso Verrucano, pone le puddinghe e gli scisti superiori quindi il mio Wealdiano, sotto al Retico di Caprona, al quale fa fare un sinclinale il cui nucleo sarebbe occupato da roccie liasiche e cretacee, presso a poco come in una precedente sezione (2), ove la verità fù però più rigorosamente osservata, in quanto che l'Infralias a S. O. del poggio vi è fatto pendere verso la pianura. Ad un esame non molto minuzioso può infatti sembrare che il Verrucano della Verruca, immergendosi a S. O. lungo il Rio di

(1) Fucini. *Cenni preventivi sulla geologia del M. Pisano*, Loc. cit.

(2) De Stefani. *Sopra alcuni carreggiamenti locali ecc.* Loc. cit. fig. 2.

Crespignano, vada sotto al Retico della Cava Cubbe, ma è ben dubbio che questo faccia il sinclinale voluto dal De Stefani. Fra il Retico e Verrucano tipico s'interpongono certo formazioni più recenti, liasiche e cretacee, quest' ultime specialmente a contatto con quelle wealdiane.

Nel poggio sopra il podere del Palazzaccio comparisce realmente il calcare rosso del Lias inferiore (Sinemuriano), ma non vi occupa il centro di alcun sinclinale; evidentemente ricoperto ad E. dal calcare cavernoso, è a contatto ad O. con i calcari retici, che sembrano anzi ricoprirlo senza che vi abbia fra mezzo il calcare ceroide del Lias inferiore più profondo (Ettangiano) che a pochi passi, ancora più ad O. e verso Caprona, ricopre effettivamente il Retico stesso. I relativi contatti non possono seguirsi che per breve tratto, in quanto che tutte quelle varie formazioni, Verrucano compreso, sono ricoperte o dagli scisti argillosi rossi con diaspri e più generalmente da un mantello sottile, ma ben poco discontinuo, di roccie neocomiane del complesso cavernoso, cui si uniscono breccie spugnose quaternarie con travertini, spesso ricordate in addietro.

Bisogna ammettere che durante o prima della deposizione wealdiana qualche fenomeno tettonico, una faglia inversa p. e., dovette mettere il calcare rosso a contatto col Retico e non è improbabile che tal fenomeno fosse connesso a qualche altro più grandioso quale potrebbe essere stato quello dello scivolamento della scogliera retica e liasica per la ripida scarpata littorale prodottasi per l'abbassamento assai rapido della regione ad E., primieramente occupata dal Paleozoico, e che andava ricevendo i depositi del Verrucano tipico.

Il De Stefani svolgendo in ambedue le sue sezioni il sinclinale su ricordato farebbe però ricomparire il Retico delle falde occidentali del poggio di Caprona, ove è sempre ed abbondantemente fossilifero, sulle pendici orientali, ponendolo ad immediato e superiore contatto col Verrucano della Verruca. Non posso escludere che tale contatto possa limitatamente osservarsi, ma il fatto è che in generale il Verrucano è colà ricoperto, pur non tenendo conto della formazione argillosa rossa, da calcari del complesso cavernoso, compresi i calcari a lastre, di tipo triasico se vuolsi, ma mai forniti di fossili.

Altri contatti più manifesti si scorgono tra il Verrucano o, meglio, tra il wealdiano e le formazioni secondarie del poggio tra Caprona ed Uliveto, ma sono del tutto a vantaggio della mia tesi.

Per la valle del Rio di Focetta, presso Noce, il Wealdiano va ad urtare infatti contro il calcare ceroide di Lias inferiore, quindi, fatto riconosciuto anche dal De Stefani che non gli dà però l'importanza dovuta, senza l'interposizione del Retico, che trovasi poco distante ad O., come normalmente dovrebbe accadere se quel Verrucano fosse permiano; e, ciò che è ancor più strano, alla Focetta esso urta contro il Lias medio, senza l' interposizione nè di Retico nè di Lias inferiore, sia ceroide che rosso ammonitifero, sviluppati tutti a breve distanza ad O., cioè dalla parte opposta del Verrucano wealdiano.

La formazione argilloso-diasprina, che ha capitale importanza in queste questioni, e che nelle pagine precedenti di risposta al Lotti ho detto coronare tanto il Verrucano tipico della Verruca o del M. Argentario o dell'Elba, direi anche di Cairo Montenotte, come quello di Rupe Cava e dei Monti di Oltre Serchio, od il creduto triassico delle Alpi Apuane, come pure il Pseudoverrucano del Lotti, e che funge da terreno di passaggio tra Verrucano ed il complesso cavernoso, si trova anche fra Noce ed il Rio di Crespignano e vi

(1) DE STEFANI. *Di alcuni carreggiamenti locali ecc.* Loc. cit. pag. 420.

ha notevolissima importanza. Essa infatti, pur facendo evidentemente parte integrale del Verrucano della Verruca, dopo essersi addossata, ricoprendolo anche parzialmente, al Lias inferiore ceroide di Noce, sale verso la Focetta, e, mentre prima di giungere a quella casa colonica urta contro le testate del Lias medio, oltrepassatala, ricopre molto evidentemente il Lias medio medesimo. Si può obiettare : ma come può sparire alla Focetta il Verrucano che trovasi a pochi metri di distanza addossato, come ho detto, al Lias medio mentre avrebbe dovuto trovarvisi sopra e prima della formazione argilloso diasprina? Precisamente come sopra ad un isolotto subacqueo non si formano e spariscono i depositi clastici anche se voluminosi od abbondanti che si adagiano nel fondo circostante, addossandoglisi lateralmente. Del resto nel poggio tra Uliveto e Caprona il Verrucano wealdiano vi è rappresentato dal Pseudomacigno e presso la T. Upezzinghi, pare, anche da veri e propri scisti.

Il De Stefani (pag. 24) ritiene che le formazioni secondarie " succedono al Paleozoico in trasgressione di tempo bensì, ma con perfetta concordanza e con certa copertura, contrariamente all' opinione del Fucini. „ Ma la questione sta che nel Paleozoico del De Stefani una parte è Wealdiano. Per intendersi, io ritengo che la tettonica di quelle formazioni abbia risentito principalmente di due fasi, una assai precedente alla deposizione titoniana ed una immediatamente posteriore. Per quella precedente i terreni secondari successero al Paleozoico forse con trasgressione di tempo minore di quel che ritiene il De Stefani—penso alla possibilità che gli scisti rossastri spesso arenacei che stanno immediatamente sotto al Verrucano tipico e sopra all' Antracolitico fossilifero siano Werfeniani — dando luogo, nel M. Pisano settentrionale, a quattro elissoidi, le cui parti centrali visibili, astraendo dall'Antracolitico, sono sempre occupate dal calcare ceroide di Lias superiore, erose generalmente ad E., e nel M. Pisano meridionale ad altre tre o quattro elissoidi, estendentisi fra la Valle di Asciano ed il Castellare di S. Giovanni alla Vena, maggiormente sbriciolate ed erose delle altre, i cui centri visibili sono dati da roccie retiche. Per la fase posteriore al Titonico ritengo che il Wealdiano ed il Neocomiano medio (calcari cavernosi ecc.), per l' abbassamento rapido delle formazioni paleozoiche e secondarie, ad oriente e a mezzogiorno del M. Penna e di S. Giuliano, fino a S. Giovanni alla Vena, per un pezzo state emerse e denudate, si poterono indifferentemente depositare in trasgressione sopra quelle diverse formazioni. Il Verrucano, formazione clastica per eccellenza, si dispose anche fuori del M. Pisano, di preferenza al fondo delle valli primitive, generalmente occupate da scisti antichi, come morfologicamente doveva essere avvenuto, e non si depositò che raramente, e magari con sedimenti un poco differenti, sopra le elevaziani costituite da calcari triassici o liassici, erose e frantumate, che erano rimaste come isolotti più o meno subacquei. Alla base di questi il Verrucano, insieme, talora, con le successive formazioni, compreso il calcere cavernoso ecc., acquistò l' apparente sottomissione stratigrafica a quei calcari secondari, che talora, non si può escludere, gli saranno stati anche sospinti addosso o scivolati sopra, come ho detto addietro. Piccole o grandi barriere dovettero anche isolare, completamente o no, bacini più o meno estesi, nei quali il wealdiano si dovette depositare con caratteri non sempre e perfettamente di Verrucano tipico.

Alle varie e strane condizioni di sedimentazione del Verrucano si devono le strane condizioni che esso ora presenta, fra le quali i cambiamenti litologici, il grande assottigliamento e magari la sparizione completa, anche in luoghi vicinissimi, sono le più appariscenti ed impressionanti. Il Welden tipico, costituito pure da conglomerati, da quarziti e da scisti, presenta le stesse stranezze stratigrafiche.

Per l'ulteriore abbassamento della regione, denunziato e dimostrato dal fatto che gli ultimi depositi del nostro Verrucano, scisti e argille rosse con diaspri a radiolari, sono di mare profondo, anche sopra quegli isolotti si poterono depositare e gli scisti e le argille con diaspri e specialmente, uniti o no ai precedenti, i calcari cavernosi ecc. Questi ora, bene spesso, come al M. Penna e nei Monti di S. Giuliano, spalmano sottilmente le formazioni liasiche, circondandone le pendici e modellandovisi perfettamente, con pendenza di strati corrispondente a quella delle falde montuose. Si era pertanto determinato a Sud un movimento positivo per cui ai calcari del complesso cavernoso, che già appaiono di mare meno profondo delle argille con diaspri del wealdiano superiore, anche per contenere Brachiopodi, Serpule, Pentacrini, non seguirono altre deposizioni secondarie più recenti ed il Verrucano della massa principale rimase libero da ogni altro deposito posteriore. A Nord, al Verrucano della valle delle Mulina e di Rupe Cava, seguirono normalmente dopo il complesso del calcare cavernoso, i diaspri successivi e quindi il calcare grigio chiaro con selce (Maiolica) del Neocomiano superiore e per ultimo l' Eocene, in trasgressione sul precedente.

Nei monti di oltre Serchio si ripete in piccolo il fenomeno trasgressivo del M. Pisano, determinato dal Wealdiano, ma mentre quì la formazione che lo determina è quella del Verrucano tipico ed il terreno più antico che lo sopporta è il Paleozoico, colà la formazione che trasgredisce è quella del wealdiano superiore, cioè gli scisti argillosi rossi con diaspri, ed il terreno più antico che lo sopporta è il calcare ceroide del Lias inferiore. Tali scisti argillosi, ad Ovest di quel gruppo montuoso, fanno infatti parte concorde delle formazioni che in serie normale si succedono oltre il M. Bastione e la Valle di Radicata, ad Est ricoprono invece indipendentemente e saltuariamente il Lias medio e l'inferiore suddetto, seguiti tanto da una parte che dall' altra dai calcari del complesso cavernoso.

Come ho poi spiegato nelle pagine precedenti di risposta al Lotti, il Verrucano tipico delle parte meridionale del M. Pisano è collegato a quello di Rupe Cava per mezzo di numerosi lembi interposti, alcuni con roccie veramente tipiche, quali ad esempio quelle che al M. Aguzzo, nell' alta valle delle Mulina, stan sopra agli scisti rasati varicolori del Titonico superiore e più specialmente quelle che, sul poggio di Caldaccoli presso S. Giuliano, stan sopra al Lias medio, o le altre che, ad O. del paese di Cotrozzi, riposano sul calcare ceroide di Lias inferiore, oppure quelle che stan sopra allo stesso ceroide sulla cima del M. Cotrozzi, a metà d' altezza delle falde sud-orientali del M. Penna, ovunque accompagnate dalla solita formazione argillosa-rossa con diaspri.

Tornando un passo indietro, il De Stefani ritiene dunque che gli scisti con le note flore antracolitiche della valle del Guappero, che secondo lui starebbero colà sopra alle puddinghe, corrispondano a quelli che nelle sue sezioni stanno fra i banchi della puddinga stessa (*b*) ed il Retico (*c*), precisamente quindi a quelli che a me hanno dato i fossili wealdiani. Ma che tale relazione non può sussistere è dimostrato anche da diversi fatti più o meno indiretti. Un primo di questi, ammesso implicitamente dal De Stefani stesso nella descrizione che fa (pag. 18) della puddinga del poggio di Iano nel fiorentino, consiste nella riconosciuta corrispondenza di tale roccia con quella del M. Pisano, mentre è notorio che essa è colà sovrapposta agli scisti scuri carboniosi, aventi la nota flora tutt' al più del Carbonifero superiore come la nostra della Traina e di Villa Massagli. Per un altro fatto quegli scisti superiori, e lo riconosce anche il De Stefani (pag. 18), non hanno alcuna di quelle filliti che sono invece comunissime nel vero Paleozoico della valle del Guappero e se le hanno, aggiungo io, o sono di tipo prettamente wealdiano, come quelle notate da me, o

*Araucarites*, come l'impronta trovata ad Asciano dal De Bosniaski (1) e che potrebbe essere anche un *Brachyphyllum* (2), oppure *Baiera* o *Ginkgo*, come quelle da me osservate in un grosso blocco di quarzite grossolana, ruzzolato dalla Verruca fino al Rio di Noce, non potute estrarre in alcun modo, e delle quali non feci fino ad ora parola perchê non mi è mai piaciuto far citazioni senza poterle documentare con gli esemplari. Posso, però, dire che erano riconoscibilissime e fossilizzate in sostanza giallo — rossastra limonitica. Prima o poi saranno certo osservate anche da altri. Un terzo fatto consiste nella trasgressione palese delle puddinghe con gli scisti sopra ai quali riposano, resultante anche dalle descrizioni del De Stefani, il quale, mentre parla delle formazioni superiori, ne descrive giustamente un andamento stratigrafico poco disturbato e, quando si riferisce ai terreni veramente antichi, ne constata invece (pag. 23) una minore stabilità stratigrafica, rilevando anzi, per quelli fra S. Bernardo e S. Antonio presso Calci, anche un andamento assai contorto (pag. 22) e per quelli della valle di Buti (pag. 15) una differenza morfologica.

E noto che ad Iano gli scisti inferiori antracitiferi con fossili sono ugualmente più contorti e ripiegati di quelli superiori (wealdiani) che, si è perfin detto, contrastano per la loro regolarità. Tale trasgressione è, del resto, dimostrata anche dal fatto, già citato in addietro, che tutte le sorgenti più copiose, che si trovano intorno al M. Pisano, compariscono al contatto tra il Wealdiano, come lo intendo io, e gli scisti sui quali riposa.

Un altro fatto, di natura litologica, che contrasta col modo di vedere del De Stefani e che estende la trasgressione ora notata anche in rapporto al Lias, si osserva a S. Maria del Giudice ove, al contatto tra il Verrucano tipico ed il calcare ceroide di Lias inferiore, si ha una breccia costituita da ciottoli di quel calcare, impastati da materiale scistoso verrucano, i quali, ben s' intende, sono più grossi e numerosi a ridosso dalla formazione liasica che non un poco più lunghi verso la verrucana, ove divengono più sottili e rari, per modo che la roccia, cambiatasi da prima in una specie di calcescisto, finisce per trasformarsi, ad assai breve distanza dal primitivo contatto, nello scisto tipico verrucano, senza l' ombra di calcare. Un ultimo fatto, che non si accorda con la corrispondenza voluta dal De Stefani, riguarda gli scisti rossastri, spesso arenacei, sui quali riposano quasi sempre i banchi delle puddinghe wealdiane e che io riterrei caratteristicamente riferibili al Rothliegendes, senza escludere del tutto la loro pertinenza ai Werfener - Schiefer, i quali sono precisamente gli stessi che nella valle del Guappero succedono immediatamente ai più alti strati con filliti paleozoiche.

Penso che possano provenire da tale formazione " le grosse ghiaie lentiformi (galets) di scisto prevalentemente rossastro „ che il De Stefani (pag. 16) dice di aver trovato fra gli elementi della puddinga quarzosa (Wealdiano) della parte O. del M. Pisano appartenente al territorio lucchese.

Credo utile avvertire inoltre che non sono questi gli scisti che il Tommasi (3) trovò somiglianti ai Werfener - Schiefer delle Prealpi Lombarde, in quanto che egli intendeva riferirsi a quelli che al M. Verruca stanno sopra alle puddinghe ed apparentemente sotto all' Infralias, cioè a quelli che mi dettero i noti fossili wealdiani.

(1) LOTTI. *Serie stratigrafica dei M. Pisani fra il Lias sup. e l' Eocene.* Proc. verb. foc. tosc. sc. nat. 1883.

(2) FUCINI. *Fossili wealdiani ecc.* Loc. cit.

(3) TOMMASI. *Sulle roccie scistose e clastiche inferiori all' Infralias nel gruppo della Verruca* — Proc. Verb. soc. tosc. sc. nat. 1883.

Le piccole bivalvi incontrate dal De Stefani a Panicale sembrerebbero provenire dalla formazione in discussione e sarebbe utile poterle paragonare non solo con le mie *Cyrenae*, ma anche con le *Estheriae*, indicate in Liguria in terreni attribuiti al Trias inferiore, che alla lor volta sarebbe bene paragonare con le mie *Cyrenae*. Da tali confronti potrebbe risultare una corrispondenza tra le bivalvi di Panicale con le *Estheriae* liguri, se queste sono veramente triassiche e quelle dei terreni sottostanti alle puddinghe, oppurre una corrispondenza delle *Estheriae* liguri con le mie *Cyrenae*, se gli scisti che racchiudono quelle fossero da attribuirsi al Verrucano tipico anzichè al Trias inferiore.

In quanto alla puddinga che io altra volta (1) citai al M. Bastione, nei Monti di Oltre Serchio, ed alla quale ho accennato nella discussione precedente con Lotti, da me attribuita al Verrucano wealdiano e della quale il De Stefani (pag. 19) dice esser piuttosto una brecciola irregolare di elementi diasprini rossi, in parte trasformati in quarzo, posso assicurare che resulta invece di ghiaiottoli, più o meno arrotondati e sparsi in una pasta quarzitica ferrugginosa, costituiti da quarzo roseo o bianco o grigio, alcuni con venette di sostanza ferruginosa anteriori alla loro formazione e taluni, assai piccoli, di una roccia silicea nera, molto probabilmente tormalinolite. Non conosco colà, la roccia cui allude il De Stefani; l'ho vista quasi simile nel poggio di Caprona ove parvemi, però, molto recente.

Credo utile far notare ora che il ciottolo di diaspro rosso a radiolarie, presumibilmente titonico, che io trovai incluso nella quarzite scistosa della formazione fossilifera wealdiana di Agnano ed al quale ho pure accennato in addietro, se contrasta con le idee del Lotti, che non sdegnerebbe di mettere nel Trias la parte superiore del Verrucano tipico, tanto più non si può accordare con le idee del De Stefani che crederebbe che i miei strati fossiliferi non fossero più recenti del Carbonifero superiore. Vorrebbe dire che la formazione diasprina a radiolari, da cui fu staccato quel ciottolo, dovrebbe essere stata devoniana o quasi, il che è difficile ad ammettersi, tanto più che le forme dei radiolari sono di tipo recente ed identiche a quelle dei diaspri titoniani ed anche di quelli wealdiani e senza contare il fatto della completa assenza di metamorfismo in quel piccolo frammento roccioso.

Riguardo ai fossili non posso dire al De Stefani che quel che ho detto al Lotti. È ozioso discuterne senza i campioni sott' occhio. Ricorderò solo che una volta al Meneghini ed a lui (2) sembrarono non avere carattere paleozoico e che un altra volta egli (3) li giudicò di tipo terziario assolutamente. Ora ammette (pag. 21) il fatto, per me notevolissimo che essi " non hanno rispondenza negli strati carboniferi marini, con multiformi molluschi, dell' Isola d' Elba e di Iano, per non dire di altri luoghi d' Italia più lontani. „ Ma questo fatto è ben strano, trattandosi di faune e dirò anche di flore, secondo il De Stefani dello stesso piano geologico, di luoghi singolarmente prossimi, e metteva ben conto che egli si fosse trattenuto a spiegarlo.

Il De Stefani (pag. 24) mi fa carico di riferire all' Infralias ed al Paleozoico solamente certi punti, prettamente locali, nei quali si trovano fossili infraliassici o paleozoici. In quanto all' Infralias, vi è ben poca discrepanza fra noi; anche egli ritiene ora che fra S. Giuliano e S. Giovanni alla Vena sia molto meno sviluppato di quel che prima si credesse; anche egli riconosce ora che molto di esso non è che Lias inferiore e che i calcari cavernosi di là non sono retici, ma cretacei; ed in quanto al Paleozoico esso è indub-

(1) FUCINI. *Ulteriori osservazioni sui calcari cavernosi ecc.* Loc. cit.

(2) DE STEFANI. *Osservazioni sulla carta geologica d' Italia.* Boll. soc. geol. ital. Vol. I, pag. 773.

(3) TOMMASI. *Sugli scisti del Verrucano sottoposti al Retico. Loc. cit.*

biamente molto meno esteso per me che per lui; ma qui sta appunto la base della presente disputa. È possibile che io, per un rispetto esagerato ad alcune apparenze stratigrafiche, spiegabili in tante altre maniere e distrutte da molteplici fatti litologici e stratigrafici, possa tenere unito il Verrucano tipico della Verruca a quello, diamogli pure lo stesso nome, del Colletto e di Villa Massagli, quando nel primo trovo una fauna ed una flora wealdiana mentre nell' altro si hanno invece faune e flore di pretto tipo paleozoico e marino e completamente diverse? Parmi piuttosto che sia il De Stefani ad esser guidato da un preconcetto, stratigrafico e non paleontologico, quindi più fallace, allorchè riferisce alla Creta solo quel tanto di Verrucano e di calcare cavernoso che risulta stare fra il Titonico e l' Eocene per evidenza stratigrafica, e, non riconoscendo trasgressioni di sorta, ammette liassico il calcare cavernoso stesso se sta sopra al Lias, come pure retico se sta sopra il Verrucano da lui creduto triassico ecc. Ma se il Verrucano tipico sta ora sopra al Trias ben determinato— M. Argentario, Casal di Pari — ora sopra al Lias. — Monte di S. Giuliano, Montagnola senese—cosa vieta di credere che nella parte meridionale del M. Pisano, ad Iano ed all' Elba stia in trasgressione anche sul Paleozoico?

Concludendo col De Stefani, e riferendomi al M. Pisano, si ha che a Rupe Cava, ed in generale nella parte settentrionale del M. Pisano stesso, trovasi un Verrucano che, per essere interposto tra Titoniano e Neocomiano superiore, ha netta posizione wealdiana, ciò che, non contrastando con le idee sue, può essere da lui liberamente ammesso; mentre nella parte meridionale si ha un Verrucano che, per l'apparente sottomissione al secondario, pare Paleozoico, contiene però fossili wealdiani. Si devono davvero tener separati questi due Verrucani, litologicamente identici, quando i lembi Verrucani di Caldaccoli, di Cotrozzi di M. Penna, tutti intermedi e tutti in evidente trasgressione sul Lias, attestano la congiunzione di uno all' altro, e quando, ripeto per un ultima volta, la successione stratigrafica è ovunque data, in modo fisso ed immutabile, da Verrucano — complesso roccioso molto caratteristico — poi da scisti argillosi rossi con diaspri — pure di tipo speciale e radiolariferi — quindi dai calcari del complesso cavernoso — ancora di tipo non comune e caratteristico — tutti, sempre, in ogni luogo ed in modo straordinariamente intimo collegati da passaggi litologici?

Se il De Stefani, seguendo il modo di vedere di ogni altro geologo che si è occupato della questione, si persuadesse che le puddinghe del Verrucano sono sovrapposte al Paleozoico con filliti della Valle del Guappero, non potrebbe negare che esse, insieme con gli scisti superiori, potessero essere anche trasgressive sugli scisti paleozoici, ed allora quali argomenti potrebbe portare contro l' evidenza di quelli paleontologici?

Strana questione è questa mia. Se ho ben compreso si potrebbe riassumere così; il Lotti dice: mi dimostri il Fucini che il carreggiamento delle formazioni delle Mulina da me sostenuto è insussistente ed io potrei cominciare ad ammettere che potrebbe esser giusta l' età wealdiana che egli attribuisce al Verrucano della Verruca, ed il De Stefani è con me nel ritenere insussistente quel carreggiamento; il De Stefani sostiene che le puddinghe del Verrucano della Verruca sono sottoposte agli scisti con flora antracolitica della valle del Guappero, per cui non possono essere wealdiane, ed il Lotti è con me per ritenerle invece sovraposte a quegli scisti. Potrei dire: amico ed illustre maestro, carissimi entrambi, ponetevi d' accordo; io do torto all' uno e all' altro e sto nel mezzo; *in medio stat virtus.*

# Su taluni determinanti di forme singolari

## Nota di FRANCESCO CALDARERA

**Grande Uff. Prof. emerito della R. Università di Palermo,**
**Socio onorario dell' Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania,**

*Presentata all' Accademia nella seduta 23 febbraio 1918.*

1. — Nel mio Trattato dei determinanti (pub. a Palermo, 1913, Tip. Verzì) svolsi le primarie proprietà di un determinante più generale di quello di Vandermonde, di $n^{mo}$ grado,

$$(a) \; \ldots \; \Delta = \begin{vmatrix} x_1^{r_1} & x_2^{r_1} & \ldots & x_n^{r_1} \\ x_1^{r_2} & x_2^{r_2} & \ldots & x_n^{r_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{r_n} & x_2^{r_n} & \ldots & x_n^{r_n} \end{vmatrix},$$

composto con $n$ quantità qualunque, fra loro indipendenti,
$(b)$ . . $x_1$; $x_2, \ldots, x_n$, e con gli $n$ numeri interi positivi
$(c)$ . . $r_1$, $r_2, \ldots, r_n$, del quale ogni orizzontale è costituita dalle potenze di uno stesso grado delle date $n$ quantità $(b)$, ed ogni verticale dalle successive potenze dei dati gradi $(c)$ di una medesima quantità $(b)$.

Di esso determinante si occupò tra i primi l' illustre Professore N. Trudi in una Nota nel 2° vol. del Giornale di Battaglini. Vi si scorge a primo sguardo, sostituite alle $(b)$ le designazioni
$(d)$ . . . $a, b, \ldots, k$, e limitati gli accennati gradi $(c)$ ai numeri successivi
$(e)$ . . . $0,1,2, \ldots, n-1$, che il designato determinante $\Delta$ si riduce a quello di Vandermonde

$$(1) \; \ldots \; D\,(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & \ldots & k \\ a^2 & b^2 & \ldots & k^2 \\ a^{n-1} & b^{n-1} & \ldots & k^{n-1} \end{vmatrix};$$

in secondo luogo, mantenute le designazioni ($d$), e dati ai gradi ($c$) i numeri progressivi ($f$) . . . 1, 2, 3, . . . , $n$, il $\Delta$ si presenta nella forma

$$(2) \; .\,.\,.\,. \; D\,(2) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & k \\ a^2 & b^2 & \dots & k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & b^n & \dots & k^n \end{vmatrix} ;$$

se oltre alle $n$ quantità ($d$), si prende in precedenza l' unità come elemento costitutivo del determinante, che diventa di grado $n+1$, e si accoppino ad esse quantità

($g$) . . . $1, a, b, \dots, k$, i gradi ($e$) estesi al numero $n$, si ha

$$(3) \; .\,.\,.\,. \; D\,(3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & b & c & \dots & k \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & \dots & k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a^n & b^n & c^n & \dots & k^n \end{vmatrix} ;$$

infine, colle $n+1$ quantità ($g$) accoppiati i gradi ($f$) estesi al numero $n+1$, si consegue

$$(4) \; .\,.\,.\,. \; D\,(4) = \begin{vmatrix} 1 & a & b & \dots & k \\ 1 & a^2 & b^2 & \dots & k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a^{n+1} & b^{n+1} & \dots & k^{n+1} \end{vmatrix} .$$

Ecco dunque come con particolari specificazioni, dallo stesso determinante $\Delta$ risulta quello di Vandermonde nelle quattro varie forme, in cui si può presentarlo; ed ora procediamo a trovare l' espressioni conseguenti dalle rispettive riduzioni.

2. — Considerato il primo $D\,(1)$, si rileva agevolmente che, sottraendo la prima verticale dalle altre, e ribassato di una unità il grado, si ha

$$D\,(1) = \begin{vmatrix} b - a, & c - a, & \dots, & k - a \\ b^2 - a^2, & c^2 - a^2, & \dots, & k^2 - a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{n-1} - a^{n-1}, & c^{n-1} - a^{n-1}, & \dots, & k^{n-1} - a^{n-1} \end{vmatrix} ,$$

divisibile per le differenze $b-a$, $c-a$, ..., $k-a$, ciò che si rende più manifesto sottraendo da ciascuna orizzontale la precedente moltiplicata per $a$, operando dal basso in alto, e poscia messe fuori matrice codeste differenze, risulta

$$(h) \qquad D(1) = (b-a)(c-a)\dots(k-a)\, D_1(1)\,,$$

essendo

$$D_1(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & c & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{n-2} & c^{n-2} & \dots & k^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Questo determinante di forma identica al primitivo $D(1)$ trattato analogamente, si trasforma in

$$(i) \qquad D_1(1) = (c-b)(d-b)\dots(k-b)\, D_2(1)\,,$$

con

$$D_2(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c & d & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{n-3} & d^{n-3} & \dots & k^{n-3} \end{vmatrix};$$

progredendo a questo modo, si arriva ad un ultimo determinante

$$D_{n-3}(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & i & k \\ h^2 & i^2 & k^2 \end{vmatrix} = (i-h)(k-h)(k-i)\,;$$

colla sostituzione successiva in $(h)$ di questo e dei precedenti determinanti ausiliari, risulta

$$(5) \qquad D(1) = (b-a)(c-a)\dots(k-a) \times (c-b)(d-b)\dots(k-b) \times \dots \times (i-h)(k-h)(k-i).$$

*Osservazione* a) — Alla formazione del prodotto delle differenze $(b-a)$, $(c-a)$, ... si prendano queste in ordine inverso $a-b$, $a-c$, ... $a-k$; $b-c$, $b-d$, ..., $(i-k)$, però facendo precedere al prodotto il segno $+$ o $-$, secondo chè sia il numero di esse

differenze $\frac{n(n-1)}{2}$ pari o dispari, ovvero apponendo al prodotto il fattore $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; inoltre per brevità si rappresenti lo stesso prodotto simbolicamente scrivendolo $\Pi(a, b, c, ..., k)$, e così pel determinante in considerazione si ha

$$(6) \qquad D(1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi(a, b, c, \ldots, k).$$

Relativamente al secondo determinante (2) si scorge d'essere divisibile pel prodotto degli elementi della prima orizzontale, onde con riguardo alla forma (6) del $D(1)$ si ha

$$(7) \qquad D(2) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} abc \ldots k \; \Pi(a, b, c, \ldots, k).$$

Pel terzo determinante $D(3)$ si rileva immediatamente d'essere riducibile al grado $n^{mo}$ nella forma

$$(8) \ldots D(3) = \begin{vmatrix} a-1, & b-1, & \ldots, & k-1 \\ a^2-1, & b^2-1, & \ldots, & k^2-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n-1, & b^n-1, & \ldots, & k^n-1 \end{vmatrix},$$

divisibile per le differenze $a-1$, $b-1$, ..., $k-1$, ciò che risulta più manifesto sottraendo da ciascuna orizzontale la precedente, operando dal basso in alto, conseguentemente con riguardo al $D(1)$ si ha

$$(9) \qquad D(3) = (a-1)(b-1)\ldots(k-1)\; D(1),$$

e di seguito all'espressione (6) dal $D(1)$, scritte altresì le differenze $a-1$, $b-1, \ldots, k-1$ in ordine inverso $1-a$, $1-b$, ..., $1-k$, apponendo al loro prodotto il fattore $(-1)^n$, risulta

$$(10) \qquad D(3) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (1-a)(1-b)\ldots(1-k)\; \Pi\, a, b, c, \ldots, k).$$

Infine, prendendo a considerare il quarto determinante (4), si nota che le sue verticali, dalla seconda in poi, nel verso da sinistra a destra, sono divisibili rispettivamente per $a$, $b$, ..., $k$, sicchè con riguardo alla forma (10) del $D(3)$, si ha

$$(11) \qquad D(4) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} abc \ldots k \times (1-a)1-b)\ldots(1-k)\; \Pi(a, b, c, \ldots, k).$$

3. — Per una prima applicazione propongo il determinante di ordine $n^{mo}$

$$(12) \; . \; . \; . \; . \; D = \begin{vmatrix} \frac{\alpha^2}{1^2} - 1 & \frac{\alpha^2}{3^2} - 1 & \frac{\alpha^2}{5^2} - 1 & \cdots & \frac{\alpha^2}{(2n-1)^2} - 1 \\ \frac{\alpha^4}{1^4} - 1 & \frac{\alpha^4}{3^4} - 1 & \frac{\alpha^4}{5^4} - 1 & \cdots & \frac{\alpha^4}{(2n-1)^4} - 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha^{2n}}{1^{2n}} - 1 & \frac{\alpha^{2n}}{3^{2n}} - 1 & \frac{\alpha^{2n}}{5^{2n}} - 1 & \cdots & \frac{\alpha^{2n}}{(2n-1)^{2n}} - 1 \end{vmatrix},$$

di forma (8) del $D$ (3), in cui $\alpha = \frac{2x}{\pi}$, essendo $\pi$ la nota semicirconferenza del cerchio di raggio 1, $x$ una quantità qualunque esprimibile da un arco del detto cerchio, ed i suoi vari elementi risultano dalla formola

$$(13) \qquad \frac{\alpha^{2z}}{(2y-1)^{2z}} - 1,$$

dando ad $y$ i successivi valori $1, 2, 3, \ldots, n$, accoppiati ad uno stesso valore successivo di $z = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Questo determinante (12) è divisibile per gli elementi della prima orizzontale, ciò che si rende manifesto sottraendo da ciascuna orizzontale la precedente, operando dal basso in alto; usciti fuori dalla matrice codesti elementi, per formarne un prodotto, presi gli stessi elementi binomi con segni cambiati, e per compenso fatto precedere al prodotto il fattore $(-1)^n$, si ha

$$D = (-1)^n \left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{3^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha^2}{(2n-1)^2}\right) D',$$

essendo $D'$ il determinante

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\alpha^2}{1^2} & \frac{\alpha^2}{3^2} & \frac{\alpha^2}{5^2} & \cdots & \frac{\alpha^2}{(2n-1)^2} \\ \frac{\alpha^4}{1^4} & \frac{\alpha^4}{3^4} & \frac{\alpha^4}{3^4} & \cdots & \frac{\alpha^4}{(2n-1)^4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha^{2(n-1)}}{1^{2(n-1)}} & \frac{\alpha^{2(n-1)}}{3^{2(n-1)}} & \frac{\alpha^{2(n-1)}}{5^{2(n-1)}} & \cdots & \frac{\alpha^{2(n-1)}}{(2n-1)^{2(n-1)}} \end{vmatrix},$$

che è nella forma identica del $D(1)$, e stante la (6) viene

$$D' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Pi\left(\frac{\alpha^2}{1^2}, \frac{\alpha^2}{3^2}, \frac{\alpha^2}{5^2}, \ldots, \frac{\alpha^2}{(2n-1)^2}\right),$$

mettendo fuori il simbolo $\Pi$ il fattore $\alpha^2$ comune alle singole differenze $\frac{\alpha^2}{1^2} - \frac{\alpha^2}{3^2}$ $\frac{\alpha^2}{1^2} - \frac{\alpha^2}{5^2}, \ldots,$ posto altresì per brevità di scrittura

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\alpha^2}{(2n-1)^2}\right), \tag{14}$$

si ha

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \varphi(x)\, \alpha^{n(n-1)}\, \Pi\left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots, \frac{1}{(2n-1)^2}\right). \tag{15}$$

4. — Rimane ad ottenere il prodotto delle differenze

$$\Pi = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) \times \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right)\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7^2}\right)\ldots\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) \times$$
$$\times \ldots \times \left(\frac{1}{(2n-3)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right).$$

e seguendo con attenzione le operazioni a ciò suggerite dalla stessa ricerca, si ottiene la seguente singolare espressione

$$\Pi = 2^{n(n-1)} \times \frac{2^{n-1}\, 4^{n-2}\, 6^{n-3} \ldots (2n-4)^2 (2n-2)}{3^n\, 5^{n+1}\, 7^{n+2} \ldots (2n-3)^{2n-3} (2n-1)^{2n-2}}, \tag{16}$$

conseguentemente risulta per l' espressione ridotta del posto determinante

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \alpha^{n(n-1)} \varphi(x) \times 2^{n(n-1)} \frac{2^{n-1}\, 4^{n-2}\, 6^{n-3} \ldots (2n-4)^2 (2n-2)}{3^n\, 5^{n+1}\, 7^{n+2} \ldots (2n-3)^{2n-3} (2n-1)^{2n-2}}. \tag{17}$$

*Osservazione* (*b*) — Pei valori di $\alpha$ sono da escludere i numeri impari $1, 3, 5, \ldots$ con l' uno dei quali si annullerebbe il corrispondente fattore binomio del $\varphi(x)$, conseguentemente sarebbe imposta al determinante la condizione di nullità. Quanto allo stesso fattore $\varphi(x)$ è da notare che con $\alpha < 1$, come in generale supponiamo, cioè che sia $x < \frac{\pi}{2}$, al crescere di $n$ indefinitamente, si commuta nel prodotto infinito di fattori binomi esprimente la funzione $\cos x$; pertanto, a luogo di esso fattore $\varphi(x)$, sia per ap-

prossimazione, o da completa esattezza, secondo i casi, possiamo sostituire cos $x$. Nella stessa ipotesi di $x < \frac{\pi}{2}$, il fattore $\alpha^{n(n-1)} = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{n(n-1)}$, crescendo $n$ indefinitamente, converge ad un valore piccolissimo qualsiasi. In ultimo si rileva, attentamente considerate le varie parti di cui si compone il prodotto $\Pi$, che le medesime sono inferiori rispettivamente ai numeri $\frac{1}{1^{2(n-1)}}, \frac{1}{3^{2(n-2)}}, \frac{1}{5^{2(n-3)}}, \ldots, \frac{1}{(2n-3)^2}$ onde si ha

$$\Pi < \frac{1}{3^{2(n-2)}\, 5^{2(n-3)} \ldots (2n-3)^2}. \tag{18}$$

5. — Per seconda applicazione propongo il seguente determinante, di analoga forma del precedente,

$$E = \begin{vmatrix} \frac{\beta^2}{1^2} - 1 & \frac{\beta^2}{2^2} - 1 & \frac{\beta^2}{3^2} - 1 & \ldots & \frac{\beta^2}{n^2} - 1 \\ \frac{\beta^4}{1^4} - 1 & \frac{\beta^4}{2^4} - 1 & \frac{\beta^4}{3^4} - 1 & \ldots & \frac{\beta^4}{n^4} - 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\beta^{2n}}{1^{2n}} - 1 & \frac{\beta^{2n}}{2^{2n}} - 1 & \frac{\beta^{2n}}{3^{2n}} - 1 & \ldots & \frac{\beta^{2n}}{n^{2n}} - 1 \end{vmatrix} \tag{19}$$

in cui $\beta = \frac{x}{\pi}$, la $x$ come precedentemente; trattato lo stesso analogamente al $D$, e posto

$$\psi(x) = \left(1 - \frac{\beta^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\beta^2}{n^2}\right), \tag{20}$$

conformente alla (15) viene

$$E = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \psi(x)\, \beta^{n(n-1)}\, \Pi\left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2} \ldots \frac{1}{n^2}\right). \tag{21}$$

Calcolato il prodotto $\Pi$ delle differenze

$$\Pi = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \times \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) \ldots \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \times \ldots \times \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{22}$$

si ottiene, secondochè sia $n$ numero impari

$$\Pi = \frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}} (n+2)^{\frac{n-1}{2}} (n+3)^{\frac{n-3}{2}} \ldots (2n-4)^2 (2n-3)^2 (2n-2)(2n-1)}{2^n\, 3^n\, 4^{(n+1)}\, 5^{(n+1)} \ldots (n-1)^{n+\frac{n-3}{2}}\, n^{n+\frac{n-3}{2}}} \tag{23}$$

e per $n$ numero pari

$$(24) \qquad \Pi = \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}\,(n+2)^{\frac{n}{2}-1}\,(n+3)^{\frac{n}{2}-1}\ldots(2n-4)^2\,(2n-3)^2\,(2n-2)\,(2n-1)}{2^n\,3^n\,4^{n+1}\,5^{n+1}\ldots(n-2)^{n+\frac{n-4}{2}}\,(n-1)^{n+\frac{n-4}{2}}\,n^{n+\frac{n-2}{2}}}\;;$$

di seguito pel determinante E, secondo i due casi, cioè con $n$ numero impari, risulta

$$(25) \qquad E = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\,\phi(x).\,\beta^{n(n-1)}\,\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}\,(n+2)^{\frac{n-1}{2}}\,(n+3)^{\frac{n-3}{2}}\ldots(2n-4)^2(2n-3)^2(2n-2)(2n-1)}{2^n\,3^n\,4^{n+1}\,5^{n+2}\ldots(n-2)^{n+\frac{n-3}{2}}\,n^{n+\frac{n-3}{2}}}\,,$$

e con $n$ numero pari

$$(26) \qquad E = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\,\phi(x).\,\beta^{n(n-1)}\,\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}\,(n+2)^{\frac{n}{2}-1}\ldots(2n-4)^2(2n-3)^2(2n-2)(2n-1)}{2^n\,3^n\,4^{n+1}\,5^{n+1}\ldots(n-2)^{n+\frac{n-4}{2}}\,(n-1)^{n+\frac{n-4}{2}}\,n^{n+\frac{n-2}{2}}}\,.$$

*Osservazione* c) — Il prodotto $\phi(x)$, pel quale vanno esclusi i valori di $\beta = 1, 2, 3, \ldots, n$, e supponiamo in generale $\beta < 1$, quindi $x < \pi$, al crescere il numero dei suoi fattori binomî col crescere l' ordine $n$, si commuta con la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, la quale pertanto si può surrogare allo stesso $\phi(x)$, sia per approssimazione, sia a completa esattezza, secondo i casi; d' altro canto è da notare che con $x < \pi$ il fattore $\beta^{n(n-1)}$ può convergere ad un valore piccolissimo qualsiasi, col crescere indefinitamente $n$; infine che il prodotto $\Pi$, nelle sue parti rispettivamente inferiori ai numeri $\frac{1}{1^{2(n-1)}}, \frac{1}{2^{2(n-2)}}, \ldots, \frac{1}{(n-1)^2}$, è complessivamente

$$(27) \qquad \Pi < \frac{1}{2^{2(n-2)}\,.\,3^{2(n-3)}\,.\,4^{2(n-4)}\ldots(n-1)^2}\,.$$

7. — Per terza applicazione propongo il seguente sistema di equazioni lineari fra $n$ incognite $x, y, \ldots u, v$, in pari numero $n$ delle incognite, e $d$ un numero qualsiasi, esclusa l' unità,

$$(28) \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y + \ldots + u + v = 1\,, \\[4pt] \dfrac{x}{1^2} + \dfrac{y}{2^2} + \ldots + \dfrac{u}{(n-1)^2} + \dfrac{v}{n^2} = \dfrac{1}{d^2}\,, \\[4pt] \dfrac{x}{1^4} + \dfrac{y}{2^4} + \ldots + \dfrac{u}{(n-1)^4} + \dfrac{v}{n^4} = \dfrac{1}{d^4}\,, \\[4pt] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[4pt] \dfrac{x}{1^{2(n-1)}} + \dfrac{y}{2^{2(n-1)}} + \ldots + \dfrac{u}{(n-1)^{2(n-1)}} + \dfrac{v}{n^{2(n-1)}} = \dfrac{1}{d^{2(n-1)}}\,, \end{array}\right.$$

Risolvendole col solito impiego dei determinanti, e per essi del prodotto $\Pi$, (22), al primo membro dell' eguaglianza esprimente ciascuna incognita, e nei secondi membri l'impiego dello stesso $\Pi$, sostituendo $\frac{1}{d^2}$ successivamente alle frazioni $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}$, dapprima si ottengono l' equazioni

$$\Pi . x = \Pi\left(\frac{1}{d^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}\right), \quad \Pi . y = \Pi\left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{d^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}\right), \ldots \ldots$$

$$\Pi . u = \Pi\left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{(n-2)^2}, \frac{1}{d^2}, \frac{1}{n^2}\right), \quad \Pi . v = \Pi\left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{(n-1)^2}, \frac{1}{d^2}\right).$$

In esse, affine di più facile riconoscimento delle frazioni componenti i prodotti $\Pi$ a doversi conservare, da quelle altre da eliminare perchè trovansi comuni al primo e secondo membro di ciascuna equazione, dinotiamo con numeri d' ordine $1, 2, 3, \ldots, n$ i posti dei singoli elementi del prodotto $\Pi$ al primo membro, e con $d$ quello dell' elemento $\frac{1}{d^2}$ al secondo membro, ed operiamo fra gli elementi degli stessi prodotti le successive sostituzioni circolari, onde mettere il $d$ a primo posto, e così formiamo le seguenti equazioni

$$\Pi(1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n) \times x = \Pi(d, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n),$$
$$\Pi(2, 3, \ldots, n-1, n, 1) \times y = \Pi(d, 3, 4, \ldots, n-1, n, 1),$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\Pi(n-1, n, 1, 2, \ldots, n-2) \times u = \Pi(d, n, 1, 2, \ldots, n-2),$$
$$\Pi(n, 1, 2, 3, \ldots n-2, n-1) \times v = \Pi(d, 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1).$$

Sostituiti in queste ai posti designati le relative differenze binomie degli elementi, eliminate tutte quelle comuni ai primi e secondi membri, fatta ogni altra riduzione occorrente, si ottengono l' espressioni delle incognite

$$(29) \qquad x = \frac{1^{2(n-1)}}{d^{2(n-1)}} \times \frac{(2^2-d^2)(3^2-d^2)\ldots[(n-2)^3-d^2][(n-1)^2-d^2][n^2-d^2]}{(2^2-1)(3^2-1)\ldots[(n-2)^2-1][(n-1)^2-1][n^2-1]},$$

$$(30) \qquad y = \frac{2^{2(n-1)}}{d^{2(n-1)}} \times \frac{(3^2-d^2)(4^2-d^2)\ldots[(n-1)^2-d^2][n^2-d^2](1^2-d^2)}{(3^2-2^2)(4^2-2^2)\ldots[(n-1)^2-2^2][n^2-2^2](1^2-2^2)},$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$(31) \qquad u = \frac{(n-1)^{2(n-1)}}{d^{2(n-1)}} \times \frac{(n^2-d^2)(1^2-d^2)(2^2-d^2)\ldots[(n-2)^2-d^2]}{[n^2-(n-1)^2][1^2-(n-1)^2][2^2-(n-1)^2]\ldots[(n-2)^2-(n-1)^2]},$$

$$(32) \qquad v = \frac{n^{2(n-1)}}{d^{2(n-1)}} \times \frac{(1^2-d^2)(2^2-d^2)(3^2-d^2)\ldots[(n-1)^2-d^2]}{(1^2-n^2)(2^2-n^2)(3^2-n^2)\ldots[(n-1)^2-n^2]}.$$

I considerati determinanti posti in forme d' ordine infinito.

7 (*). — Il determinante $\Delta$, quello di Vandermonde nelle sue particolari forme $D(1), \ldots$, $D(4)$, e i due speciali $D$, $E$, (12), (19), si possono presentare quali determinanti d'ordine

*) Il numero d' ordine delle materie 7 in pag. 8 devesi commutare in 6.

infinito, facendo seguire nella matrice, ai primi elementi designati, puntini indicanti il proseguimento illimitato, tanto delle orizzontali, quanto delle verticali, scrivendo cioè pei primi due

$$(33)\qquad \underset{\infty}{\Delta}=\begin{vmatrix} x_1^{r_1} & x_2^{r_1} & x_3^{r_1} & \dots \\ x_1^{r_2} & x_2^{r_2} & x_2^{r_2} & \dots \\ x_1^{r_3} & x_2^{r_3} & x_3^{r_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad \underset{\infty}{D(1)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ a & b & c & \dots \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots \\ a^3 & b^3 & c^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

e via di seguito.

Però è da osservare che in essi (33), e negli analoghi $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$, le quantità e numeri

$$(34)\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots,\ a,\ b,\ c,\ \dots.$$

non possono essere presi arbitrariamente, giacchè trattandosi di determinanti d' ordine infinito, gli elementi di ciascuna linea, orizzontale o verticale, devono essere legati a leggi di formazione ben determinate; perciò rispetto ai detti $\Delta$, $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$, nulla di concreto può desumersi senza chè siano precisate le derivazioni delle cennate quantità e numeri (34) secondo leggi di formazione prestabilite.

Passiamo pertanto ad esaminare i due seguenti, che sono coerenti ai (12), (19), ed alle relative forme (3),

$$(35)\qquad \underset{\infty}{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \frac{\alpha^2}{1^2} & \frac{\alpha^2}{3^2} & \frac{\alpha^2}{5^2} & \dots \\ 1 & \frac{\alpha^4}{1^4} & \frac{\alpha^4}{3^4} & \frac{\alpha^4}{5^4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad \underset{\infty}{E}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \frac{\beta^2}{1^2} & \frac{\beta^2}{2^2} & \frac{\beta^2}{3^2} & \dots \\ 1 & \frac{\beta^4}{1^4} & \frac{\beta^4}{2^4} & \frac{\beta^4}{3^4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

dei quali, gli elementi del primo sono forniti dalla formola

$$\frac{\alpha^{2z}}{(2y-1)^{2z}}, \text{ e del secondo dalla formola } \left(\frac{\beta}{y}\right)^{2z},$$

dando ad $\alpha$, $\beta$, $y$, $z$, i valori convenuti.

Intanto, relativamente ai determinanti d' ordine infinito, devono distinguersi i convergenti dai divergenti, e dagli indeterminati, e che meritano d' esser presi in considerazione solamente i convergenti; la convergenza avendo luogo a condizioni preliminari, che gli elementi d' ogni linea, orizzontale e verticale, formino serie assolutamente convergenti a limiti finiti determinati.

Inoltre, pure soddisfacendo alle condizioni anzidette, un dato determinante $D$ d' ordine infinito, il criterio specifico della sua convergenza considerato nella speciale sua com-

posizione, si ha (confr. il succitato mio Trattato dei Determinanti) prendendo dalla matrice una porzione limitata, ossia costituita dai primi elementi di $n$ orizzontali, che si succedono come nella stessa matrice, e da altrettante verticali in simile successione, sicchè verrà a formarsi un determinante finito d' ordine $n$, che si designa in generale $D_n$, e se questo al crescere indefinitamente di $n$, ha un determinato limite finito $A$, si prenderà tale limite per valore del dato determinante, che pertanto si dirà convergente.

8. — Venendo all' esame concreto dei due proposti determinanti (35), la cui formazione è con leggi specifiche dichiarate, in riguardo alla loro convergenza, è da osservare, relativamente al primo $D$, che gli elementi delle orizzontali, a parte il fattore $\alpha$, costituiscono serie del tipo

$$\sigma_n^{\mathrm{I}} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots + \frac{1}{m^{2n}} + \ldots \tag{36}$$

e delle verticali altre serie di forma

$$\sigma_n^{\mathrm{II}} = 1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \ldots + \frac{1}{m^{2n}} + \ldots \tag{37}$$

dinotato con $m$ uno qualunque dei numeri impari 1, 3, 5, . . . ; relativamente poi al secondo determinante. E, a parte il fattore $\beta$, gli elementi delle orizzontali costituiscono serie di forma

$$\sigma_n^{\mathrm{III}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots + \frac{1}{m^{2n}} + \ldots, \tag{36'}$$

e delle verticali altre serie del tipo

$$\sigma_n^{\mathrm{IV}} = 1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \ldots + \frac{1}{m^{2n}} + \ldots \tag{37'}$$

essendo $m$ un qualunque numero degl' interi 1, 2, 3, . . . .

La convergenza di queste serie si dimostra agevolmente: quanto alle (37) (37'), che si accoppiano ad unica forma, distinta soltanto dai valori diversi della $m$, esse hanno origine dallo sviluppo in serie della funzione a potenza $\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{-1}$, che è sempre convergente essendo $\frac{1}{m^2} < 1$, ed il limite di convergenza è dato dalla frazione $\frac{m^2}{m^2 - 1}$; per le (36), (36') poi, si osserva da un canto che, presi gli sviluppi in serie dei $l.\cos x$, $l\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, che sono funzioni pari della $x$, e si annullano per $x = 0$, laonde assumono le forme

$$l.\cos x = \sum_1^\infty C_n x^{2n}, \quad l\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_1^\infty D_n x^{2n}, \tag{38}$$

essendo

$C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$, e $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$, coefficienti indipendenti dalla varia-

bile $x$, determinati da note leggi di formazione, e i $D_n$ legati ai corrispondenti $C_n$ mercè la relazione $D_n = C_n : (2^{2n} - 1)$, e dei primi cinque avendosi i valori

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{12}, \quad C_3 = -\frac{1}{45}, \quad C_4 = -\frac{11}{2520}, \quad C_5 = -\frac{31}{14175};$$

d' altro canto gli sviluppi in prodotti infiniti delle stesse funzioni

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \times \ldots$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \times \ldots$$

coi loro logaritmi messi in confronto coi (38) dànno

$$l \cos x = \sum_1^\infty C_n x^{2n} = l\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) + \text{ecc.},$$

$$l \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_1^\infty D_n x^{2n} = l\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) + \text{ecc.}.$$

Ora, sviluppati i logaritmi delle funzioni binomie secondo la nota serie $l(1 - z) = - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} -$ ecc., e presi in esse eguaglianze i coefficienti di una medesima potenza $x^{2n}$ di ciascuna, al primo e secondo membro, si conseguono l'espressioni seguenti dei coefficienti $C_n$, $D_n$, cioè

$$(39) \quad C_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\left(1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \text{ecc.}\right), \quad D_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2n}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \text{ecc.}\right),$$

le quali dimostrano la convergenza delle due suddette serie (36), (36'), convergenti ai limiti dati dalle formole

$$(40) \qquad \sigma_n^{\mathrm{I}} = -n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} C_n, \quad \sigma_n^{\mathrm{III}} = -n\pi^{2n} D_n.$$

La convergenza delle quattro serie (36), (37), (36'), (37') resta dunque assodata, e poichè ciascuna di essa è composta da termini tutti con lo stesso segno, ne segue che le medesime sono assolutamente convergenti; in conseguenza di ciò va dimostrato completamente che i due proposti determinanti (35) hanno tutte le condizioni necessari e sufficienti per essere convergenti.

9. — Relativamente al criterio specifico di tale convergenza, considerati gli stessi determinanti direttamente, nelle loro speciali composizioni, si rileva che le porzioni $D_n$, $E_n$, costituite come fu sopra indicato (n° 7) sono i determinanti finiti d' ordine $n^{mo}$, espressi

per le rispettive formole (17), (25), (26), convergendo ai prodotti $\varphi(x)$, $\psi(x)$ le rispettive funzioni $\cos x$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, che qui prendono il loro posto reale, sicchè si hanno

$$(41)\qquad D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{n(n-1)} \cos x \times 2^{n(n-1)} \frac{2^{n-1}\, 4^{n-2}\, 6^{n-3} \ldots (2n-4)^2\, (2n-2)}{3^n\, 5^{n+1}\, 7^{n+2} \ldots (2n-3)^{2n-3} (2n-1)^{2n-2}}\ ,$$

e per $E_n$ secondo i due casi, cioè $n$ impari

$$(42)\qquad E_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{n(n-1)} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}} (n+2)^{\frac{n-1}{2}} (n+3)^{\frac{n-3}{2}} (n+4)^{\frac{n-3}{2}} \ldots (2n-4)^2 (2n-3)^2 (2n-2)(2n-1)}{2^n\, 3^n\, 4^{(n+1)}\, 5^{(n+1)} \ldots (n-1)^{n+\frac{n-3}{2}}\, n^{n+\frac{n-3}{2}}}$$

e con $n$ numero pari

$$(43)\qquad E_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{n(n-1)} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}} (n+2)^{\frac{n}{2}-1} (n+3)^{\frac{n}{2}-1} \ldots (2n-4)^2 (2n-3)^2 (2n-2)(2n-1)}{2^n\, 3^n\, 4^{n+1}\, 5^{n+1} \ldots (n-2)^{n+\frac{n-4}{2}} (n-1)^{n+\frac{n-4}{2}}\, n^{n+\frac{n-2}{2}}}\ .$$

Ora, questi determinanti (41) (42), (43), con le loro forme in dipendenza del numero $n$, non si prestano alla determinazione concreta del limite indicato $A$ (n° 7), che sia preso pel valore del corrispondente determinante di ordine infinito, anche per questo mezzo riesce impossibile a stabilire la convergenza dei (35), tuttavia, stante le ineguaglianze (18), (27), alle quali devono soddisfare i prodotti designati $\Pi$, costituenti i suddetti (41), (42), (43), ineguaglianze dimostranti che al crescere indefinitamente $n$, essi prodotti $\Pi$, e con sè i determinanti finiti $D_n$, $E_n$ convergono a limite così piccolo che si voglia, si desuma che i proposti (35) anch' essi convergono a tale limite infinitamente piccolo, conseguentemente a zero considerati indefinitamente estesi.

10. — In ultimo luogo pongo ad esame il seguente determinante di forma assai singolare

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}\ ,$$

in cui $x$ dinoti una quantità qualunque, e come si scorge dalla sua composizione, il grado è un numero impari, ho preso il numero 7 per occupare nella stampa spazio convenevole, ma s' inferisce agevolmente come estenderlo ad un ordine qualsiasi impari.

Se l' ordine impari scelto si denoti $n-2$, che aumentato di due unità dà il numero $n$, e si designa il determinante in considerazione $C(n-2)$, sostituito $n$ alla $x$, si ha

$$(45) \qquad C(n-2) = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & n & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} .$$

Il determinante in questa forma particolare ha nascimento da un determinante magico dell' ordine $n$, cioè dal determinante che ha per matrice un quadrato magico di base $n$, numero impari, formato dai numeri interi consecutivi da 1 ad $n^2$ disposti a modo, come per tutti i quadranti magici composti da elementi in progressione aritmetica, talmente che la somma degli elementi di ciascuna linea, orizzontale, o verticale, o sull' una delle due diagonali, sia costante per tutte le dette linee; un tale determinante in generale lo designiamo $D(n)$, al quale è corrispondente il $C(n-2)$; supposte che gli elementi siano i numeri interi da 1 ad $n^2$, ed in particolare prendiamo il numero 9, abbiamo

$$(46) \qquad D(9) = \begin{vmatrix} 47 & 58 & 69 & 80 & 1 & 12 & 23 & 34 & 45 \\ 57 & 68 & 79 & 9 & 11 & 22 & 33 & 44 & 46 \\ 67 & 78 & 8 & 10 & 21 & 32 & 43 & 54 & 56 \\ 77 & 7 & 18 & 20 & 31 & 42 & 53 & 55 & 66 \\ 6 & 17 & 19 & 30 & 41 & 52 & 63 & 65 & 76 \\ 16 & 27 & 29 & 40 & 51 & 62 & 64 & 75 & 5 \\ 26 & 28 & 39 & 50 & 61 & 72 & 74 & 4 & 15 \\ 36 & 38 & 49 & 60 & 71 & 73 & 3 & 14 & 25 \\ 37 & 48 & 59 & 70 & 81 & 2 & 13 & 24 & 35 \end{vmatrix} ,$$

$$(47) \qquad C(7) = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} .$$

11. — Onde trovare la relazione che lega i due determinanti $D(n)$, $C(n-2)$, qualunque sia il numero d'ordine $n$, sempre impari, trattiamo questi due particolari (46), (47) relativi al numero 9, con procedimento e ragionamento applicabili a tutti gli altri valori; a tale fine osserviamo anzitutto che varie trasformazioni possibili del $D(n)$ dipendono dal modo di formazione dei quadrati magici costituenti le matrici; infatti, presa a piacimento una delle linee, verticale od orizzontaie qualsiasi, si può ridurla ad elementi eguali all'unità, aggiungendovi dapprima tutte le altre linee omonime, addizione che commuta tutti gli elementi della linea prescelta ad esser eguali, ciascuno alla somma $s$ degli elementi primitivi di essa linea, e di seguito uscito fuori matrice codesto fattore $s$, la detta linea diventa ad elementi 1.

Coerentemente a tale trasformazione, si prendano in considerazione altra linea ortogonale alla ridotta ad 1, e i suoi elementi, che si rendono tutti nulli, ad eccezione dell'1 posto sulla prima linea, sottraendo da ciascuna delle linee aggiunte la ridotta ad 1, moltiplicata rispettivamente per l'elemento corrispondente della seconda linea; conseguentemente a ciò, si ribasserà di una unità il grado del $D(n)$, sopprimendovi le due linee operanti già trasformate.

Operando tanto sul determinante (46), presceglendo per le due linee anzindicate la verticale centrale, e la prima orizzontale, si ottiene

$$(48) \qquad D(9) = s \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & -71 & 10 & 10 & 10 & 1 \\ 20 & 20 & -61 & -70 & 20 & 20 & 20 & 11 \\ 30 & -51 & -51 & -60 & 30 & 30 & 21 & 21 \\ -41 & -41 & -50 & -50 & 40 & 40 & 31 & 31 \\ -31 & -31 & -40 & -40 & 50 & 41 & 41 & -40 \\ -21 & -30 & -30 & -30 & 60 & 51 & -30 & -30 \\ -11 & -20 & -20 & -20 & 61 & -20 & -20 & -20 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 & -10 \end{vmatrix} .$$

Ciò che di singolare si scorge in questo determinante (48), riguardo alla prima e l'ultima orizzontale, non è una casualità derivante dall'ordine particolare 9, ma sibbene conseguenza della composizione dei quadrati magici della specie considerata; infatti in un qualsiasi quadrato d'ordine $n$ si osserva alla verticale centrale il primo elemento 1 in alto e l'ultima $n^2$ in basso, nella verticale successiva a sinistra il primo elemento è $n^2-1$, e sotto di questo l'elemento $n$, sicchè la differenza tra i due è $n+1-n^2$, corrispondente a $-71$ in (48); nel primitivo $D(n)$ il primo e secondo elemento dell'ultima verticale a destra differiscono dall'unità, che appunto si scorge in (48); tutti gli altri elementi della prima e seconda orizzontale dello stesso $D(n)$, oltre agli anzicennati, sono tali che le rispettive differenze per ogni verticale risultano eguali ad $n+1$, quale scorgasi in (48) $10=9+1$; gli elementi dell'ultima orizzontale in basso sono tali rispetto ai corrispondenti dalla prima orizzontale, che le differenze sono tutte eguali a $-(n+1)$, perciò $-10$ in (48).

Tenute presenti queste osservazioni generali, si proceda al ribassamento di altra unità del grado del $D(n)$, sottraendo in (48) l'ultima verticale a destra da tutte le altre, i cui

elementi nell' ultima orizzontale si annullano, e così con la soppressione di quest' ultima orizzontale e dall' anzidetta verticale, si ha ridotto al settimo grado

$$(49)\qquad D(9) = -10.\,s.\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & -72 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & -72 & -81 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & -72 & -72 & -81 & 9 & 9 & 0 \\ -72 & -72 & -81 & -81 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 90 & 81 & 81 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 90 & 81 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 81 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. — Tutte le verticali di questo determinante sono divisibili numericamente per 9, eseguendo la divisione delle prime quattro per $-9$, e delle altre tre per $+9$, col porre a fattore $+9^7$ fuori matrice, al tempo stesso scambiate tra loro la seconda verticale con la quarta, la quinta con la settima, e trasportata la prima verticale al posto centrale, si ottiene

$$(50)\qquad D(9) = 10.\,9^7\,s\begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 8 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 8 & 8 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix};$$

da quest' ultimo determinante, sottraendo successivamente dalla prima verticale la seconda, da questa la terza, e da questa la quarta, indi dalla sesta la quinta, e dalla settima la sesta, emerge il $C(7)$, (47); conseguentemente, poichè per $D(n)$ si ha $s = \frac{n(n^2+1)}{2}$, e per $D(9)$ il valore $s = \frac{1}{2}\,9(1+9^2)$, risulta la relazione

$$(51)\qquad D(9) = \frac{1}{2}(1+9)(1+9^2)\,9^8\,C(7) = \frac{1}{2}\,(1+9+9^2+9^3)\,9^8\,C(7).$$

Dal procedimento adoperato e ragionamento sin qui tenuto va dimostrato che un determinante $C(n-2)$ di forma (45), $n-2$, quindi $n$ essendo numeri impari, risulta da un corrispondente determinante magico $D(n)$, composto come si è detto, ribassandone il suo grado di due unità, e ciò opportunamente scelte le linee da sopprimere, che ho riconosciute preferibili la verticale centrale colla prima orizzontale nel primo ribassamento di una unità, l' ultima verticale a destra coll' ultima orizzontale in basso pel secondo ribassamento; inoltre che sia convenientemente maneggiato il determinante immediato all' eseguito ribassamento del grado.

Conseguentemente a siffatte operazioni si ottiene la relazione, che lega in generale i due determinanti $D(n)$, $C(n-2)$, nella forma seguente

$$D(n) = \pm \frac{1}{2} (1 + n + n^2 + n^3) \, n^{n-1} \, C(n-2) \,, \tag{52}$$

al secondo membro precede il segno $+$, o $-$, secondochè sia $\frac{n-1}{2}$ un numero pari od impari.

Il rapporto tra i due detti determinanti dipende dunque unicamente dal grado $n$, il $C(n-2)$ è come un prodotto fatidico del $D(n)$, dal cui ribassamento di grado emerge come per incanto, parimente che sia fatidico il $D(n)$ rispetto alla sua matrice magica; di tale sorta di determinanti pare che io mi sia occupato per primo nel 1866 (confr. la mia Memoria inserita nel Giornale della Società di Scienze naturali ed economiche di Palermo, vol. I, pag. 173 e seg.).

*Catania 20 Gennaio 1918.*

Istituto d' Anat., Fisiol. comparate e Zoologia della R. Università di Catania

# La funzione di assorbimento e di secrezione interna nelle cellule della granulosa del Follicolo di Graaf della Coniglia, la degenerazione grassa ed il ciclo vitale dell' ovo.

( Con APPENDICE : Su le cause determinanti il sesso dei nati della Coniglia ).

Memoria del Prof. ACHILLE RUSSO

( con 2 Tavole e 3 figure nel testo ).

SOMMARIO



1. *Prefazione* — In una Memoria, pubblicata 12 anni fa (1), misi in rilievo che le *cellule parietali* della granulosa, che poggiano sulla membrana propria del follicolo, presentano, nelle Coniglie lecitinate, particolarità tali da far loro attribuire una funzione di assorbimento.

Sebbene dal Comes (2) e dal Monterosso (3), con ricerche su vari Mammiferi allo stato normale, fosse stato confermato il mio reperto, pure, in una Nota recente (4), furono

(1) RUSSO A. — Modificazioni sperimentali dell' elemento epiteliale dell' ovaia dei Mammiferi. *Atti R. Acc. dei Lincei, Roma 1907.*

(2) COMES S. — Alcuni particolari istologici donde proviene il materiale nutritivo dell' oocite dei Mammiferi. *Arch. ital. d' Anat. ed Embr. Firenze 1907.*

(3) MONTEROSSO B. — Su la struttura e la funzione delle cellule parietali della granulosa del follicolo ovarico del Maiale. *Atti Acc. Gioenia di Sc. Nat. Catania 1912.*

(4) RUSSO A. e MONTEROSSO B. — La funzione di assorbimento e di secrezione interna delle cellule parietali del follicolo ovarico, studiata sperimentalmente nella Coniglia. *Monitore Zoologico ital., Firenze 1915.*

messe in migliore evidenza le modificazioni di forma e di struttura, che le cellule parietali presentano, in rapporto a tale funzione, nelle Coniglie previamente iniettate con Lecitina. Però, se le variazioni di forma, il determinarsi di un contenuto cellulare, sotto forma di globuli adiposi, gli spostamenti, che subisce il nucleo nei diversi momenti del processo d' assorbimento, quali furono descritti nella nota sopra citata, sono argomenti in favore di tale funzione, restavano oscuri diversi particolari, la cui conoscenza s' impone per decidere sul determinismo di tutto il processo; bisognava conoscere almeno quale fosse la natura del contenuto stesso, perchè tale contenuto non si osserva nelle cellule dei giovani follicoli delle stesse Coniglie lecitinate, perchè nei follicoli in piena maturità lo stesso contenuto globulare è localizzato, in un primo tempo, nelle cellule parietali più lontane dal punto, in cui l' ovo s' impianta, perchè, in fine, a questa fase segue la *degenerazione grassa* delle medesime cellule parietali e l' ovo non degenera se non quando tutte le cellule follicolari sono allo stato d' involuzione. A questi problemi, che formano il contenuto di questa Nota, si collegano, com' è evidente, quelli dell'evoluzione del follicolo e del metabolismo dell'ovo, durante la sua permanenza nell' ovaia.

2. *Tecnica* — Le ovaie, dalle quali furono estratti i follicoli, che servirono alle presenti ricerche, appartengono in parte a Coniglie ipernutrite con *Lecitina Merck*, come è detto in miei precedenti lavori. Pezzetti di ovaia, contenenti follicoli, furono fissati con liquidi osmici, a preferenza con quello del *Benda*, per mettere in evidenza i grassi; le sezioni furono colorate con *Saffranina Pfitzner* per fare risaltare i grassi stessi imbruniti dall' Osmio. Per queste ricerche però mi sono servito anche di ovaie di Coniglie ipernutrite, mediante iniezioni di *Bioplastina Serono*, la quale, come fu detto in altro lavoro (1), ha la stessa efficacia della *Lecitina Merck*, in quanto che, dopo tale trattamento, si osserva un aumento dei granuli e dei globuli a struttura mielinica in vari elementi epiteliali dell'ovaia e nelle ova stesse.

I follicoli maturi delle ovaie delle Coniglie così trattate subirono le manipolazioni proposte dal *Ciaccio* per la ricerca dei *lipoidi cellulari*, dando la preferenza *al* 1° *metodo* per mettere in evidenza quelle sostanze, che, con termine generale, furono chiamate *Lipoidi*, ma sulla cui costituzione chimica ben poco si conosce, ed al *3° metodo*, che serve a mettere in evidenza i *grassi comuni* o le sostanze chimicamente affini. Con i due metodi, adoperati sullo stesso materiale, si mettono in evidenza, nelle stesse cellule della granulosa parietale della Coniglia, strutture diverse, in quanto che, mentre con il *1° metodo* compariscono i *lipoidi*, colorati in giallo aranciato, diffusi nel protoplasma, con il *3° metodo* si osservano solo dei globuli, localizzati in punti determinati delle cellule parietali stesse, che assumono una tinta bruno-rossastra, dopo colorazione col *Sudan III*, o grigionerastra, prima di detta colorazione, quando le sezioni si montano in *gomma sciroppo di Apathy*, dopo essere state sparaffinate. Contrariamente, dunque, a quanto si sa sui risultati di detti metodi, cioè che con il *3° metodo* i grassi comuni si colorano in nero e che tali rimangono anche dopo la colorazione al *Sudan III*, mentre i lipoidi si tingono in rosso bruno, i globuli sudetti, non conservando la tinta nera, non sarebbero dei veri grassi neutri o dei grassi comuni, simili a quelli che si osservano nelle cellule parietali in degenera-

(1) RUSSO A. — Ulteriori ricerche su l'origine del deutolecite nell'ovo della Coniglia. *Atti Acc. Gioenia di Sc. Nat.* Vol. X, Ser. V, Catania, 1917.

zione grassa. Se ciò è vero, non è dubbio però che esista una sostanziale differenza tra cotesti globuli ed i *lipoidi*, che si tingono in aranciato con il *1° metodo* e che sono sparsi, sotto forma di qualche filamento o di masse irregolari, dentro il protoplasma; per cui, pur non potendosi conoscere la vera natura chimica dei globuli suddetti, è da ammettere che essi rappresentino un prodotto sintetico di natura adiposa, formato dall' attività metabolica delle cellule parietali. Tale conclusione ci viene convalidata dalla tinta nerastra, che i globuli in questione assumono prima della colorazione delle sezioni con il *Sudan III*, dalla stessa tinta rosso bruna che essi hanno dopo questo trattamento, ed, infine, per il fatto che tale parte del contenuto cellulare si scioglie, quando le sezioni vengono tenute in *Essenza di Trementina*, per diverse ore, alla temperatura della stanza, o meglio ancora in *Termostato* a 37°.

I risultati ottenuti con tale trattamento microtecnico vengono confermati da quelli avuti, in seguito a fissazione dei follicoli con i liquidi proposti da *Benda* e colorazione con la *Saffranina Pfitzner*, mediante la quale si mettono in rilievo nelle stesse cellule parietali dei globuli, tinti in grigio dall' Acido osmico, con diversa posizione, secondo la differente fase dell' assorbimento, tinta che è diversa dal bel nero dei globuli di grasso, che si trovano nelle cellule parietali, in cui è evidente la *degenerazione grassa*.

3. — *Fasi di assorbimento e di secrezione interna, formazione del liquido follicolare, natura microchimica del prodotto globulare.*

Nelle figure 1, 2, 3, 4, 5, 6 della Tavola I furono ritratti vari pezzetti di granulosa parietale di follicoli, a completo sviluppo, con le cellule di natura epiteliale e con i vari elementi della *teca interna*. Nella fig. 1, ricavata da ovaie, fissate secondo il metodo *Benda* e colorate con *Saffranina*, presa da un follicolo alla fine della sua attività costruttiva, appartenente a coniglia lecitinata, le cellule, che s' impiantano su la *membrana propria folliculi*, si trovano in diversa fase d'assorbimento, essendo alcune cubiche, altre allungate, con il prodotto globulare in posizioni varie.

In questa figura, cominciando da sinistra, la prima cellula trovasi nella fase iniziale dell' assorbimento, essendo isodiametrica con nucleo centrale ed avendo il prodotto globulare alla base, cioè nella porzione prossimale (1). La seconda cellula è in una fase più

(1) Circa al processo con cui i materiali nutritizii penetrano nelle cellule parietali, nessun fatto preciso ci autorizza a dire in qual modo ciò avvenga: si può supporre che essi penetrino dalla parte prossimale del protoplasma, che s' impianta su la membrana follicolare, per il fatto che ivi si formano i primi globuli di grasso, e che penetrano in forma liquida, non avendo mai veduto la loro penetrazione in forma corpuscolare. Il Monterosso (loc. cit.) descrisse nella teca del follicolo del maiale, e propriamente fra la *membrana propria folliculi* e la *teca interna*, alcune cellule, che verosimilmente preparerebbero il materiale, che sarebbe poi assorbito dalle cellule parietali. Nel citoplasma di tali elementi si rinvengono normalmente dei granuli, i quali poi si avvicinano alla parete delle cellule nella porzione, che è a contatto con la *membrana propria folliculi*, nella quale si accumula un prodotto, il quale deriverebbe da tali granuli. Nella Coniglia nulla di ciò si osserva, se si eccettui la ricca vascolarizzazione, formata dai capillari, le grosse cellule della *teca*, cariche di globuli adiposi, tinti in bruno rossastro col 3° metodo. Che tali diversi elementi della *teca*, debbano essere i portatori dei materiali, necessari all' assorbimento da parte delle cellule parietali della granulosa, viene convalidato dal fatto che il potere d'assorbimento nelle cellule della granulosa è maggiore in quella porzione della granulosa stessa, che è immersa nello stroma ovarico, dove la vascolarizzazione è abbondante e dove sono presenti le grosse cellule *tecali*. Quella porzione del follicolo, che sta al di sotto dell' epitelio germinativo, dal quale è separato dall'albuginea, essendo sprovvista spesso completamente di capillari e di cellule tecali, non presenta che un limitato potere di assorbimento. Tale diversità di comportamento delle cellule parietali, che

avanzata, avendo forma allungata con nucleo spostato in alto, per un maggiore accumulo del prodotto globulare nella stessa parte prossimale del protoplasma. Nelle cellule 3ª, 4ª e 8ª tale prodotto si è portato in parte al di sopra del nucleo, cioè nella porzione distale del protoplasma, per essere, dopo altre trasformazioni, versato nella cavità follicolare.

La fig. 2 rappresenta un pezzetto di granulosa parietale di follicolo anche in piena attività, appartenente a Coniglia lecitinata, trattato con il 3° metodo Ciaccio per la ricerca dei grassi. Anche in questa figura la forma delle singole cellule è varia ed il contenuto globulare, che assume la tinta rosso bruna, trovasi, in ciascuna di esse, in posizione diversa, secondo la fase dell'assorbimento. La fig. 3, ritratta a più forte ingrandimento, rappresenta una sezione quasi tangenziale di follicolo, anche in attività costruttiva, nella quale le porzioni distali della maggior parte delle cellule, sono staccate dalla parte prossimale. Nelle porzioni più lontane dalla basilare, che debbo ritenere come appartenenti alle cellule che hanno raggiunto la fase finale, nel momento in cui versano il prodotto dell' assorbimento nella *cavità follicolare*, si osservano, insieme ad alcuni globuli rossastri residuali, dei vacuoli, sparsi nel protoplasma o regolarmente allineati, specialmente nella regione periferica libera e quindi a contatto diretto con il liquido follicolare. In alcune di esse il margine libero si presenta frastagliato e ciò pare avvenga per avvenuto scoppio dei vacuoli, i quali, con siffatto processo, verserebbero il loro contenuto nella cavità (*antro*) del follicolo. Difatti, a contatto della superficie di tali elementi cellulari si trova una sostanza finemente granulare e non specificamente colorata, raccolta in piccoli ammassi, che ritengo sia il prodotto finale della secrezione, che farà parte del *liquor folliculi* (1). La fig. 5 rappresenta anche un piccolo tratto di granulosa, appartenente a Coniglia lecitinata, il cui follicolo fu trattato con il 1° metodo Ciaccio, per la ricerca dei *lipoidi*. In questa figura le cellule non presentano affatto il prodotto globulare adiposo, localizzato in punti determinati del protoplasma, ma hanno il protoplasma quasi uniformemente colorato in aranciato assai sbiadito, con granelli od esili filamenti sparsi, più intensamente colorati. Le cellule superficiali, che rappresentano la porzione distale, decapitata dal taglio, degli elementi, che hanno raggiunto la fase finale della secrezione interna, presentano il protoplasma, a contatto del liquido follicolare, frangiato per prominenze, costituite da granellini incolori, i quali si osservano anche al di fuori, sotto forma di piccoli grumi, come si vede meglio nella fig. 7, che rappresenta, a più forte ingrandimento, tre di simili cellule, che, come si è detto, sono le porzioni distali degli elementi nella fase finale dell'assorbimento, staccate dal taglio.

Gli elementi granulari, che prendono parte alla formazione del *liquor folliculi*, sono in massima parte incolore, ma in parte sono colorati in aranciato molto sbiadito. Gli stessi elementi, con la stessa tinta, si trovano nel liquido, che riempie *l' antro follicolare*, nei

---

fu riprodotta nella fig. 9 Tav. I, dimostra nella miglior maniera, in mancanza di altri argomenti, che i materiali necessari all'assorbimento, provengano dal tessuto ovarico, per via umorale, e che la *Lecitina* iniettata arrivi con questo mezzo agli apparati nutritori per essere infine immessa nell' ovo.

(1) Il processo col quale si costituisce il *liquido follicolare* è stato oggetto di varie ricerche. La maggioranza dei ricercatori, fra i quali l' Honorè (Archives de Biologie, T. VXI, 1900), che fece un riassunto delle varie opinioni emesse al riguardo, il Comes (loc. cit,), il Monterosso (loc. cit.) ed altri, ammettono che esso si formi per attività delle cellule della granulosa, ma, circa il meccanismo, che esplicano le cellule per tale formazione, ben poche notizie ci forniscono. L' indagare le modalità con cui gli elementi della granulosa preparano il materiale, che concorre alla formazione del liquido in parola, quale possa essere la sua natura, sostituendo, alle concezioni puramente induttive degli autori precedenti, una base positiva di fatti concreti, è stato scopo di queste ricerche.

preparati ottenuti con il *1⁰ metodo*, mentre, in quelli avuti con il 3° *metodo*, sono di una tinta giallastra assai sbiadita, simile alla tinta che, con lo stesso metodo, assume il protoplasma delle cellule follicolari.

Per tanto, è da escludere che nel liquido del follicolo in piena attività siano sostanze grasse, ma che invece esso sia costituito in massima parte da albuminoidi. Resterebbe a spiegare perciò, perchè le sostanze adipose, che si presentano con forma corpuscolare nelle cellule parietali, nei diversi momenti dell'assorbimento, non si versino come tali nella cavità follicolare e perchè le sostanze, derivate da tali corpuscoli adiposi, assorbite dall' ovo, ricompongano in questo di nuovo i globuli adiposi del *deutolecite*.

Per ora ci mancano elementi sicuri per risolvere tale importantissima questione ; però, possiamo ammettere, in base ai risultati delle osservazioni microscopiche, che l' ovo e le cellule del follicolo sono capaci di ricostituire prodotti adiposi identici e che perciò sono forniti di analoghe attività sintetiche.

4. — *Il prodotto globulare non si forma nelle cellule parietali dei follicoli giovani nelle Coniglie lecitinate, nè si forma nelle stesse cellule dei follicoli adulti nelle Coniglie normali.*

I globuli adiposi, che si osservano nelle cellule parietali, negli stadi più avanzati dello sviluppo del follicolo, come avanti furono descritti, non si trovano nelle stesse cellule dei follicoli meno sviluppati (fig. 8, Tav. I), per cui potrebbe ritenersi che tale prodotto di natura adiposa sia un segno della degenerazione grassa del follicolo medesimo. Ritengo però che ciò debba escludersi, prima di tutto perchè, anche nel primo caso, le cellule hanno il nucleo con reticolo cromatico normale, qualche volta in divisione cariocinetica (fig. 1), in secondo luogo, perchè i globuli, che rappresentano il prodotto dell' assorbimento di dette cellule , hanno caratteri microchimici diversi del grasso comune , quale si osserva nelle stesse cellule , quando sono cadute veramente in degenerazione. Se è vero che le cellule follicolari, con i globuli sopra accennati, andranno ben presto soggetti alla fase d' involuzione, non è men vero che essi, per un momento, anche breve, se si voglia, debbono ritenersi integre nelle loro parti e *funzionalmente identiche* alle stesse cellule parietali, prive di globuli, dei follicoli meno sviluppati. Difatti, nei follicoli pluristratificati o in quelli, in cui la cavità follicolare è poco sviluppata , i prodotti globulari sono assenti , è vero , in tutte le cellule, ma quelle che poggiano sulla membrana follicolare, per la forma allungata e per la differente posizione del nucleo, è da ritenere che compiano la stessa funzione di assorbimento.

Il prodotto globulare, che si forma nelle cellule parietali dei follicoli adulti, nelle Coniglie lecitinate, non si osserva che raramente nei follicoli allo stesso stadio delle Coniglie normali. Ciò conferma che l' assorbimento molto intenso di materiali nutritizi, da parte delle cellule follicolari, nelle Coniglie lecitinate, determina, nel periodo finale dell' evoluzione del follicolo, un deposito di materiali sotto forma di globuli adiposi.

5.— *La sintesi dei grassi, che si compie nell'ovo, si compie anche nelle cellule follicolari in condizioni e tempi diversi. Cause determinanti l'estinzione della funzione di assorbimento.*

Nella fig. 8 della Tav. I, richiamata all'attenzione del lettore nel paragrafo precedente, che rappresenta un follicolo, in cui s' inizia la formazione della cavità follicolare, appartenente a Coniglia lecitinata, tutti gli elementi della granulosa e la *zona pellucida* sono

affatto privi di prodotti adiposi , mentre l' ovo soltanto ne è riccamente provvisto. Tale reperto dimostra che la sintesi dei grassi avvenga solo nell' ovo, in un determinato momento dell' evoluzione del follicolo ; ma, per i fatti sopra esposti, è da ritenere che tale sintesi si compia anche nelle cellule della granulosa , quando l' evoluzione è avanzata e l' ovo si è saturato di materiali deutolecitici.

Se seguiamo, difatti, l' ulteriore evoluzione dell' ovisacco, osserviamo che nel follicolo, a sviluppo completo, la regione più lontana dell' ovo è sempre quella in cui il prodotto dell' assorbimento si presenta sotto forma di granuli adiposi , come si vede nella fig. 9ª della Tav. I. Le cellule invece, che formano la *zona radiata*, e quelle adiacenti all'ovo, che occupano la regione opposta dell' ovisacco, come si vede nella stessa figura, ne sono affatto sprovviste, non ostante le più periferiche, che poggiano sulla membrana del follicolo, abbiano tale forma e posizione del nucleo da farle ritenere in funzione di assorbimento.

Sorge pertanto il problema, perchè le cellule *parietali distali*, nei follicoli abbastanza progrediti nello sviluppo, contengono in un primo tempo un prodotto globulare di natura adiposa, simile a quello dell' ovo, e quelle *prossimali* ne sono sprovviste, perchè tali materiali, come si è detto, non si formano in alcuna delle cellule dei giovani follicoli.

La ragione del diverso comportamento delle cellule della granulosa nei diversi momenti dell' evoluzione dell'ovisacco, può essere data dai vari rapporti, che intercedono tra lo sviluppo dell' ovo e quello del follicolo. Quando l'ovo ha ricevuto dalle cellule follicolari una gran parte dei materiali, necessari a formare il *deutolecite*, e quindi cessa di assorbirne nella stessa misura, le cellule parietali più lontane cessano anche esse di versare all' esterno il prodotto dell' assorbimento, il quale, permanendo nella cellula, ricompone per sintesi gli stessi materiali adiposi, che sono caratteristici nella cellula-ovo. Forse, a meglio spiegare ed intendere tutto ciò, bisogna ritenere che gli elementi, che dovevano costituire tali materiali, subiscono l' ulteriore destino anche non penetrando nell' ovocite.

Avendo, insomma, tali granuli adiposi nelle cellule follicolari, come lo dimostrano le reazioni microchimiche, la stessa natura dei globuli di deutolecite, è da ritenere che analoga sintesi si compia nei due elementi dell' ovisacco (1).

Il prodotto globulare però, che, in un primo tempo, si osserva nelle cellule più lontane dall' ovo, nella parietale più profondamente situata nello stroma ovarico, in tempi successivi si riscontra anche nelle cellule più vicine. Tale fatto, a mio parere, conferma che, mentre gli elementi più lontani cessano per i primi di fornire all' ovo i materiali nutritizi, la funzione d'assorbimento, a misura che l' evoluzione del follicolo progredisce e l' ovo si è provveduto di tutto il *deutolecite* , a poco a poco si estingue anche nelle cellule della regione prossimale. La presenza di questi materiali adiposi , quando si estende a tutte le cellule della granulosa, attesta che in ognuna di esse stia per cessare o sia cessata la funzione d' assorbimento, nello stesso modo che la loro mancanza, in tutte le cellule dei follicoli giovani, dimostra che queste sono in piena attività e che il prodotto dell'assorbimento viene utilizzato soltanto dall' ovo (2).

(1) Vedi al riguardo il mio lavoro precedente , nel quale era stato di già dimostrato che i globuli di *deutolecite* si ricompongono, per attività sintetica dell' ooplasma, dai materiali penetrati attraverso la *zona pellucida* : *Ulteriori ricerche su l' origine del deutolecite nell' ovo di Coniglia*.—Atti Acc. Gioenia — Catania, Ser. V, Volume X, 1917.

(2) Se è vero che l'ovo e le cellule follicolari circostanti formano un sistema cellulare, in cui esistono rapporti di dipendenza, e tutto l' insieme si può paragonare ad una glandula, che ha nell' ovo il punto di

6. — *Causa della degenerazione grassa, sua progressione nelle cellule follicolari e modalità con le quali tale processo si svolge.*

I depositi di granuli adiposi nel protoplasma delle cellule follicolari, mentre ci rendono più chiara la funzione d'assorbimento ed i rapporti che intercedono tra tali cellule e l'evoluzione dell'ovo, ci aprono l'adito alla conoscenza delle cause della degenerazione, che segue subito dopo. I depositi sudetti, infatti, non potendo essere versati all'esterno e permanendo nel protoplasma, arrecano dei disturbi nel ricambio materiale della cellula; per cui, anche in questo caso, possiamo dire che la degenerazione grassa si collega con le cause già note, che determinano lo stesso fenomeno in altri tessuti. Fra tali cause, infatti, oltre l'intossicazione, l'elevazione di temperatura, etc., si annoverano anche i turbamenti del metabolismo cellulare (1), come appunto avviene nelle cellule follicolari, per le difficoltà intervenute negli scambi nutritizi tra tali cellule e l'ovo, nel periodo finale dell'evoluzione del follicolo.

Che esista una relazione tra la *degenerazione grassa* e lo stato particolare del metabolismo cellulare, determinato dall'accumularsi dei materiali assorbiti e non versati all'esterno, viene dimostrato dal modo con cui progredisce la degenerazione stessa nelle varie regioni del follicolo. Difatti, analogamente a quanto fu detto nel paragrafo precedente, anche la degenerazione si manifesta in origine nelle cellule della parietale più lontane dall'ovo e gradatamente progredisce in quelle più vicine, fino a raggiungere in ultimo l'ovo stesso.

Le figure 6ª 7ª e 8ª della Tav. II dimostrano che il processo degenerativo progredisce dalla periferia al centro dell'ovisacco; per cui, come si vede nella fig. 7ª Tav. II, è un momento dell'evoluzione, nel quale, mentre le cellule di tutta la *parietale* sono degenerate o in via di degenerazione grassa, solo quelle che formano la *zona radiata* sono ancora integre e normali e l'ovo non ha ancora raggiunto la *degenerazione grassa*. Nella fig. 8ª Tav. II, che rappresenta invece uno stadio finale dell'evoluzione, anche le cellule adiacenti all'ovo sono in stato d'involuzione e l'ovo perciò è anch'esso in degenerazione.

Il fenomeno, guardato più da vicino, suole manifestarsi con modalità peculiari. Da principio, sono solo alcune cellule interne della granulosa parietale, a contatto con il liquido follicolare, che presentano i caratteri degenerativi. Come si vede nella fig. 1ª della Tav. I, tali cellule hanno il nucleo più piccolo dell'ordinario, picnotico e con contorno sinuoso, il protoplasma vacuolizzato con un residuo di granuli adiposi, ricostituiti per sintesi, come si è detto, dai materiali assorbiti.

Nella fig. 4ª Tav. I, che rappresenta un breve tratto di parietale, appartenente invece a follicolo in evidente fase degenerativa, le cellule sono più piccole del normale ed alcune sono legate alla membrana follicolare da un peduncolo, mentre la parte ingrossata, posta verso l'interno, è in degenerazione. Tali cellule finiscono per staccarsi, per cui, rendendosi

raccolta del secreto, ci sarà lecito stabilire, per riguardo alla comparsa di granuli adiposi nel periodo finale dell'attività del follicolo, un confronto con le glandule comuni. Difatti, similmente a quanto si osserva nelle cellule glandulari, in cui il prodotto della secrezione (*globuli di secreto, ecc.*) comparisce nella fase finale della loro attività, nelle cellule della *granulosa* i globuli suddetti, che possono considerarsi anche un prodotto di elaborazione glandulare, si formano al termine dell'evoluzione del follicolo ovarico (cfr. Prenant, Bonin e Maillard — Traitè d'Histologie. Vol. 1. pag. 479).

(1) A. LUSTIG — Trattato di Patologia generale. Vol. 1 — pag. 421, Milano. Soc. edit. libraria, 1915.

indipendenti, si arrotondano e si spargono nella cavità follicolare, dove se ne trovano in diverso stato di degenerazione. La stessa sorte, ad una la volta, tocca a tutte le cellule che

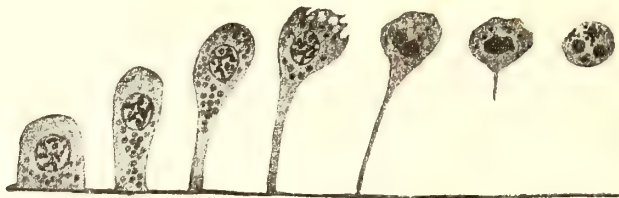



**Fig. 1ª** — Stadi diversi dell' *assorbimento*, della *secrezione interna* e della successiva *degenerazione grassa*, in una cellula della *granulosa parietale*, di Coniglia lecitinata.
La cellula, dopo avere fornito il secreto, si stacca dalla *membrana propria folliculi* e si arrotonda, subendo la degenerazione grassa. (*Figura semischematica*).

sono impiantate su la membrana follicolare, per cui su questa, quando la degenerazione è inoltrata, non si trovano più che pochi elementi.

La degenerazione delle cellule, come fu riprodotto nella fig. 10 della Tav. I, procede in modo affatto caratteristico. Da principio il nucleo subisce un processo di *cromolisi*, in quanto che la cromatina si discioglie, formando una massa più tosto uniforme (b); in seguito essa si addossa alla membrana nucleare, dove si raccoglie in masse più o meno vistose (c) o pure forma dei grossi globuli, stivati fra loro (d). Negli stadi finali della degenerazione, il nucleo si riduce ad uno o due globuli fortemente colorati (e, f), che divengono sempre più piccoli e sbiaditi (h, i) e che in ultimo scompaiono. Mentre il nucleo subisce tali mutamenti, nel protoplasma appariscono alcuni granuli di grasso (b, c), che assumono con i liquidi osmici una tinta nera intensissima, diversa perciò dai globuli adiposi, sopra descritti nelle cellule follicolari e nell' ovo. Tali granuli diventano sempre più grandi e si trasformano in globuli di diversa grandezza (d, e), che, confluendo fra loro, formano alcune volte degli ammassi rotondeggianti molto vistosi (g). Nella fase ultima della degenerazione, mentre il nucleo, come si è detto, si atrofizza (h, i), anche i materiali adiposi scompaiono a poco a poco, e la cellula diviene sempre più piccola, per cui, a degenerazione completa, nella cavità follicolare si trovano piccoli elementi uniformemente e leggermente colorati dalla Saffranina (l, m).

7. — *L'ovo ha un ciclo vitale, che è in relazione con quello delle cellule follicolari ed entrambi gli elementi dell' ovisacco formano un sistema armonico. Caratteri delle ova anaboliche e delle ova cataboliche. Accelerazione del processo evolutivo del follicolo nelle Coniglie lecitinate.*

Abbiamo detto che alla prima fase della vita del follicolo, durante la quale l' ovo cresce ed accumula il deutolecite, segue una seconda fase, in cui le cellule della granulosa parietale, per un ristagno di materiali assorbiti, entrano in degenerazione grassa, e che questo secondo processo s'inizia nel punto più lontano dall'ovo e gradatamente si avanza fino a raggiungere la granulosa ovulare. Nelle diverse tappe, che così percorre il follicolo, l'ovo ne risente gli effetti, ma non può dirsi degenerato quando tale processo è nella sua fase iniziale, cioè, quando ha cominciato a colpire le cellule della granulosa parietale. L'ovo muta il suo metabolismo, ma non degenera normalmente che nella fase terminale

dell' evoluzione del follicolo , quando esso stesso è invaso dalla *degenerazione grassa* , come le cellule follicolari, che lo hanno preceduto nell' evoluzione del ciclo vitale. Se, come criterio dell'avvenuta degenerazione, bisogna tenere presente l'impossibilità, in cui si trova l' elemento cellulare di compiere la funzione, alla quale è originariamente destinato, l'ovo non deve considerarsi degenerato, fino a che può cadere nelle trombe uterine ed essere fecondato, essendo questa la sua ultima finalità.

Come è stato esposto in precedenti lavori (1) e come meglio sarà illustrato in uno di prossima pubblicazione (2), l'ovo della Coniglia, nei diversi momenti del suo ciclo vitale, ha l' ooplasma fornito di prodotti diversi, in dipendenza del diverso metabolismo, che in esso si compie nei vari periodi dell'evoluzione del follicolo. Nei follicoli a completo sviluppo, in cui tutte le cellule, sia della *parietale* sia dell' *ovulare*, sono normali (fig. 5, Tav. II), l' ovo è caratterizzato da globuli a struttura mielinica di natura adiposa, sparsi in tutto l' ooplasma, come si vede nella fig. 1ª della Tav. II, o localizzati in una larga zona periferica. Tali follicoli, che hanno tutte le cellule integre ed in piena attività di assorbimento e che sono quindi nella fase culminante della loro *attività anabolica (fase anaplastica)*, forniscono *ova anaboliche*, che cadono nelle trombe e sono fecondate.

L'ovo, riprodotto nella fig. 1ª della Tav. II, fu sorpreso sulla superficie dell' ovaia, in corrispondenza del follicolo scoppiato, che aveva caratteri identici a quello rappresentato nella fig. 5ª della stessa Tavola. In tale ovo si è soltanto formato il *1° fuso polare*, per cui è da ritenere che le *ova anaboliche* possono cadere nelle trombe quando ancora i *polociti* sono in via di formazione e ciò a differenza delle *ova cataboliche*, che, come si dirà, possono cadere nelle trombe quando le *vescicole polari* sono entrambe costituite.

Nei follicoli, che sono in un periodo più avanzato della loro evoluzione, cessando nelle cellule *parietali distali* la funzione d' assorbimento e cadendo alcune di esse in degenerazione, come si vede nella fig. 6ª della Tav. II, anche il primitivo metabolismo si trasforma. In tali condizioni le ova cominciano a decomporre i materiali deutoplasmici, che prima avevano accumulato, iniziandosi così la *fase cataplastica.* In questo periodo compariscono nell' ooplasma i prodotti della decomposizione del *deutolecite* , sotto forma di Cristalli di un *Acido grasso* (3), che in principio sono sparsi regolarmente in tutta la rete ooplasmica, come si vede nella fig. 2ª della Tav. II. Anche in tali condizioni i follicoli possono scoppiare e le ova cadere nelle trombe per essere fecondate, come ripetutamente si è osservato in molte di esse, raccolte nelle trombe, dopo l' avvenuto accoppiamento (4).

In queste ova, quando ancora sono nell' ovaia, come si vede nella fig. 2ª della Tav. II, si è già formato il *1° polocite* e sta per costituirsi il *2°*, per cui può ritenersi che in dette ova, a differenza di quelle anaboliche, la formazione delle *vescicole polari* è al completo quando esse cadono nelle trombe.

Per quanto si è detto, a tale riguardo, può ammettersi che tra le *ova anaboliche* e

(1) A. RUSSO — Sui prodotti del diverso tipo di metabolismo osservato nelle ova di Coniglia. Archivio di Fisiologia — Firenze, 1910.

(2) A. RUSSO — Sui prodotti del metabolismo nelle ova ovariche e nelle ova tubariche della Coniglia, con riguardo alla degenerazione degli embrioni derivati dalle ova cataboliche.

(3) Come sarà meglio dimostrato nella Memoria di prossima pubblicazione, sopra indicata , si tratta di *Cristalli di Acido stearinico.*

(4) A. RUSSO — Sul diverso tipo di metabolismo delle ova embrionate di Coniglia. Bollettino Acc. Gioenia di Sc. Nat. — Catania, 1911.

quelle *cataboliche*, oltre che per i diversi prodotti del metabolismo, esista una sostanziale differenza, per quanto riguarda lo sviluppo dei *polociti;* prova ne sia il fatto che i relativi follicoli scoppiano in diversi stadi dell' evoluzione.

Nei follicoli, in cui la *degenerazione grassa* ha colpito tutti gli elementi della *parietale* e gran parte dell' *ovulare*, l' ovo incomincia anch' esso a degenerare. In queste ova i cristalli di *Acido grasso*, che nella fase precedente si osservano sparsi regolarmente su tutta la rete ooplasmica, si raccolgono in tanti gruppi (fig. 3ª Tav. II), dentro a ciascuno dei quali si formano dei globuli di *grasso comune* (fig. 4ª Tav. II), ricostituito per sintesi dagli *Acidi grassi* stessi. In questo stadio l' ovo ha raggiunto la fase finale della sua evoluzione, con la quale si chiude il suo ciclo vitale (1).

Per tanto, può ritenersi che l' evoluzione dell' ovo sia dipendente dall' attività che si svolge nelle cellule follicolari e che gli elementi dell'ovisacco formino un *sistema armonico*. Le cellule follicolari assorbono i materiali nutritizi, che apprestano all' ovo; questo, durante il periodo d'accrescimento, li accumula sotto forma di *deutolecite* e quando cessa di assorbirne degli altri, perchè ha raggiunto il massimo suo sviluppo, anche quelle non ne assorbono più e cadono in *degenerazione grassa*. In tali condizioni l' ovo, restando nell'ovaia, decompone i materiali, che prima aveva accumulato, ed in ultimo subisce anch' esso la *degenerazione grassa*.

In accordo con i fatti sopra riferiti, tutto il ciclo vitale dell' ovo della Coniglia e del follicolo, che lo contiene, può essere rappresentato da una curva (A, C, B), come si vede nella fig. qui annessa. La parte ascendente di detta curva (A, C) rappresenta il periodo di

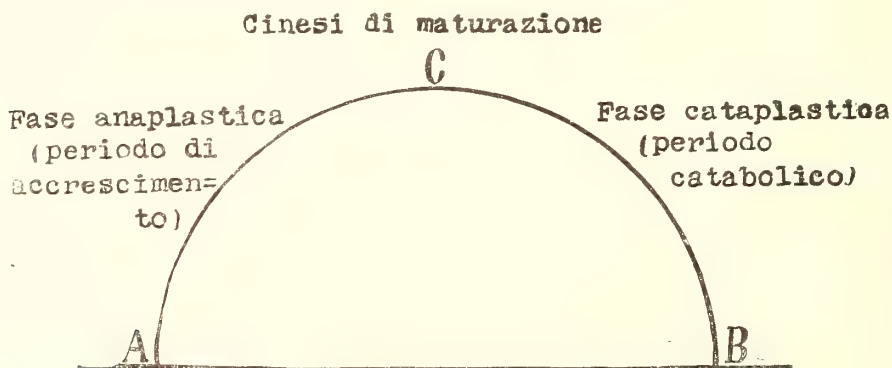



Fig. 2ª — Rappresentazione schematica del ciclo vitale dell' ovo di Coniglia.

accrescimento (*fase anaplastica*), durante il quale le cellule follicolari assorbono i materiali e l' ovo accumula il deutolecite; la sommità (C) è il *punto optimum* di detta fase, in cui l'ovo, avendo raggiunto il massimo suo sviluppo, inizia la formazione delle *cellule polari*; la parte discendente (C, B) rappresenta invece la fase del ciclo vitale, in cui il

(1) Il processo di decomposizione dei *globuli deutolecitici* e successivamente quello di degenerazione dell' ovo, può iniziarsi in periodi di sviluppo dell' ovisacco, precedenti a quelli descritti, come stadi tipici dell' evoluzione normale del follicolo. La spiegazione di tali casi potrebbe essere data, ammettendo che l' ovo abbia assorbito precocemente, per un' abbondante irrigazione dell' ovisacco, il materiale necessario allo sviluppo del *deutolecite* e che le cellule follicolari di conseguenza abbiano anche precocemente cessato di assorbirne altri, cadendo perciò in degenerazione per il ristagno di detti materiali. Analoga causa potrebbe assegnarsi per la formazione dei cosidetti *corpi lutei falsi*,

follicolo non assorbe più e quindi degenera, mentre nell' ovo il deutolecite si decompone (*fase cataplastica*).

In dipendenza di quando sopra si è detto, ho potuto constatare che nelle Coniglie trattate con la *Lecitina*, a causa dell'abbondante nutrizione dell'ovaia, artificialmente provocata, il processo evolutivo dei follicoli subisce un' accelerazione, in quanto essi percorrono il ciclo, sopra descritto, più rapidamente del normale. Risulta, difatti, dall' esame di tutti i follicoli, contenuti in entrambe le ovaie, tratte da varie Coniglie lecitinate, che gran numero di essi sono in *catabolismo*, avendo la granulosa in via di degenerazione e le ova con cristalli di *Acido grasso*, derivati dalla decomposizione dei globuli di *deutolecite*, e che il numero totale è superiore sempre a quello dei follicoli, raccolti da Coniglie normali, tenute presenti per controllo (1).

Tale constatazione di fatto, che sarà dettagliata in un prossimo lavoro, ha un valore speciale per la interpretazione dei risultati sperimentali, già da me precedentemente ottenuti, riguardanti le cause del sesso dei nati delle Coniglie, iniettate con *Lecitina.*

## CONCLUSIONI

In base ai fatti sopra esposti possiamo dire anzitutto che rimane sempre più convalidato il concetto, già da me espresso in precedenti lavori, cioè che, sotto l'azione di stimoli appropriati, come nella Coniglia si è ottenuto con le *iniezioni di Lecitina* e col *digiuno*, si possono esagerare alcune strutture, avendosi così dei reperti, che spesso mettono l' osservatore in condizione di determinare meglio la funzione di alcuni gruppi cellulari.

I fatti si possono così riassumere :

1. — Le cellule parietali della granulosa del *follicolo di Graaf* della Coniglia hanno una funzione di assorbimento e di secrezione interna, che viene rivelata dalla forma che esse assumono, dal contenuto protoplasmatico, dalla posizione del nucleo, che è diversa secondo la fase ;

2. — Tale funzione si rende più evidente nelle Coniglie trattate con *Lecitina*, perchè il prodotto dell' assorbimento, in un determinato momento della vita del follicolo, quando, cioè, l' ovo cessa di assorbire nuovi materiali per lo sviluppo del *deutolecite*, si mostra sotto forma di globuli adiposi ;

3. — Tali globuli, che hanno la stessa natura microchimica dei globuli di deutolecite, si ricostituiscono per sintesi nella cellula follicolare allo stesso modo con cui essi si costituiscono nell' ovo ; entrambi gli elementi mostrano di avere, anche per tale riguardo, le stesse attitudini fisiologiche ;

4. — La presenza di detti globuli nelle cellule follicolari indica che in esse è cessata o sta per cessare la funzione di assorbimento. L' assenza o la presenza di tali prodotti è in rapporto con lo stadio d' evoluzione dell' ovisacco e con la crescita dell'ovo, in quanto che, mentre non si osservano nei giovani follicoli, sono presenti in quelli che hanno rag-

(1) Nella Memoria, pubblicata nel 1907 negli Atti della R. Accademia dei Lincei, furono riprodotte, nelle figure 17 e 18, Tav. V, due fotografie, nelle quali chiaramente può osservarsi lo stato diverso in cui si trovano le ovaie delle Coniglie normali e delle Coniglie ipernutrite con Lecitina. Le prime sono relativamente piccole e con pochi follicoli maturi, le seconde sono molto più grosse e con maggior numero di follicoli allo stesso stadio.

giunto il massimo sviluppo, nei quali l'ovo non assorbe più materiali per lo sviluppo del *deutolecite*;

5. — Il liquido follicolare è un prodotto di secrezione interna delle cellule follicolari;

6. — Quando il follicolo ha raggiunto la maturità e l'ovo ha assorbito i materiali necessari allo sviluppo del *deutolecite*, le cellule parietali più lontane dall'ovo, cessando per le prime a versare all'esterno il prodotto di assorbimento, sono anche le prime a mostrare nel protoplasma il prodotto globulare e quindi a subire la ***degenerazione grassa***. Nell'ulteriore evoluzione del follicolo, tale processo si estende gradatamente nelle regioni adiacenti, fino a raggiungere le cellule della ***granulosa ovulare***;

7. — La ***degenerazione grassa*** avviene per distacco delle *cellule parietali* dalla ***membrana propria folliculi*** e ciò è causato da un disturbo del *metabolismo cellulare*, dovuto alla presenza di materiali assorbiti e non versati all'esterno;

8. — Il processo di ***degenerazione grassa*** si compie con ***cromolisi*** e conseguente frammentazione ed atrofia nucleare, con comparsa di granuli di grasso comune, che diventano poi globuli o goccie. In ultimo il grasso sparisce e l'elemento è ridotto ad un grumo di protoplasma, che si colora poco e che finalmente si frammenta in tanti granelli che entrano a far parte del liquido follicolare;

9. — Il grasso, contenuto nelle cellule in ***degenerazione grassa***, è microchimicamente diverso dalla sostanza che compone i globuli adiposi, contenuti nelle cellule parietali in funzione di assorbimento;

10. — L'ovo è l'ultimo a subire la ***degenerazione grassa***, la quale si svolge quasi analogamente a quella delle cellule follicolari;

11. — L'ovo e le cellule del follicolo formano nella Coniglia un sistema armonico, nel quale si possono distinguere diversi gradi di evoluzione. Nel 1° periodo il follicolo assorbe e l'ovo accumula i materiali deutolecitici e quindi tutto l'insieme è nella ***fase anaplastica*** (fig. 5ª Tav. IIª), caratterizzata dalle cellule follicolari tutte integre e dall'ovo carico di globuli deutolecitici. Quando questa fase ha raggiunto il suo culmine, non assumendo più l'ovo in egual misura materiali dall'esterno, alcune cellule del follicolo, non versando i prodotti assorbiti, per disturbi del loro metabolismo, cominciano a subire la ***degenerazione grassa***, (fig. 6ª Tav. IIª). All'inizio della degenerazione del follicolo, l'ovo decompone i materiali lecitici accumulati ed i prodotti della decomposizione compariscono nell'ooplasma, sotto forma di ***Cristalli di Acido grasso***. In tal modo s'inizia il 2° periodo della vita del follicolo, che entra così nella ***fase cataplastica***, la quale procede (figg. 7ª ed 8ª Tav. IIª) fino alla degenerazione completa di tutte le cellule follicolari ed alla ***degenerazione grassa*** dell'ovo.

12. — L'ovo anabolico può cadere nelle trombe quando ancora i ***polociti*** sono in via di formazione, l'*ovo catabolico* cade quando questi sono già costituiti;

13. — Nelle *Coniglie lecitinate*, in conseguenza di un assorbimento più attivo di materiali nutritizi, da parte delle cellule follicolari, si avvera un'*accelerazione* negli stadi evolutivi dei follicoli, per cui molti di essi raggiungono più presto del normale la *fase catabolica* e quindi la *degenerazione*.

*Catania, 1° maggio 1917.*

# APPENDICE

## Su le cause determinanti il sesso dei nati nella Coniglia.

Da quanto è stato esposto in questo lavoro (cfr. specialmente il § 7) risulta che l'ovo della Coniglia può cadere nelle trombe ed essere fecondato in condizioni diverse, che corrispondono a momenti diversi dell' evoluzione del follicolo. Le modificazioni che subisce il follicolo nelle varie fasi dell' evoluzione, ci può dare oggi la spiegazione di alcuni risultati sperimentali, già da me esposti in precedenti lavori, che trattano la ricerca delle cause della sessualità in questo Mammifero.

Il risultato iniziale dei miei studi fu che, ipernutrendo le Coniglie con iniezioni di *Lecitina*, si aveva per lo più nel parto, che seguiva immediatamente a tale trattamento, un maggior numero di nati di sesso femminile. In base alle attuali ricerche, tale risultato troverebbe la sua naturale spiegazione, in quanto che la *ipernutrizione dell' ovaia*, ottenuta a mezzo della *Lecitina*, determina un' accelerazione del processo evolutivo dei follicoli; di guisa che molti di essi, raggiungendo più presto del normale la *fase cataplastica* e quindi la *degenerazione*, hanno minore probabilità di scoppiare, quando sono in catabolismo più tosto avanzato, e perciò compiono generalmente tale funzione quando ancora sono in uno stadio precedente dell' evoluzione.

Le posteriori ricerche, instituite allo scopo di determinare meglio la causa del fenomeno, mi hanno messo in grado di confermare il risultato iniziale e di apportare un corredo di nuovi fatti, che avvalorano sempre più quanto sopra si è detto.

Partendo dal fatto che lo scoppio dei follicoli nella Coniglia è determinato dal *coito*, cioè dalla presenza di spermi nelle trombe, come dimostrarono Regaud e Dubreuil (1), in opposizione alla teoria di Fränkel (2), era lecito supporre che le diverse condizioni dello sperma, più o meno vivace e vitale, potesse determinare lo scoppio di alcuni follicoli e di altri no, con relativa indipendenza dallo stato d' evoluzione più o meno avanzato, in cui essi si vengano a trovare. È risultato, infatti, da apposite ricerche (3), che lo sperma dei Conigli, tenuti a conveniente digiuno, è più vivace e dura più lungamente in vita di quello dei Conigli lecitinati o normali, come può rilevarsi dal seguente quadro, e che tale condizione ha un' influenza sul numero dei nati e sul loro sesso.

(1) Influence du mâle sur les fonctions ovariennes. *Lyon médical*, 30 Août 1908.

(2) Die Function des Corpus luteum, *Arch. für Gynäkologie* LXVIII, 1903.

(3) A. RUSSO. Influenza del riproduttore sulla proporzione numerica dei nati dei due sessi nella Coniglia. *Archivio di Fisiologia*. Vol. XIV, Firenze 1915.

**Risultati di esperimenti fatti con sperma, tenuto in stufa Koch, ricavato da Conigli lecitinati e da Conigli denutriti**

CONIGLI LECITINATI

| Data | Ora in cui fu messo lo sperma nella stufa | Ora in cui cessarono i movimenti degli spermi | Durata della vitalità degli spermi | Vitalità media |
|---|---|---|---|---|
| 17-12-912 | 9h. 30′ | 15h | 5h. 30 | |
| 10-3-913 | 8h | 11h | 3h | 4h. 19′ |
| 11-3-913 | 8h | 13h | 5h | |
| 9-5-913 | 7h. 30′ | 11. 15′ | 3h. 45 | |

CONIGLI DENUTRITI

| Data | Ora in cui fu messo lo sperma nella stufa | Ora in cui cessarono i movimenti degli spermi | Durata della vitalità degli spermi | Vitalità media |
|---|---|---|---|---|
| 17-12-912 | 9h. 45′ | 17h. 30′ | 7h. 45′ | |
| 10-3-913 | 8h. 15′ | 14h | 5h. 45′ | 5h. 4′ |
| 11-3-913 | 9h | 14h. 30′ | 5h. 30′ | |
| 9-5-913 | 7h. 40′ | 11h. 35′ | 3h. 55′ | |

Tale costatazione di fatto e l' altra constatazione, riguardante l' accelerazione dell'evoluzione del follicolo, determinata dall' ipernutrizione dell' ovaia, come si è dimostrato nel presente lavoro, può dare la spiegazione della diversità dei risultati, ottenuti in seguito ad accoppiamenti tra *Coniglie lecitinate* con *Conigli* anche *lecitinati* e tra *Coniglie lecitinate* con *Conigli digiunanti*.

Nel 1° caso, si è ottenuta una maggioranza di nati di sesso femminile con nati di sesso maschile in numero assai esiguo, e ciò in conformità del risultato iniziale dei miei esperimenti; nel 2° caso invece si è ottenuto quasi lo stesso numero di nati di sesso femminile ed un numero molto elevato di maschi, avendosi così nell' insieme un numero maggiore di nati del gruppo precedente, come può rilevarsi dal seguente specchietto.

**Risultati di accoppiamenti tra Coniglie lecitinate con Conigli anche lecitinati e rispettivamente con Conigli denutriti.**

| I GRUPPO (♀ × ♂ ugualmente ipernutriti) | | | | | | II GRUPPO (♀ ipernutrita × ♂ denutrito) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° PARTO | | | 2° PARTO | | | 1° PARTO | | | 2° PARTO | | |
| Data | Num. dei nati ♂ | Num. dei nati ♀ | Data | Num. dei nati ♂ | Num. dei nati ♀ | Data | Num. dei nati ♂ | Num. dei nati ♀ | Data | Num. dei nati ♂ | Num. dei nati ♀ |
| 11-3-912 | 2 | 3 | 20-4-912 | 1 | 2 | 20-4-912 | 3 | 3 | 4-4-912 | 5 | 3 |
| 1-4-912 | — | 2 | 6-5-912 | 2 | 3 | 9-3-912 | 5 | 3 | 16-4-912 | 5 | 4 |
| 28-3-912 | 2 | 3 | 5-5-912 | — | —(**) | 24-2-912 | 5 | 1 | 3-4-912 | 6 | 2 |
| 13-2-912 | 3 | 2 | 5-4-912 | 2 | 4 | 11-3-912 | 2 | 3 | 29-4-912 | 5 | 2 |
| Totali | 7 | 10 | ..... | 5 | 9 | ..... | 15 | 10 | ..... | 21 | 11 |

(*) Uno dei due maschi di ciascun gruppo (ipernutrito-denutrito) fu adoperato per sole due coniglie, rimanendo costante per le stesse femmine nell' accoppiamento successivo.

(**) I neonati furono mangiati dalla madre prima di essere osservati.

A tale riguardo, così mi esprimevo nella Nota avanti citata:

" L'avere ottenuto un maggiore numero di nati nelle Coniglie del 2° gruppo (♀ ***ipernutrita*** e ♂ ***denutrito***) e conseguentemente un maggior numero di maschi, mi fa ritenere che la maggiore vivacità e vitalità degli spermi del maschio denutrito faccia cadere nelle ***tube*** alcune ova, che, nelle condizioni normali del riproduttore, non cadrebbero e che quindi le ***ova stesse siano quelle destinate al sesso maschile.*** "

Comproverebbe tale fatto l'avere ottenuto in entrambi i gruppi (♀ ***ipernutrita*** × ♂ ***ipernutrito*** — ♀ ***ipernutrita*** × ♂ ***denutrito***) un uguale numero di femmine (ricordare i totali del quadro precedente e cioè: 10-9; 10-11 rispettivamente), le quali verosimilmente sono prodotte da ***ova anaboliche***, contenute in follicoli, in cui il processo catabolico non si è ancora iniziato, le quali ova cadono nelle trombe, date le medesime condizioni di nutrizione dell'ovaia, perchè nei due gruppi la ♀ è sempre ipernutrita, pressochè nello stesso numero. Le ova per maschi sarebbero invece quelle contenute in follicoli, che hanno raggiunto uno stadio avanzato dell'evoluzione, il cui scoppio può solo essere determinato dalla maggiore vivacità e vitalità degli spermi. In questo caso, come si è detto, ad un maggior numero di nati corrisponde il fatto salientissimo che il di più della natalità è rappresentato da individui di sesso maschile e precisamente 7 e 5 nel I gruppo e 15 e 21 del II gruppo.

Tali risultati verrebbero convalidati, come dissi altrove, dal fatto già noto, che i ***natimorti*** presentano un'elevata percentuale di maschi, ciò che proverebbe gli embrioni, che derivano da ***ova cataboliche*** in avanzato catabolismo, spesso non raggiungono il pieno sviluppo.

Altri risultati, che saranno dettagliati in un prossimo lavoro (1), dimostrano inoltre che nelle trombe uterine della Coniglia possono cadere, in seguito all'accoppiamento, ova in avanzato catabolismo e che anzi alcune sono in evidente degenerazione. Molte di esse, cariche di cristalli di acidi grassi, si segmentano, ma, in questo caso, si ha una segmentazione anomala, in quanto che alcuni ***blastomeri*** si frammentano, facendo acquistare alle cellule del ***blastoderma*** una forma assai irregolare. Tali formazioni embrionali sono destinate ben presto a perire, ma la loro presenza nelle trombe uterine sta a confermare che negli accoppiamenti delle Coniglie possono cadere le ova cataboliche in diversi stadi e propriamente:

1°) che alcune di esse, in cui il processo catabolico non è molto inoltrato, e che possiamo dire nella 1ª fase del catabolismo, seguono il corso regolare dello sviluppo e producono embrioni viventi, di sesso maschile;

2°) che altre, in più avanzato catabolismo, pur sviluppandosi, producono embrioni morti dello stesso sesso;

3°) che altre, infine, si segmentano irregolarmente e ben presto periscono.

Le ova veramente degenerate, che ho raccolte, dopo l'accoppiamento, anche qualche volta nelle trombe, non furono mai viste fecondate.

Allo scopo di chiarire meglio in qual modo si possa concepire il diverso momento evolutivo, in cui si trovano le ova, contenute in un'ovaia di Coniglia al momento del coito, ho concretato in uno schema quanto risulta dai fatti sopra esposti. In questo schema fu

---

(1) A. RUSSO — Sui prodotti del metabolismo nelle ova ovariche e nelle ova tubariche della Coniglia, con riguardo alla degenerazione degli embrioni derivati dalle ova cataboliche.

tenuto soltanto conto degli stadi più caratteristici; così la *fase anaplastica*, che comprende tutto il periodo della crescita dell' ovo, fu rappresentata da due stadi: lo stadio iniziale (*ova primordiali*) e lo stadio finale, in cui comincia l'emissione dei ***polociti***. Le

**Fig. 3ª** — Rappresentazione schematica dello stadio diverso dell' evoluzione, in cui possono trovarsi le ova nell'ovaia di coniglia, al momento del coito. I cerchi indicano gli stadi evolutivi, in cui le ova si trovano; i tratti e la freccia, negli spazi a sinistra, indicano gli stadi che ciascun uovo ha già percorso; gli spazi vuoti, a destra, indicano gli stadi del ciclo, che le ova dovranno percorrere. Va inteso che, escluse le ova primordiali e giovani, nonchè le degenerate, le altre sono tutte fecondabili.

ova in *fase cataplastica* furono distinte in 4 stadi diversi, tenendo conto delle varie e successive trasformazioni, alle quali vanno incontro e della possibilità diversa per ciascuno di esse di produrre embrioni vivi o morti.

*
* *

Il maggior numero di femmine, che si ottiene nel parto, che segue immediatamente dopo il trattamento con la *Lecitina*, ripetiamo che è determinato dall' accelerazione del processo evolutivo del follicolo ovarico e quindi dall' impossibilità in cui si trovano molte ova di cadere nelle trombe o, pur cadendo, di proseguire il loro normale sviluppo. Crediamo bene avvertire che il risultato sperimentale, al quale diamo ora, in base alle nuove ricerche, un' interpretazione più esatta, la preminenza cioè del sesso femminile sul maschile nelle Coniglie ipernutrite, è stato sempre confermato nei vari successivi esperimenti , per cui su la sua attendibilità non è da opporre alcun dubbio.

Anche gli esperimenti fatti nel 1907 dal sig. Basile (1), pur sembrando di voler dimostrare il contrario, ne sono una evidente conferma. Tenendo conto del solo 1° parto, avuto dalle Coniglie da lui lecitinate , chiaramente risulta che egli ottenne anche un maggior numero di nati di sesso femminile , come risultò sempre dai miei esperimenti. Io però , non ho tenuto conto dei parti successivi al 1°, nè mi sono servito, per i dati statistici, del sesso dei nati da Coniglie accoppiate subito dopo essere partorite, come certo inconsideratamente fece quest'autore, sapendo che in tali nuove condizioni, che non sono più quelle determinate , in un primo tempo , dalla *Lecitina* , intervengono nuovi fattori di perturbazione , dipendenti da cause poco apprezzabili , alcune delle quali oggi possiamo attribuire all' accelerazione dell' evoluzione dei follicoli ovarici ed alle nuove particolari condizioni , che può produrre la precedente gravidanza. Escludendo perciò i nati dai parti successivi al 1°, e sommando solo questi, l' autore ottenne da 6 Coniglie lecitinate i seguenti risultati, che egli stesso, per poco che l' avesse voluto, poteva benissimo mettere in rilievo.

Sesso dei nati nel 1° parto di 6 Coniglie lecitinate (secondo il sig. Basile)

**QUADRO N. 2** (pag. 648)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° parto | — | Coniglia N. | 1 | figli | 8 | = | 3 ♂ | 5 ♀ |
| » | — | » » | 2 | » | 7 | = | 3 ♂ | 4 ♀ |
| » | — | » » | 3 | » | 4 | = | 1 ♂ | 3 ♀ |
| » | — | » » | 6 | » | 1 | = | 2 ♂ | 3 ♀ |
| » | — | » » | 7 | » | 7 | = | 4 ♂ | 3 ♀ |
| » | — | » » | 14 | » | 7 | = | 3 ♂ | 4 ♀ |
| | | | | Totale | 38 | = | 16 ♂ | 22 ♀ |

Ma, la migliore conferma agli attuali risultati ce la dà lo stesso autore con la constatazione da lui fatta, che, ad un maggior numero di nati, nella Coniglia, corrisponde un maggior numero di maschi, come io di recente ho dimostrato direttamente negli accoppiamenti con maschi denutriti, come sopra fu esposto.

Tale constatazione di fatto, molto interessante per il problema che ci occupa, messa in relazione con lo scoppio di follicoli, che sono in *catabolismo,* dimostra ancora di più

(1) C. BASILE — Influenza della Lecitina sulla determinazione del sesso e sui caratteri mendeliani. Rendic. R. Acc. dei Lincei ; Roma, 1908.

che il maggior numero di nati di sesso maschile potrebbe essere dato da ova cataboliche, le quali, come si è detto, possono o pur no venire fuori dai follicoli, dato il loro particolare metabolismo, a secondo delle varie condizioni dello sperma, o di altre cause, che per ora non ci è dato precisare.

Credo utile riportare da detto A. il quadro N. 3, compilato sui parti da lui stesso ottenuti da Coniglie tenute in Laboratorlo, dal quale, sebbene le cifre non siano molto omogenee, e sebbene, d' altra parte, l' A. adoperi un metodo statistico tale da assorbire nelle categorie con numero di figli più elevato quelle con numero minore, tuttavia risulta abbastanza evidente quanto sopra si è detto:

**QUADRO N. 3** (pag. 648)
**Numero complessivo dei figli: 440.**

| Parti in cui il numero dei figli è da | Numero dei figli | Percentuale dei maschi, per 100 nati vivi |
|---|---|---|
| 10 in su | — 138 = 82 ♂ 56 ♀ | 59, 42 |
| 9 in giù | — 302 = 143 ♂ 159 ♀ | 47, 35 |
| 8 „ | — 275 = 132 ♂ 143 ♀ | 48, 00 |
| 7 „ | — 187 = 98 ♂ 89 ♀ | 52, 40 |
| 6 „ | — 96 = 46 ♂ 50 ♀ | 47, 91 |
| 5 „ | — 48 = 20 ♂ 28 ♀ | 41, 69 |
| 4 „ | — 33 = 12 ♂ 21 ♀ | 36, 36 |

Ma, lo stesso A. fece di più: egli calcolò la percentuale dei maschi per 100 nati vivi, compilando il quadro N. 4, qui appresso riportato, su i dati statistici, che io avevo dato nella Memoria sopra citata, il quale quadro è quasi simile a quello N. 3, in quanto che resta sempre più dimostrato che, aumentando il numero dei nati nei singoli parti, aumenta la percentuale dei maschi.

**QUADRO N. 4** (pag. 649)
**Numero complessivo dei figli: 687.**

| Parti in cui il numero dei figli è da | Numero dei figli | Percentuale dei maschi, per 100 nati vivi |
|---|---|---|
| 10 in su | — 148 = 88 ♂ + 60 ♀ | 59, 46 |
| 9 in giù | — 539 = 312 ♂ + 227 ♀ | 58, 07 |
| 8 „ | — 485 = 283 ♂ + 202 ♀ | 58, 57 |
| 7 „ | — 333 = 197 ♂ + 136 ♀ | 59, 15 |
| 6 „ | — 249 = 144 ♂ + 105 ♀ | 57, 83 |
| 5 „ | — 147 = 79 ♂ + 68 ♀ | 53, 74 |
| 4 „ | — 42 = 19 ♂ + 23 ♀ | 45, 23 |

Ma, la migliore conferma alle attuali ricerche, cioè che nelle trombe uterine della Coniglia, oltre alle ova *anaboliche*, cadono anche quelle *cataboliche*, in più o meno avanzato *catabolismo*, per cui alcune di esse, pur essendo fecondate, non compiono tutto il loro sviluppo, ce la dà lo stesso Autore, con l' osservazione da lui fatta che, sia nelle Coniglie normali, sia in quelle lecitinate, ma più in queste che in quelle, si trova nelle trombe uterine un certo numero di embrioni morti.

Con le presenti ricerche, specialmente tenendo presente *l' accelerazione dell' evoluzione del follicolo ovarico, determinato dall' ipernutrizione dell' ovaia, a mezzo della*

*Lecitina*, e quindi la formazione più abbondante di follicoli catabolici viene data una base positiva a tale fenomeno.

* * *

I fatti accertati, sia d' ordine citologico sia d' ordine sperimentale, che oggi possiamo mettere in relazione con il problema della sessualità della Coniglia, possono così riassumersi:

1. Nell' ovaia, al momento del coito, le ova sono in diversi stadi dell' evoluzione, per cui alcune cadono nelle trombe per essere fecondate nella fase culminante della loro *attività anabolica* o costruttrice, altre invece nel periodo della loro *attività catabolica*, in cui il *deutolecite* si decompone.

2. Le ova nella prima fase cadono nelle trombe, quasi in tutte le Coniglie, specialmente se lecitinate, pressochè nello stesso numero e ciò spiegherebbe la relativa costanza dei nati di sesso femminile in ogni singolo parto.

3. Le ova nella seconda fase cadono in numero diverso ed in diverse condizioni del loro catabolismo (*furono trovate nelle trombe perfino le ova degenerate*), e ciò avviene o naturalmente o per azione dello sperma dei maschi digiunanti. Tale fatto spiegherebbe la diversità di numero delle nascite maschili, ed il fatto salientissimo che, aumentando il numero dei nati, aumenta il numero dei maschi, mentre i nati di sesso femminile per lo più si mantengono nell'ordinaria proporzione.

4. Dalle *Coniglie lecitinate,* accoppiate con maschi in condizioni normali o meglio con maschi anche lecitinati, si ha quasi sempre nei parti, che seguono a tale trattamento, una prevalenza di nati di sesso femminile. Ciò dipende dal fatto che molte ova, per l' accelerazione del processo evolutivo del follicolo, prodotto dall' ipernutrizione dell' ovaia, raggiungono più presto del normale una fase catabolica inoltrata, per cui o non sono fecondate o pure, se lo sono, dànno embrioni morti. Le ova anaboliche invece, per il continuo sviluppo e successiva evoluzione delle ova primordiali, si trovano dentro l'ovaia in numero approssimativamente quasi sempre uguale ed, essendo tutte fecondate, dànno origine ad una maggiore natalità femminile.

In queste conclusioni abbiamo tenuto conto dei casi tipici, che, d'accordo con i fatti di ordine citologico e sperimentale da me messi in luce, possono dare la spiegazione del fenomeno della sessualità nella Coniglia. Esistono però le eccezioni, che tuttavia confermano quanto sopra si è detto, potendosi, con i fatti su esposti, spiegare le nascite, veramente rare, o di sole femmine o di soli maschi (1).

* * *

Questi i fatti e le conclusioni che finora ho potuto trarre, seguendo l' indirizzo iniziale delle mie ricerche. Ritengo che la dimostrazione diretta o la prova provata, come suol dirsi, per la soluzione del problema, che da molti anni ormai ho impreso a trattare, an-

---

(1) Questi risultati coincidono in parte con quelli sperimentali e speculativi sulle Rane del sig. Hertwig di Monaco di Baviera. L' Hertwig, alla sua volta, non fece che rimettere a nuovo la vecchia teoria del Thury, che, al solito, non si è curato di citare, come sarebbe stato giusto e conveniente. Su tale teoria, che attribuisce alla diversa maturità delle ova la causa del sesso dei nati, vorrei richiamare l'attenzione di quei biologi, che, travisando i fatti ed assoggettandosi a non poche restrizioni mentali, sostengono la *teoria dell'eredità mendeliana del sesso.*

cora ci sfugge, forse perchè mancano alcuni anelli di una catena di fenomeni tanto complessi, forse perchè, data la mutabilità dell'organo ovarico per la successione continua degli stadi evolutivi dei follicoli, e dati anche gli altri coefficienti necessari, inerenti alle condizioni dello sperma, non è possibile produrre nella Coniglia per via sperimentale esclusivamente or l' uno or l' altro sesso (1).

Non ostante io sia stato condotto a tale conclusione, partendo da esperimenti, che dovevano dare la prova diretta di una determinazione artificiale del sesso in detto Mammifero, pure, nel corso degli studi, sebbene il metodo da me per primo impiegato (*iniezioni di Lecitina*) si sia dimostrato sempre più efficace, ho dovuto convincermi che le prove sono indirette, ma tutte tendenti allo stesso fine: il *diverso* METABOLISMO DELL' OVO e, come coefficiente secondario, le QUALITÀ DEGLI SPERMI !

---

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLE TAVOLE I e II

### TAVOLA I.

Tutte le figure della Tav. I furono ricavate da sezioni di ovaia di Coniglie , trattate con *Lecitina*.

**Fig. 1.** — Breve tratto di *granulosa parietale* con cellule in diversa fase di assorbimento con prodotto globulare in punti diversi del protoplasma. Gli elementi più interni hanno già il nucleo picnotico. Fissazione *Benda* , colorazione *Saffranina Pfitzner*. *Zeiss* $\frac{\text{Oc. comp. } 4^{*}}{\text{Obb. imm. omog. } ^{1}/_{15}}$ (Carta sul piano del preparato).

**Fig. 2.** — Breve tratto di *granulosa parietale* con cellule in diversa fase di assorbimento e di secrezione interna, riprodotto da ovaia trattata con il *3° metodo Ciaccio* per la ricerca dei *grassi neutri*. Il prodotto globulare, tinto in rosso-bruno, occupa punti diversi del protoplasma. Gli elementi, che sporgono nella *cavità follicolare*, presentano l' orlo protoplasmatico libero sfrangiato e ricoperto da granuli incolori, che sono il prodotto della secrezione interna. — (Ingr. come sopra).

**Fig. 3.** — Cellule della *granulosa parietale* di ovaia, trattata con il *3° metodo Ciaccio*, a più forte ingrandimento. Gli elementi superficiali presentano il protoplasma cosparso di vacuoli, dei quali alcuni, come nella cellula di sinistra, sono periferici, a contatto con il *liquido follicolare*.—(Ingr. come sopra, tubo alzato).

**Fig. 4.** — Tratto di *granulosa parietale* di un *follicolo di Graaf*, in cui la *degenerazione grassa* dei suoi elementi si è già iniziata. Alcune cellule sono legate, mediante un sottile peduncolo, alla *membrana propria folliculi*, altre, staccate e sparse nel liquido follicolare, sono in stato di degenerazione grassa. Le altre cellule, impiantate sulla membrana del follicolo, sebbene mostrino di essere ancora in fase di assorbimento, sono più piccole di quelle, rappresentate nella Fig. 1ª. Fissaz., coloraz. ed ingrand. come nella fig. 1ª.

**Fig. 5.** — Tratto di *granulosa parietale* di un follicolo, trattato con il *1° metodo Ciaccio*, per la ricerca dei lipoidi. Le cellule, impiantate su la membrana del follicolo, sono in diversa fase di assorbimento, ma non presentano il prodotto globulare ; il protoplasma ha una tinta leggermente aranciata, con granelli e fili più intensamente colorati. Gli elementi, a contatto con il liquido folli-

---

(1) Le trasformazioni alle quali va soggetto l'ovo nei diversi momenti della sua evoluzione dentro l'ovaia, la possibilità che esso cada nell' utero e venga fecondato in differenti stadi del suo ciclo vitale , l' influenza che su tale fenomeno possa esercitare la qualità degli spermii, potrebbero spiegare l'impossibilità di prevedere il sesso della prole nei Mammiferi unipari. Il mistero della sessualità si ridurrebbe, in altri termini, ad un *gioco di azzardo*, in cui la probabilità dell' avverarsi di una previsione dipende dal concorso di varie circostanze.

colare, presentano nella porzione libera alcune prominenze, costituite da granuli quasi incolori. La tinta del *liquido follicolare* soprastante è leggermente tendente all'aranciato; pochi granuli sparsi sono tinti più intensamente. — (Ingr. come nella fig. 1ª).

**Fig. 6.** — Cellule della *granulosa parietale* in funzione di assorbimento; figura tratta da sezione non colorata per mostrare le sostanze globulari adipose, tinte in nerastro, nel protoplasma delle cellule stesse. — (Fiss. 3° *metodo Ciaccio* — Ingrand. come sopra).

**Fig. 7.ª** — Porzione distale di tre cellule della *parietale*, nelle quali il protoplasma, volto verso la cavità follicolare, è frangiato e contiene granuli incolori. Al di fuori sono dei grumi, formati dagli stessi granuli. — (*1° metodo Ciaccio.* Ingr. c. s. a tubo alzato).

**Fig. 8.** — Follicolo giovane, nel quale cominciano a formarsi spazi pieni di liquido follicolare. L' ovo è pieno di *globuli adiposi*, tinti in nero dall' acido osmico, mentre la zona pellucida e le cellule follicolari ne sono affatto prive.

Fiss. Benda, Color. Suffranina. Ingr. Zeiss $\frac{\text{oc. comp. } 4^{*}}{\text{obb. } 8{,}0^{\text{m.m.}} \text{ Ap. } 0{,}65}$ (piano del preparato).

**Fig. 9.** — *Follicolo di Graaf* a completo sviluppo. Le cellule, che costituiscono la granulosa parietale e l'ovulare, sono tutte normali; soltanto, quelle più profonde della *parietale* contengono il prodotto globulare. L' ovo è anche carico di tali globuli, che hanno gli stessi caratteri microchimici. Il liquido follicolare non contiene ancora cellule staccate dalla granulosa, o degenerate.

(3° metodo Ciaccio. Ingr. Zeiss $\frac{\text{oc. comp. } 4^{*}}{\text{obb. } 8{,}0^{\text{m.m.}} \text{ Ap. } 0{,}65}$ piano del preparato).

**Fig. 10.** — Stadi successivi della *degenerazione grassa* delle cellule follicolari e loro conseguente trasformazione nei globuli, che fanno parte del *liquido follicolare.*

Fissaz., Coloraz. ed Ingr. come per la fig. 1ª.

## TAVOLA II.

Tutte le figure della Tav. II furono ricavate da sezioni di follicoli di Coniglie normali, fissati con le miscele di *Benda* e colorati con l' *Ematossilina ferrica.*

**Fig. 1.** — *Ovo anabolico*, con globuli di deutolecite, sparsi nell'ooplasma, e con il *1° fuso polare.* Quest'ovo fu sorpreso su la superficie dell'ovaia, in corrispondenza del proprio follicolo, da poco scoppiato, che aveva tutte le cellule integre, simili a quelle della fig. 5ª — Zeiss. $\frac{\text{Oc. } 4^{*} \text{ comp.}}{\text{Obb. } 2.0^{\text{m.m.}} \text{imm. omog.}}$ (Piano tavolo alto 5 cm.)

**Fig. 2.** — *Ovo catabolico* con cristalli di *Acido grasso*, sparsi su tutta la rete ooplasmica. In quest' ovo, appartenente a follicolo con granulosa parietale distale in via di degenerazione e con granulosa prossimale ed ovulare normale, è formato il *1° polocite* ed il *2° fuso polare.* — Ingr. c. s.

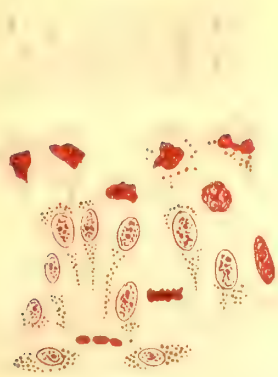
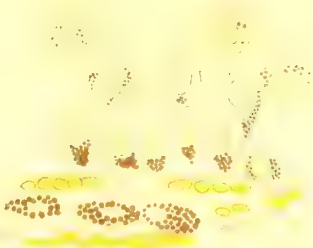
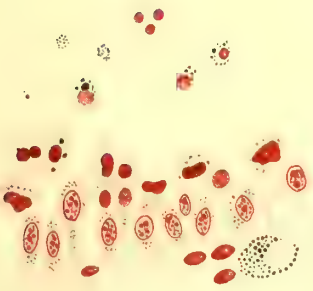
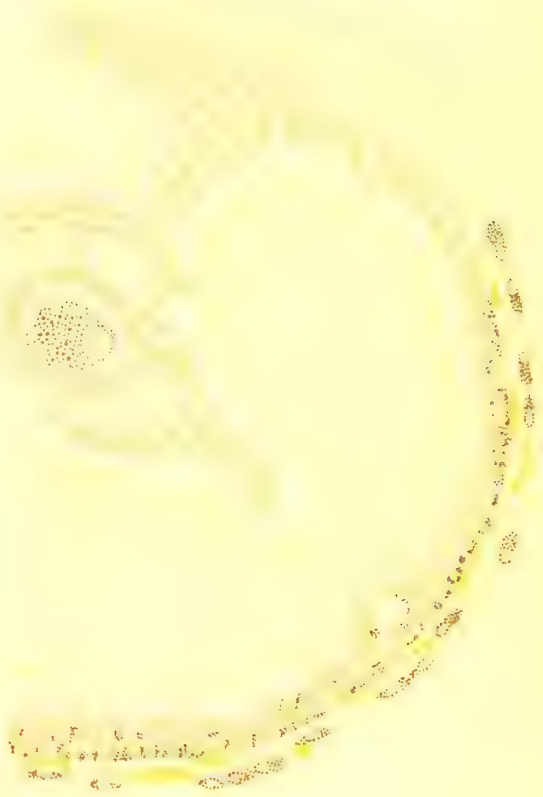
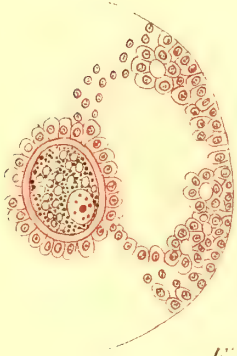
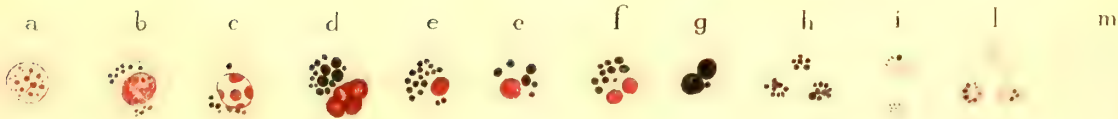
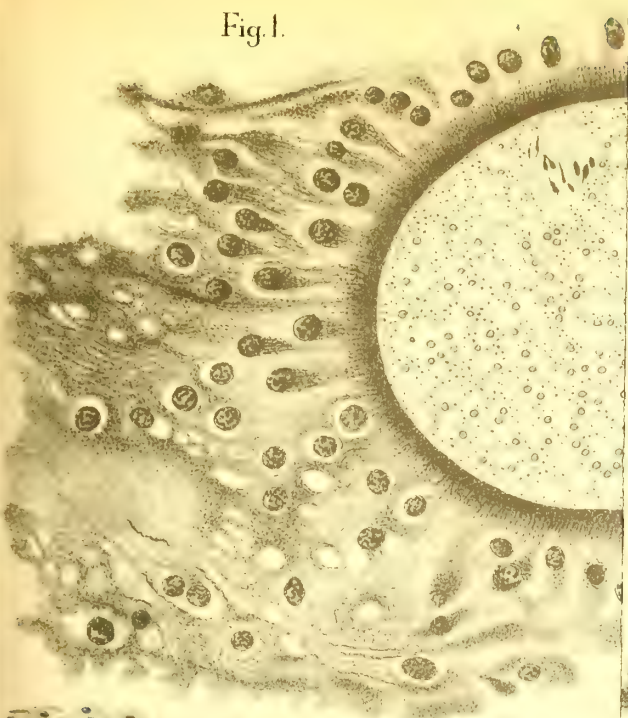
**Fig. 3.** — *Ovo catabolico* in avanzato catabolismo, in cui i cristalli di *Acido grasso* sono disposti nell'ooplasma in tanti gruppi. — Ingr. c. s.

**Fig. 4.** — *Ovo degenerato*, in cui, fra i gruppi di cristalli di *Acido grasso*, sono dei *globuli di grasso*, anneriti dal *Tetrossido di Osmio.* — Ingr. c. s.

**Fig. 5.** — Follicolo ovarico in *fase anabolica*, con cellule follicolari tutte normali ed ovo carico di globuli di deutolecite. Zeiss $\frac{\text{Oc. comp. } 4^{*}}{\text{Obb. } 8.0^{\text{mm}}\text{, Ap. } 0{,}65}$ (piano del preparato).

**Fig. 6.** — Follicolo ovarico in *fase catabolica*, in cui le cellule parietali distali sono in via di degenerazione, mentre quelle prossimali e quelle circostanti all' ovo sono normali. — Ingr. e. s.

**Fig. 7.** — Follicolo ovarico in avanzato *catabolismo*, in cui le cellule parietali, distali e prossimali, sono degenerate e solo il *cumulo ooforo* è ancora normale. — Ingr. c. s.

**Fig. 8.** — Follicolo ovarico *degenerato*, in cui tutte le cellule della granulosa e l' ovo sono in degenerazione grassa. — Ingr. c. s.

A. Russo dis.

Lit. Tacchinardi e Ferrari-Pavia

Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.

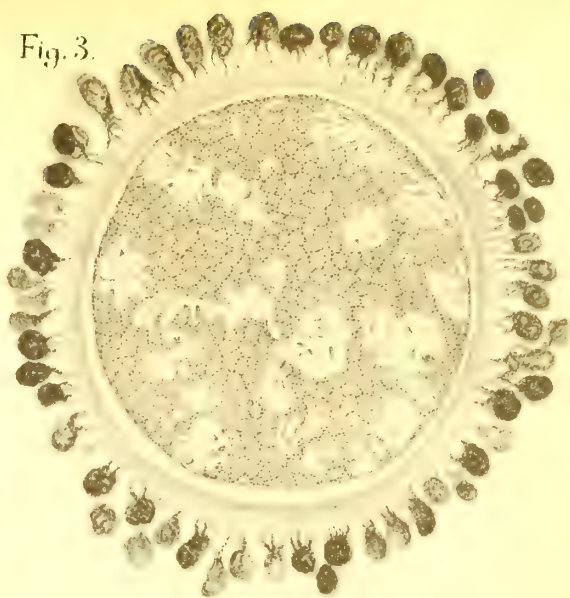
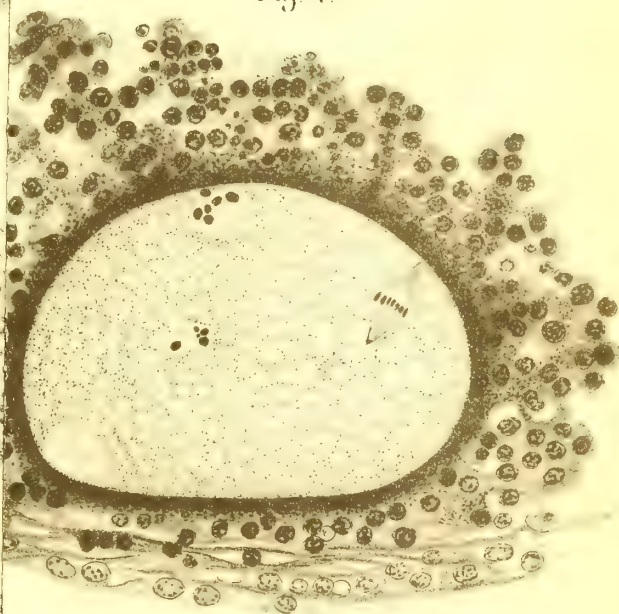
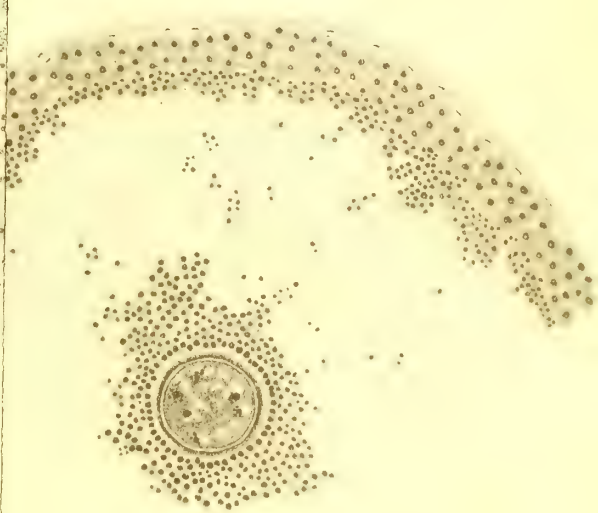
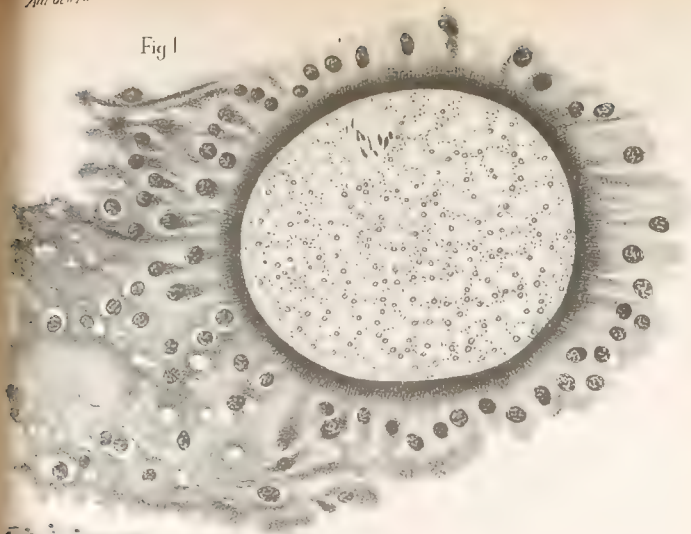
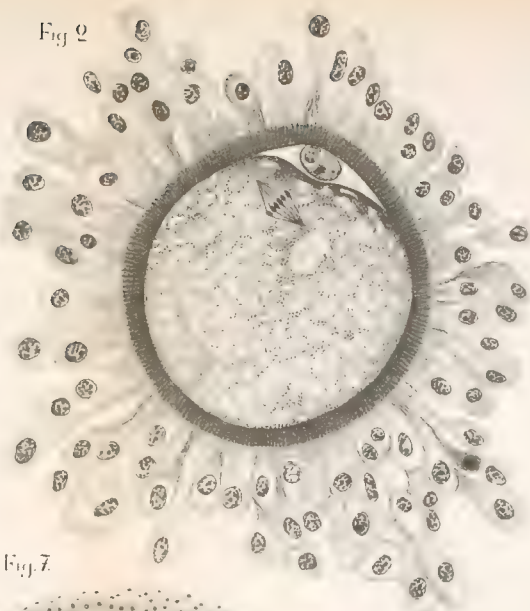
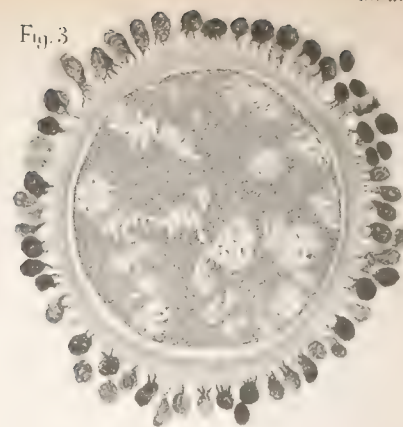
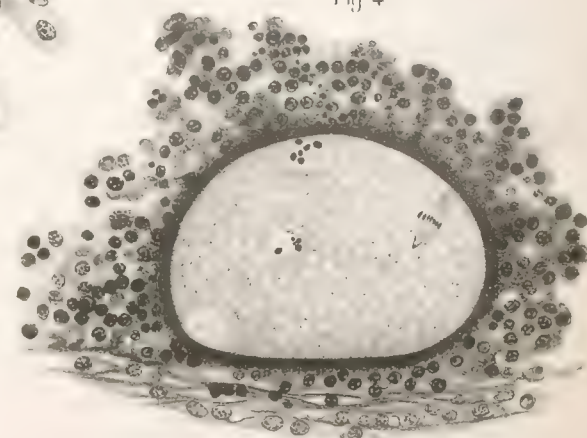
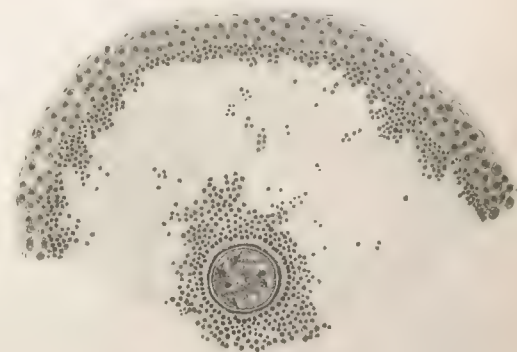
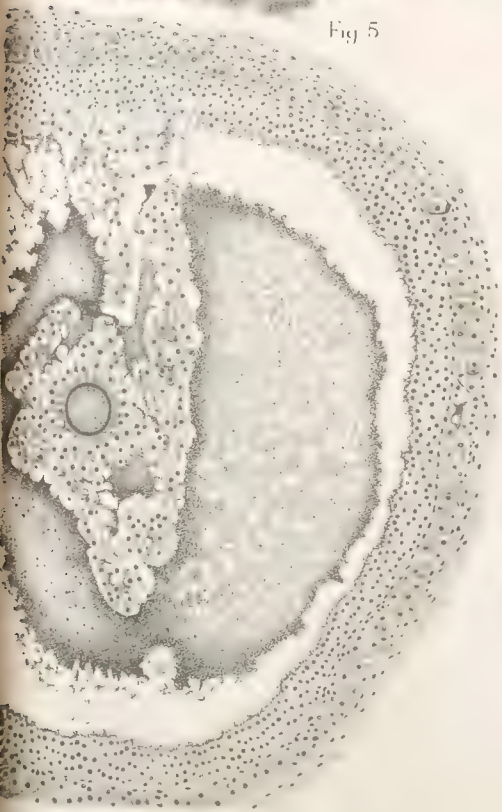
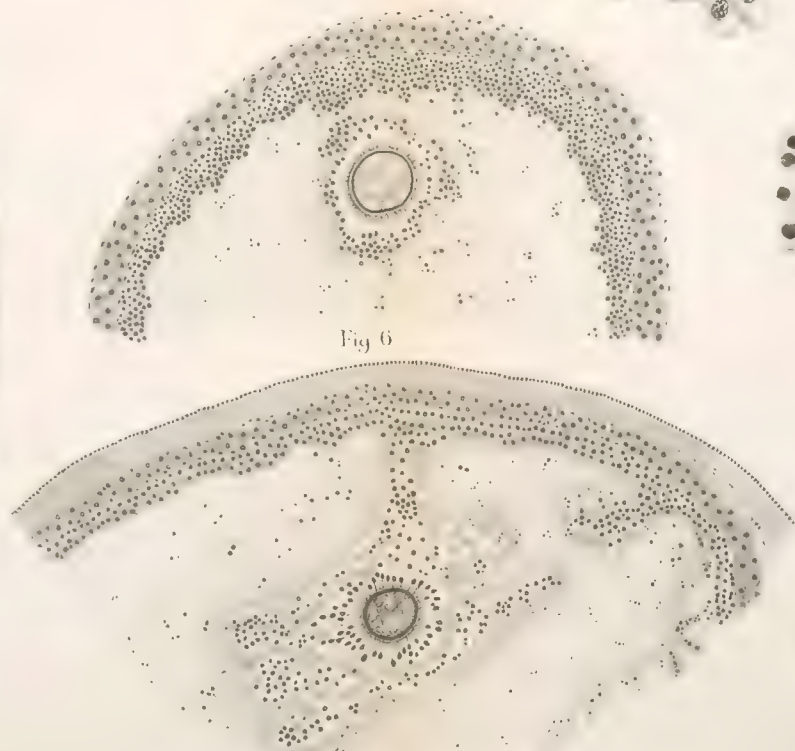
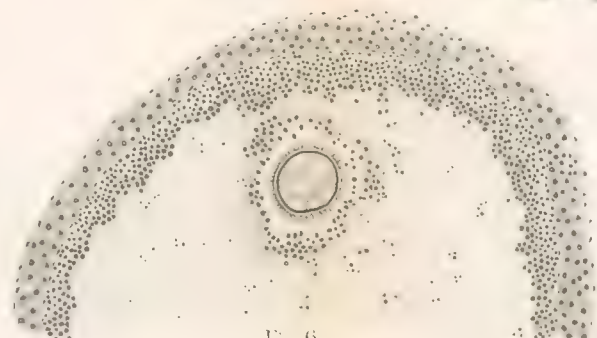
Fig. 5.

Fig. 8.

G. Riccioli dis.

Lit. Tacchinardi e Ferrari-Pavia

G. Ricioli dis

Lit. Tacchinardi e Ferrari-Pavia

# Il prodotto della pesca a Catania nel biennio 1915-1916
## e considerazioni sul prodotto del dodicennio 1905-1916.

Nota del Prof. ACHILLE RUSSO

( Direttore dell'Istituto Zoologico della R. Università di Catania )

( con 3 figure nel testo )

---

Le cifre pubblicate nelle *Tabelle*, che accompagnano questa Nota, furono raccolte, come per il quinquennio precedente (1), dai Registri, che la Direzione del Dazio consumo locale ha messo a mia disposizione. Dalle *Tabelle* stesse e dai *Grafici*, inseriti nel testo, risulta che il prodotto complessivo della pesca nel biennio 1915-916 subì una notevole diminuzione, in confronto degli anni precedenti.

Mi è sembrato utile, ai fini pratici dell'industria della pesca, indagare a che fosse dovuto tale fenomeno e cioè: se esso fosse una conseguenza del diminuito numero dei galleggianti impiegati per la pesca e quindi della diminuita manodopera, in dipendenza dello stato di guerra, ovvero se la scarsità del prodotto fosse in relazione con metodi nocivi alla pescosità del nostro Golfo (2).

È fuori di dubbio che la manodopera dal 2° semestre dell'anno 1915 cominciò a diminuire. Tale fatto mi viene confermato dalla R. Capitaneria di porto di Catania, la quale, con lettera in data 18 aprile 1917, m'informa che *nel biennio 1915-916 nel mare di Catania lavorarono circa 200 barche da pesca*, *26 Ragni a vela* (13 coppie) *e 600 pescatori.*

Come si rileva però da questa comunicazione, se il numero dei galleggianti ordinarî è di molto diminuito, in confronto di 677, quali furono nel 1912, è invece aumentato il numero dei *Ragni a vela* (Paranze), che, mentre negli anni precedenti erano in tutto circa 10-12 (5-6 coppie) ora sono arrivati a più del doppio. Essendo, la rete a sacco, che usano i *Ragni*, di grande portata, si può ritenere che gli effetti della diminuzione, realmente verificatasi, nel numero delle ordinarie barche da pesca in esercizio, e quindi

---

(1) RUSSO A. — *Sul prodotto della pesca a Catania nel quinquennio 1910-914, etc.* Atti Acc. Gioenia — Catania. Vol. IX, Ser. 5ª.

(2) Perchè il risultato di questa indagine fosse del tutto esatto sarebbe stato necessario potere conoscere le quantità di Pesci, distinte per qualità, catturate sia dai *Ragni a vela* sia dagli altri ordegni di pesca e ciò per dare un valore assoluto alle tre diverse Classi, riconosciute dal Dazio consumo locale. Sebbene i *Ragni* catturano in grande quantità Pesci di fondo, che sono in gran parte assegnati alla 2ª Classe, come le *Triglie*, che si catturano in prevalenza, il *Luvaro* (Luvarus), il *Neonato* (mucco), non è escluso che con tali reti si possano catturare quantità più o meno apprezzabili di quelli appartenenti alle altre due Classi. D' altra parte, è necessario rilevare che le *Acciughe* (mascoline) sono anche comprese nella 2ª Classe e sono catturate da *Reti di posta* (Menaide), È questa però l'unica specie locale di superficie di notevole importanza, che è segnata in tale elenco. Qualunque possa essere il risultato di tale esame, dai grafici qui riportati, che furono tracciati in base alle cifre degli ultimi 7 anni, risulta confermato il fatto che quando la 2ª classe aumenta diminuisce la 3ª e, viceversa, questa cresce quando quella diminuisce.

nella manodopera, vengano annullati dal più ampio sviluppo dato all' uso degli ordegni o mezzi adoperati per la cattura dei Pesci.

In alcune *Note* (1) precedenti ho potuto rilevare che nel mare di Catania è un *limite di pescosità*, che sta in rapporto, a prescindere da altre cause, con i metodi di pesca adoperati in un determinato periodo di tempo. In dette *Note* ho fatto osservare che tale *limite* può essere elevato da metodi razionali di pesca e da un *regime delle acque,* sostenuto da adeguate limitazioni e divieti di pesca, secondo le norme che possono suggerire i risultati biologici sullo sviluppo e sull'etologia degli organismi marini, ma può essere abbassato dall' uso irrazionale di ordegni dannosi alla pescosità stessa.

Il *limite di pescosità* massimo, difatti, fu raggiunto nel 1909, con una media del prodotto di 25, 10 e tale aumento fu conseguenza della limitazione dell' uso delle *Reti a strascico*, imposta con il R. Decreto 20 Maggio 1902, che cominciò ad avere esecuzione a Catania nel 1905-906, e della introduzione di un sistema di pesca razionale, cioè quello con le *fonti luminose* (2).

Negli anni susseguenti la media del prodotto, che si può assegnare a ciascuna barca, è discesa sempre di più, non ostante la mano d' opera fino alla prima metà del 1915 sia aumentata, e ciò perchè di nuovo fu lasciata piena libertà allo sfruttamento del mare con sistemi irrazionali, fra i quali principalmente l' uso smodato delle *Reti a strascico.* Una media proporzionale negli ultimi due anni ora presi in esame (1915-916) però non è possibile, sia perchè i fattori, cioè manodopera e numero di galleggianti, sono alterati dalle attuali condizioni, sia anche, perchè la maggior parte del prodotto, come sopra fu detto, è assorbito dai *Ragni a vela*, che rappresentano il sistema di pesca prevalente.

* * *

Dalle cifre comprese nelle Tabelle risulta in primo luogo che la quantità di pesce importato nel 1915 (*All. A*) fu superiore a quella dell'anno precedente, perchè da quintali 3236 si passa a Q. 3672. Nel 1916 si ha invece una diminuzione nell'importazione (Q. 2567), ciò che è dovuto con tutta probabilità allo stato di guerra. Da questa Tabella risulta però che esiste un rapporto inverso tra i Pesci di 2ª classe e quelli di 1ª e di 3ª, in quanto che nel 1915, mentre l' importazione di 2ª fu di Q. 993, quella di 1ª fu di 945 e di 1733 quella di 3ª. Al contrario, nel 1916, aumentando l' importazione dei Pesci di 2ª con Q. 2106, diminuì quella di 1ª con Q. 86, e quella di 3ª con Q. 374. Tale fenomeno, a mio parere, potrebbe essere attribuito allo stato di guerra, in quanto che, essendo stati richiamati sotto le armi i pescatori più giovani, che usano il mestiere più faticoso con le *Reti di posta*, che cat-

(1) RUSSO A. — *Note ed appunti su la pesca nel Golfo di Catania.*

Nota II. Le variazioni del prodotto dei Pesci di fondo e dei Pesci di superficie in rapporto all'uso delle *Reti a strascico* etc.

Nota III. Sul limite di pescosità nel mare di Catania. Atti dell' Acc. Gioenia di Sc. Nat. Vol. VI. Ser. 5ª, Catania, 1913.

(2) La pesca con fonti luminose pare che eserciti un' influenza benefica su gli altri generi di pesca; infatti, non esercitandosi più, a causa della guerra, alcune specie di Pesci nel mare di Catania sono divenute rare, mentre prima erano frequenti. Siccome in quest'ultimo periodo il prodotto generale della pesca ha subito una notevole diminuzione, ciò, a mio parere, costituisce una delle più convincenti prove che l'esercizio della pesca con fonti luminose è ben lontano dall'essere la causa dello spopolamento del mare, come da tutti si riteneva prima delle mie ricerche (Vedi Memoria in Atti Acc. Gioenia di Sc. Nat. Catania 1913, Vol. VI, Ser. Vª).

turano in maggiore quantità Pesci di 1ª e di 3ª Classe, si è dato maggiore sviluppo alla pesca con *Reti a strascico*, che si esercita con meno fatica.

L'esportazione (*All. A'*), che, nel 1915, era salita a Q. 938, scende bruscamente a Q. 37 nel 1916. Anche per questo fenomeno, a mio parere, lo stato di guerra ha avuto la sua influenza, ma un' altra ragione bisogna ricercarla nel fatto che la produzione locale in quest'ultimo anno è stata scarsissima e tale da non essere sufficiente ai bisogni della cittadinanza.

Dalle statistiche raccolte risulta, infatti, che il prodotto totale della pesca locale dal 1910, che fu di 10214 Q., decresce a poco a poco fino ad arrivare quasi alla metà con Q. 4723 nel 1915.

Un fatto, che viene confermato dalle attuali ricerche, sul quale ho anche riferito in precedenti lavori, si è che anche nei due anni, ora considerati, è un rapporto inverso tra il prodotto della pesca locale, assegnato dal Dazio alla 2ª Classe, ed il prodotto assegnato alle altre due Classi, segnatamente quello di 3ª. Difatti, mentre tra il 1914 e 15 il prodotto della 2ª classe decresce e quello di 3ª aumenta, tra l' anno 1915 e 16 il prodotto di 2ª aumenta e conseguentemente diminuisce quello di 3ª.

Tale fenomeno, rilevabile dai 2 grafici qui inseriti, costruiti con le cifre consegnate negli Alligati, che accompagnano questa nota e l' altra precedente su lo stesso argomento,

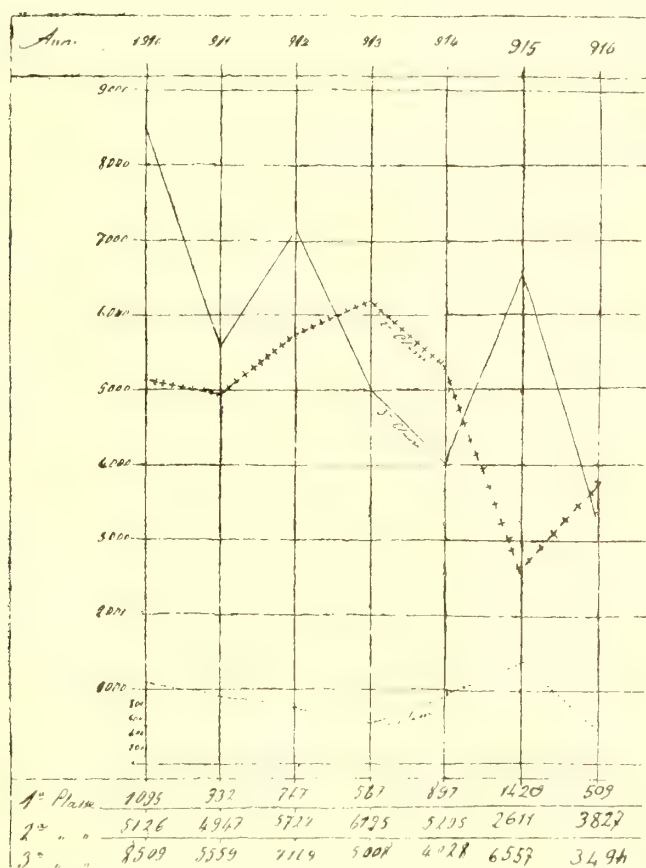



**Grafico N. I.** — Totale del pesce pescato nel mare di Catania ed importato (Allegato B).

dipende dal fatto che le *Reti a strascico* catturano in gran parte specie che vivono sul fondo marino, segnate nei Registri del Dazio di Catania nella 2ª classe.

In base a tale constatazione di fatto si può desumere che il diminuito prodotto di 2ª classe nel 1914 e 15 sia in relazione con l' applicazione del Decreto 16 luglio 1914, col quale veniva limitato e regolarizzato l'uso delle Reti a strascico, e che l'aumento dei pesci di 1ª nel 1914 (Q. 784) e l'aumento di quelli di 3ª nel 1915 (Q. 3152) sia anche in relazione con il Decreto stesso. Ma, elementi sicuri per desumere in forma assoluta tale fenomeno, la cui conoscenza sarebbe della massima importanza ai fini pratici della pesca in questo Compartimento marittimo, non abbiamo, tanto più che nei due anni '15 e '16 la guerra ha spostato fortemente i criteri adottati per gli anni precedenti, in quanto che la mano d'opera è diminuita. Possiamo però asserire che nel 1916 le *reti a strascico*, specialmente le ***Paranze***, come si è detto in principio, presero un grande sviluppo, per cui l'aumentato prodotto di 2ª in tale anno pare sia proprio dovuto all' esercizio di tali Reti. In conseguenza di ciò, secondo il principio più volte enunziato, si ha una diminuzione del prodotto di 3ª, com' è indicato nel Quadro riassuntivo.

Complessivamente in quest' anno 1916 si ha però un aumento del prodotto totale per l'aumentato prodotto di 2ª e di 1ª, ma, tale fenomeno, dovuto all'esercizio delle Reti a strascico, come non si era mai fatto negli anni precedenti, secondo quanto io ne penso, è effimero e fittizio, potendo anzi avere conseguenze dannose sul prodotto degli anni venturi.

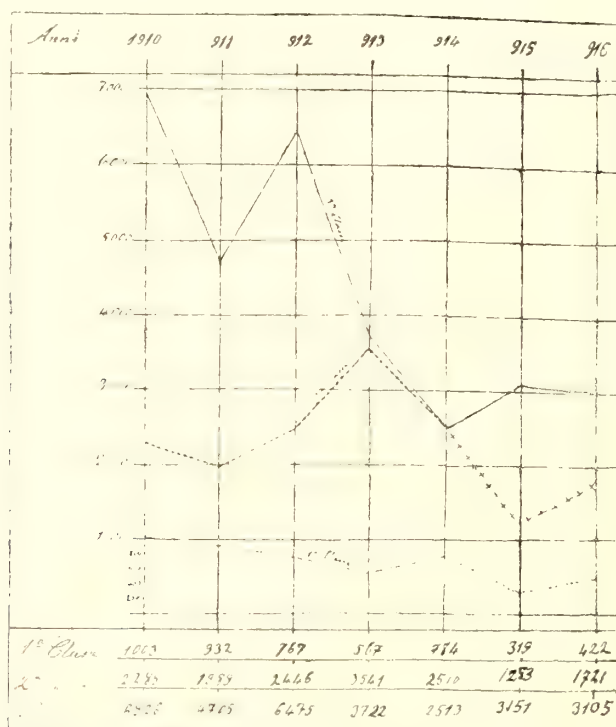



**Grafico N. 2.** — Totale del pesce sdaziato nei 3 uffici daziari di Catania: *Ognina*, *Plaia* e *Pesce* (Alligato C).

* * *

A che cosa sia dovuto il fenomeno del diminuito prodotto si domandano alcuni, specialmente in questo momento, in cui più vivo si sente il bisogno di aumentare l' approvvigionamento.

Per venire a capo di qualche conclusione, basata su dati di fatto attendibili, bisogne-

rebbe tenere presente varî fattori, fra i quali, oltre la manodopera, l'uso più o meno prevalente dell' uno anzichè dell' altro metodo di pesca e specialmente delle *Reti a strascico.*

A mio modo di vedere, la quistione dell' utilità o meno di tali *Reti* resta pregiudicata dai giudizî disparati che furono emessi e che, a secondo del particolare interesse, furono generalizzati. Ma, sta di fatto che le ricerche relative furono eseguite in condizioni assai diverse per la posizione del tratto di mare in cui esse si esercitano, per la natura del fondo, per le correnti dominanti e per tutte quelle altre condizioni idrografiche, che hanno pure così notevole influenza sia sulla fauna prettamente locale, costituita da quelle forme animali, che nel sito hanno la loro sede abituale o che hanno poca superficie di emigrazione, sia per quelle forme migranti, che in quelle condizioni locali trovano ragione di avvicinamento o di allontanamento.

Il volere assumere come principio che le *Reti a strascico* non siano dannose, solo per il fatto che esse non distruggono le ova dei Pesci più pregiati per l' alimentazione, essendo proprio queste ova galleggianti, e non potendo perciò essere danneggiate da strumenti che toccano il fondo, è, secondo me, volere risolvere una quistione tanto complessa, tenendo presente uno soltanto dei fattori. Tale innocuità viene però annullata dai danni che dette reti arrecano all' ambiente idrobiologico, in quanto che, con la distruzione di animali che vi hanno abituale dimora e che ivi depositano le ova, con la distruzione delle ova stesse già deposte, senza contare che alcune volte sono ova di specie commestibili, come quelle di *Loligo, Octopus, Sepia, Sepiola, Gobius, Raya, Mustelus* etc. (1), viene a mancare quella notevole parte del *Plankton*, che è costituito da forme larvali, appartenenti in parte ai detti animali. Dette reti inoltre distruggono centinaia e centinaia di Kg. di *Pesce novello,* che ha la sua abituale dimora lungo le coste, dove trova il pabulo necessario al suo sviluppo, e distruggono anche, almeno a Catania , anche a centinaia di Kg., quei Crostacei notanti del genere *Mysis*, che sono parte notevole del *Plankton* costiero (2).

L' avvicinarsi alle coste dei Pesci migratori, che provengono dal largo o pure che risalgono dalle profondità marine, è in relazione con l' esistenza ed il comportamento del *Plankton* non solo, ma anche con le correnti litorali, che portano detto *Plankton* in zone determinate, costituendo quelle *Zoocorrenti*, che meriterebbero di essere dettagliatamente studiate sul posto per le applicazioni, che se ne potrebbero trarre per la industria locale della pesca.

I fatti di ordine biologico, che qui ho voluto soltanto cennare e che riguardano da vicino il mare catanese, come fu detto in precedenti lavori, apportano nell' ambiente notevoli modificazioni che, a mio parere, si ripercuotono su la pesca (3). Le *reti di posta*, come si

---

(1) ZELAROVICH. A. — *Primo manipolo d' animali marini catturati da alcune reti a strascico nel Golfo di Catania* — Atti Acc. Gioenia di Sc. Nat. Vol. VI. Ser. V. 1913.

(2) Di detti *Crostacei*, conosciuti a Catania col nome di *Manna,* dai pescatori locali si fa una pesca speciale, perchè vengono adoperati come esca, in quanto che, gettati in mare in determinate località, vi richiamano i Pesci, che vengono catturati da vari sistemi di *reti di posta*. Tale *manna* viene anche conservata per parecchi giorni, ma in questo caso si fa una specie di salagione.

(3) Tale affermazione viene indirettamente convalidata da quanto osservò il Lobianco (Azione della pioggia di cenere, caduta durante l' eruzione del Vesuvio dell'Aprile 1906, etc. Mittheil. a. d. Zool. Station z. Neapel, 1906). È particolarmente interessante quanto dice il Lobianco su l'influenza della sparizione del Plankton nella pesca della Sardina, la quale si nutre esclusivamente di organismi pelagici. Mentre prima dell'eruzione la pesca, nella zona che poi divenne torbida, era sodisfacente, verso il 10 Aprile e per parecchi giorni consecutivi,

sa, catturano in massima parte specie di pesci migratori, come le *Acciughe*, le *Sardelle*, i *Merluzzi*, il *Pesceluna* (Brama Rayi Bl.), gli *Scombri*, etc., etc. Tali forme, nutrendosi di organismi pelagici, e di piccoli pesci, lungo le loro migrazioni, si avvicinano in quei punti delle coste, dove sanno di trovare il pabulo necessario, il quale pabulo per lo più si trova abbondante nei mari delle città costiere, poste in golfi od insenature. A tali condizioni privilegiate o *luoghi di attrazione* dei pesci migratori, spesso si aggiunge, come a Catania, lo sbocco di fiumi e torrenti, i quali portano, in quel determinato tratto di mare, del limo con detrito vegetale, che rende ancora più nutritivo, per così dire, l'ambiente idrico.

Crediamo di non essere lontani dal vero, affermando che l'ambiente alimentare rappresenti uno *stimolo trofico* (*trofotropismo*), verso il quale si dirigono i Pesci migratori (1).

Se tale ambiente viene annullato o, comunque, alterato, a mio parere, manca la ragione prima dell'avvicinarsi dei Pesci, per cui il prodotto della pesca con *Reti di posta* viene a diminuire.

Le prove di fatto, per quanto concerne la pesca a Catania, si hanno nel progressivo diminuito prodotto generale della pesca dal 1910 al 1915, cioè nel periodo in cui le *Reti a strascico*, con l'introduzione delle *Paranze*, furono maggiormente usate. In tale periodo si ha appunto la diminuzione dei Pesci migratori, appartenenti in gran parte alla 1ª ed alla 3ª Classe, ed un aumento relativo delle forme appartenenti alla 2ª Classe, nella quale, come si è detto, si trovano in maggioranza specie di fondo, catturate dalle *Reti a strascico*, ed il Pesce novello, ben noto a Catania sotto il nome di *Mucco*.

Una riprova di quanto quì si afferma, a mio giudizio, si avrebbe da un aumento, lieve se si voglia, dei Pesci di 1ª Classe nell'anno 1914-15, il quale fatto coincide con l'emanazione del Decreto 16 luglio 1914, che regolava l'uso delle *Reti a strascico* nel mare di Catania (2).

Relativamente al principio più volte enunziato, noi vediamo che nel 1914, mentre il prodotto di 1ª Cl., in confronto dell'anno precedente, aumenta, quello di 2ª Cl. diminuisce, essendo risultato di Q. 2510, 91 in confronto ai Q. 3541, 89 del 1913.

Si potrebbe obbiettare che ciò sia una coincidenza fortuita o pure che il fenomeno dipenda da cause fisico-biologiche, non riferibili all'uso limitato delle *Reti a strascico*. Tali obbiezioni meriterebbero di essere discusse in base a dati di fatto, che noi per ora non possediamo; però, crediamo di non essere lontani dal vero, ammettendo che il fenomeno sopra rilevato trovi in parte la sua spiegazione nel Decreto emanato e ciò specialmente perchè anche in epoca precedente, cioè in seguito al Decreto 20 maggio 1902, che ebbe applicazione a Catania nel 1905-1906, si sono constatati gli stessi fenomeni. Sta

fino ai primi di Maggio, non se ne raccolsero che pochi esemplari, certamente sperduti. Analogo fenomeno si verificò per l'Acciuga ed il Maccarello (*Scomber scombrus*), che sparirono durante il periodo dell'acqua torbida, che aveva distrutto il *Plankton* del golfo di Napoli.

(1) Una prova di ciò si ha nel fatto che nella pesca con *sorgente luminosa* i Pesci non tanto sono attratti dalla luce quanto dall'alimento, che si raccoglie nello specchio d'acqua illuminato, rappresentato dal *Plankton* e da molti piccoli organismi marini, (*Eteronereis*, *Mysis*, *Neonato* di Pesci).

(2) Con l'emanazione di detto Decreto, affinchè le norme in esso prescritte venissero rigorosamente seguite, fu inviato a Catania, come stazionario, il *R. Rimorchiatore Nisida*, per cui il Decreto stesso ebbe una rigorosa applicazione. Dopo alcuni mesi però esso fu mandato altrove, per cui le *Reti a strascico* lavorarono come meglio si è creduto non solo, ma aumentarono di numero, perchè i *Ragni a vela* raggiunsero il numero di 26, come mai era avvenuto precedentemente.

di fatto che in detto anno, mentre il prodotto di 2ª Cl. scese a Q. 3650, in confronto di Q. 4179 avuti nel 1905, quello di 1ª Cl. salì a Q. 725, in confronto Q. 638 del 1905, e quello di 3ª salì anche a Q. 5809, in confronto di Q. 4523 dell'anno 1905.

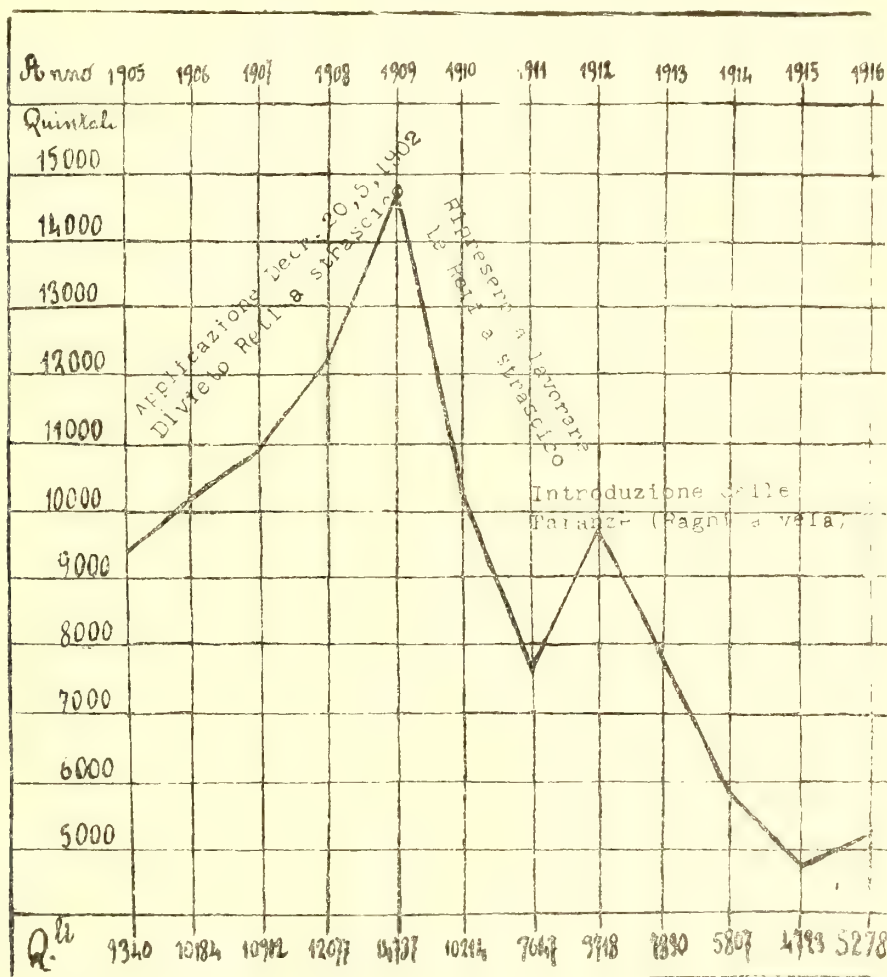



**Grafico N. 3.** — Rappresentazione grafica del prodotto totale della pesca a Catania, nel dodicennio 1905-1916, secondo i dati rilevati dai Registri della Direzione del Dazio di consumo.

I numeri al piede del grafico indicano il prodotto annuale, quelli di lato gli aumenti graduali da 5000 a 15000 Quintali.

Da questo grafico può rilevarsi a colpo d'occhio che, quando fu limitato l'uso delle reti a strascico, cioè dal 1906 al 1909, il prodotto totale della pesca crebbe, diminuì invece quando, dal 1909 in poi, ripresero a lavorare le stesse reti.

Nel quadro che segue e nel grafico, dove si riassumono i dati del prodotto della pesca nel dodicennio 1905-1916, sono riprodotte le cifre che ho potuto raccogliere e vagliare con tutte le volute precauzioni. Tali cifre, essendo convalidate, nel loro valore intrinseco, dalle osservazioni biologiche, sono degne, se non erro, della massima considerazione. Sarebbe anche, a mio parere, desiderabile che in altre Città marittime venisse fatta la stessa ricerca.

*Il prodotto della pesca a Catania nel dodicennio 1905-1916, rilevato da documenti ufficiali, forniti dall' Amministrazione dei Dazi di Consumo del Comune di Catania.*

| | 1905 | 1906 | 1907 | 1908 | 1909 | 1910 | 1911 | 1912 | 1913 | 1914 | 1915 | 1916 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ª Classe | 638 | 725 | 1117 | 720 | 1632 | 1003 | 9324 | 797 | 567 | 784 | 319 | 442 |
| 2ª » | 4179 | 3650 | 3986 | 5077 | 4735 | 2285 | 1989 | 2446 | 3541 | 2510 | 1253 | 1721 |
| 3ª » | 4523 | 5809 | 5809 | 6280 | 8370 | 6926 | 4726 | 6475 | 3722 | 2513 | 3151 | 3105 |
| Quintali | 9340 | 10184 | 10912 (1) | 12077 | 14737 | 10214 | 7647 (2) | 9718 | 7830 | 5807 (3) | 4723 | 5268 |

## CONCLUSIONI

Vogliamo presentare sotto forma di brevi conclusioni i risultati più importanti, che emergono dai fatti sopra esposti, con l' aggiunta di qualche considerazione, che non ha potuto prendere posto nel testo di questa *Nota*.

1. Il prodotto totale della pesca nel mare di Catania dal 1909 ad oggi decresce in modo vertiginoso, cioè: da Quintali 14737 nel 1909 scende a Q. 5268 nel 1916.

2. Tale diminuzione del prodotto dipende dall'uso irrazionale di mezzi nocivi e di ordegni di pesca dannosi alla pescosità, primi fra tutti le *Reti a strascico* e principalmente le *Paranze* (Ragni a vela).

3. Una prova di quanto si afferma, oltre che nei dati di ordine biologico, si ha nel fatto che quando fu disciplinato l' uso delle *Reti a strascico* con il Decreto 2 maggio 1902, che ebbe applicazione a Catania nel 1905—906, il prodotto della pesca segnò un aumento, che fu continuo fino al 1909. Dopo tale anno, ritornando di nuovo a lavorare dette Reti, il prodotto diminuisce di bel nuovo gradatamente, fino a raggiungersi un minimo di produzione negli anni 1915—916.

4. Nell' anno 1914, essendo stato emanato un nuovo Decreto di proibizione delle *Reti a strascico* (Decreto 16 luglio 1914), che ebbe breve applicazione, a causa dello scoppio della guerra europea nell' agosto dello stesso anno, si ebbe un leggero miglioramento nella pesca, specialmente nel prodotto di 1ª Classe.

5. Le *reti a strascico*, lavorando a Catania in vicinanza della costa, alterano le condizioni idrobiologiche locali, che formano la caratteristica del nostro golfo e che lo rendono un luogo di attrazione dei Pesci migratori.

(1) Il Decreto 20 Maggio 1902 ebbe applicazione a Catania nel 1905-06.

(2) Nell'anno 1911 infierì a Catania il Colera, specialmente nella classe marinara, e la pesca fu abbandonata nei mesi di Agosto e Settembre.

(3) Il Decreto 16 Luglio 1914 ebbe brevissima applicazione, perchè, iniziatasi la guerra europea, il *R. Rimorchiatore Nisida*, mandato come stazionario a Catania per sorvegliare le Paranze, fu ritirato.

6. L'utile, che possono ricavare le *Paranze* dall'esercizio della pesca, non è compensato dal danno che esse arrecano agli esercenti altri sistemi di pesca con *reti di poste* (Tratte, Consi, Nasse etc.), che fanno assegnamento su Pesci, che migrano lungo le coste o che risalgono dalle profondità.

7. Le *Paranze* con ogni probabilità sono dannose alla pesca delle *Sardine*, e diciamo con ogni probabilità, perchè nessuno finora si è occupato di tale argomento assai notevole per l'economia locale. Si può dire, ad ogni modo, che Catania, centro rilevante di produzione di tali *Clupeidi* (Engraulis encrasicholus — *Mascoline*, Clupea pilchardus — *Sarde*), tanto che da tempo vi fioriva l'industria del *Pesce in salamoia*, oggi vede decaduta un'importante produzione. La decadenza di tale industria, la quale si fonda essenzialmente su l'esercizio delle *Reti di posta* (Tratte o Menaide), pare abbia avuto inizio dal momento in cui fu intensificato l'uso delle *Reti a strascico*.

8. Altri ordegni, sui quali le *Reti a strascico* esercitano anche un'influenza dannosa, sono i *Consi*. Essi da qualche anno a Catania non sono stati messi in esercizio, perchè i *Consari* non trovano più rimunerativa la pesca, prima fiorentissima. E a conoscenza di tutti che alcune specie di Pesci, fra le più pregiate, catturate dai *Consi*, che prima erano comuni sul mercato, oggi sono rare o del tutto scomparse. Sono divenuti rari ad es. i *Merluzzi*, eccezione fatta di quelli che portano sul mercato le *Paranze*, e che sono ordinariamente di piccole dimenzioni ed in condizioni poco igieniche; è quasi scomparsa invece una specie, altamente pregiata per l'alimentazione, il *Pesceluna* (Brama Rayi), che veniva prima catturato dai *Consi* stessi in grande quantità. Secondo il Sicher (1) ed il Tuttolomondo (2), se ne pescavano prima, quasi in tutto l'anno, da pochi individui fino a 10 Quintali.

9. Si potrebbe obbiettare da coloro, i quali sostengono, contro l'evidenza dei fatti, che le *Paranze* non arrechino alcun danno alla pescosità del mare di Catania, che alcune specie, che vivono nel fondo, solo con detti ordegni possono essere catturati, e tali sono ad es. le *Triglie* le *Seppie*, etc.

A tale obbiezione rispondiamo che esistono altri ordegni di pesca per la cattura delle specie che vivono nel fondo, senza che il fondo stesso venga sconvolto, senza che le ova, le larve, le forme giovanili etc. vengano distrutte, senza che il *Plankton* venga alterato o direttamente o indirettamente per effetto dell'azione del *sacco* della Paranza. Le Triglie ad es. possono essere catturate da una Rete verticale detta *Bardassole*, che si lega al margine inferiore di un'altra Rete verticale detta *Lacciara* e tutto l'insieme viene lasciato libero in mare per essere trasportato dalle correnti. Il *Bardassole*, toccando il fondo, fa sì che i Pesci si sollevino e quindi restino impigliati nella rete. Per la cattura delle *Seppie* possono essere adoperati altri ordegni, quali le *Nasse*, il *Lontro*, che come il precedente, catturano solo le forme adulte, senza disturbare il fondo marino.

*Catania, 1° gennaio 1918.*

(1) *I pesci e la pesca nel Compartimento di Catania* — Atti Acc. Gioenia. Ser. IV. Vol. XI, 1898.

(2) *Fauna ittiologica del compartimento marittimo di Catania.* Girgenti. Prem. stamperia di Sal. Montes. 1899.

(Allegato **A**)

Anno 1915-1916 — Totale del pesce arrivato da fuori — Modulo H (Uscita) bollettario dell' ufficio FERROVIA.

| Mese | Anno 1915 | | | | Anno 1916 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Iª Classe | 2ª Classe | 3ª Classe | Pla | Iª Classe | 2ª Classe | 3ª Classe | Pla |
| Gennaio | 336 | 5279 | 2940 | 5 | 5380 | 178 | 685 | — |
| Febbraio | 940 | 5267 | 4882 | — | — | 3539 | 9502 | — |
| Marzo | 1444 | 4410 | 11600 | — | 34 | 7116 | 3728 | — |
| Aprile | 1354 | 4970 | 44907 | 4 | — | 8014 | — | — |
| Maggio | 1465 | 26678 | 23726 | — | — | 40862 | — | — |
| Giugno | 25212 | 1868 | 22295 | 162 | — | 46739 | — | — |
| Luglio | 38211 | 1266 | 9529 | — | — | 40816 | — | — |
| Agosto | 23209 | 2776 | 12499 | — | — | 18772 | 7697 | — |
| Settembre | 991 | 13226 | 9344 | 338 | — | 17096 | — | — |
| Ottobre | 769 | 14275 | 30602 | 655 | — | 22691 | — | — |
| Novembre | 171 | 14977 | 1005 | 35 | — | 4812 | 11358 | — |
| Dicembre | 417 | 4367 | — | 979 | 3247 | — | 4462 | 295 |
| Totale Kg. | 94519 | 99359 | 173329 | 2178 | 8661 | 210635 | 37432 | 295 |

(Allegato **A'**)

Anno 1915-1916 — Totale del pesce uscito da Catania — Modulo H (Entrata).

| Mese | Anno 1915 | | | | Anno 1916 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Iª Classe | 2ª Classe | 3ª Classe | Pla | Iª Classe | 2ª Classe | 3ª Classe | Pla |
| Gennaio | — | 190 | 105 | — | — | — | — | — |
| Febbraio | — | 145 | 136 | — | — | — | — | — |
| Marzo | 5 | 419 | 898 | — | — | — | 729 | — |
| Aprile | 88 | 1321 | 51242 | — | — | — | 2343 | — |
| Maggio | — | 768 | 5341 | — | — | — | 661 | — |
| Giugno | 7 | 514 | 19886 | — | — | — | — | — |
| Luglio | 20 | 459 | 3525 | — | — | — | — | — |
| Agosto | 6 | 555 | 3303 | — | — | — | — | — |
| Settembre | — | 438 | 1185 | 10 | — | — | — | — |
| Ottobre | 166 | 372 | 2417 | — | — | — | 53 | — |
| Novembre | — | — | 298 | — | — | — | — | — |
| Dicembre | — | — | 80 | — | — | — | — | — |
| Totale Kg. | 292 | 5181 | 88416 | 10 | — | — | 3787 | — |

(ALLIGATO B)

ANNO 1915-1916 — TOTALE DELLA QUANTITÀ DI PESCE PROVENIENTE DAL MARE DI CATANIA E QUELLO ARRIVATO DI FUORI — MODULO H (ENTRATA - USCITA) E BOLLETTARIO DEGLI UFFICI — OGNINA - PLAIA - PESCE - FERROVIA.

| | Mese | Anno 1915 | | | | Anno 1916 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I[a] Classe | 2[a] Classe | 3[a] Classe | P | I[a] Classe | 2[a] Classe | 3[a] Classe | P |
| Modulo H (Entrata) bollettario degli uffici — Ognina - Plaia - Pesce. | Gennaio . . | 2963 | 6251 | 15460 | 390 | 1630 | 2577 | 14609 | |
| | Febbraio . . | 2998 | 5848 | 12018 | — | 1429 | 3815 | 10495 | — |
| | Marzo . . . | 5865 | 10750 | 25575 | — | 2880 | 10371 | 41275 | |
| | Aprile . . . . | 7479 | 17142 | 106523 | — | 3730 | 13205 | 33040 | — |
| | Maggio . . . | 6298 | 15867 | 60733 | — | 5365 | 23340 | 36243 | - |
| | Giugno . . . | 3791 | 13936 | 77116 | — | 3425 | 14632 | 25138 | — |
| | Luglio . . . | 52 | 9673 | 39223 | — | 4062 | 15013 | 29343 | — |
| | Agosto . . . | 4822 | 15332 | 40173 | — | 4791 | 17018 | 18565 | — |
| | Settembre . . | 4676 | 43108 | 33727 | 10 | 4348 | 17147 | 20959 | 4350 |
| | Ottobre . . . | 4544 | 6882 | 39253 | 191 | 5591 | 20378 | 33257 | 6877 |
| | Novembre . . | 1791 | 7153 | 14439 | — | 2527 | 21626 | 25880 | 45 |
| | Dicembre . . | 2278 | 9865 | 18155 | — | 2501 | 12738 | 23166 | - |
| | Totale Kg. | 47557 | 161807 | 482395 | 591 | 42279 | 172160 | 311970 | 11278 |
| Modulo H (Uscita) Bollettario dell' ufficio Ferrovia | Gennaio . . | 336 | 5279 | 2940 | 5 | 5380 | 178 | 685 | — |
| | Febbraio . . | 940 | 5267 | 4882 | — | — | 3539 | 9502 | — |
| | Marzo . . . | 1444 | 4410 | 11600 | — | 34 | 7116 | 3728 | — |
| | Aprile . . . | 1354 | 4970 | 44907 | 4 | — | 8014 | — | - |
| | Maggio . . . | 1465 | 26678 | 23726 | — | — | 40862 | — | — |
| | Giugno . . . | 25212 | 1868 | 22295 | 162 | — | 46739 | — | — |
| | Luglio . . . | 38211 | 1266 | 9529 | — | — | 40816 | — | — |
| | Agosto . . . | 23209 | 2776 | 12499 | — | — | 18772 | 7697 | |
| | Settembre . . | 991 | 1326 | 9344 | 338 | — | 17096 | — | — |
| | Ottobre . . . | 769 | 14275 | 30602 | 655 | — | 22691 | — | — |
| | Novembre . . | 171 | 14977 | 1005 | 35 | — | 4812 | 11358 | — |
| | Dicembre . . | 417 | 4367 | — | 979 | 3247 | — | 4462 | 205 |
| | Totale Kg. | 94519 | 99359 | 173329 | 2178 | 8661 | 210635 | 37432 | 2[illegible] |
| | Totale Kg. | 142076 | 261166 | 655724 | 2769 | 50940 | 382795 | 349402 | 1157 |

(ALLIGATO C).

ANNO 1915-1916 — TOTALE DEL PESCE DAZIATO NEI TRE UFFICI : OGNINA - PLAIA - PESCE.

| Ufficio | Mese | Anno 1915 | | | | Anno 1916 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Iª Classe | 2ª Classe | 3ª Classe | Pla | Iª Classe | 2ª Classe | 3ª Classe | Pla |
| ufficio OGNINA | Gennaio | — | 1339 | — | — | — | — | 3225 | — |
| | Febbraio | — | 358 | — | — | — | 966 | — | — |
| | Marzo | — | — | — | — | — | 1608 | — | — |
| | Aprile | — | — | — | — | — | 1609 | — | — |
| | Maggio | — | — | — | — | — | 1556 | 6346 | — |
| | Giugno | — | — | — | — | — | 3692 | 7959 | — |
| | Luglio | — | — | — | — | 350 | 3049 | 11611 | — |
| | Agosto | — | 2787 | — | — | — | 3814 | — | — |
| | Settembre | — | 30632 | — | — | — | 1720 | — | — |
| | Ottobre | — | 1262 | — | — | — | — | — | — |
| | Novembre | — | 3772 | — | — | — | — | — | — |
| | Dicembre | — | 5370 | — | — | — | 3041 | — | — |
| | | — | 45520 | — | — | 350 | 21055 | 29141 | — |
| ufficio PESCE | Gennaio | 2963 | 4722 | 15355 | 390 | 1630 | 2577 | 11384 | — |
| | Febbraio | 2998 | 5345 | 11882 | — | 1429 | 2849 | 10495 | — |
| | Marzo | 5860 | 10331 | 24677 | — | 2880 | 8628 | 40546 | — |
| | Aprile | 7391 | 15821 | 55281 | — | 3730 | 10809 | 29247 | — |
| | Maggio | 6298 | 15099 | 55392 | — | 5365 | 21509 | 29236 | — |
| | Giugno | 3784 | 13422 | 57230 | — | 3425 | 10791 | 16597 | — |
| | Luglio | 32 | 9214 | 35698 | — | 3712 | 11720 | 17100 | — |
| | Agosto | 4816 | 11990 | 36870 | — | 4791 | 13070 | 18034 | — |
| | Settembre | 4676 | 12038 | 32542 | — | 4348 | 15724 | 20565 | 4356 |
| | Ottobre | 4378 | 5248 | 36836 | 191 | 5591 | 20250 | 32860 | 6877 |
| | Novembre | 1791 | 3381 | 14141 | — | 2500 | 21534 | 25000 | 45 |
| | Dicembre | 2278 | 4495 | 18075 | — | 2501 | 967 | 23000 | — |
| | | 47265 | 111106 | 393979 | | 41902 | 149158 | 274064 | 11278 |
| ufficio PLAIA | Gennaio | — | — | — | — | — | — | — | — |
| | Febbraio | — | — | — | — | — | — | — | — |
| | Marzo | — | — | — | — | — | 135 | — | — |
| | Aprile | — | — | — | — | — | 787 | 1450 | — |
| | Maggio | — | — | — | — | — | 275 | — | — |
| | Giugno | — | — | — | — | — | 149 | 582 | — |
| | Luglio | — | — | — | — | — | 244 | 632 | — |
| | Agosto | — | — | — | — | — | 134 | 531 | — |
| | Settembre | — | — | — | — | — | 3 | 394 | — |
| | Ottobre | — | — | — | — | — | 128 | 344 | — |
| | Novembre | — | — | — | — | 27 | 92 | 880 | — |
| | Dicembre | — | — | — | — | — | — | 166 | — |
| | | — | — | — | — | 27 | 1947 | 4979 | — |
| | | 47265 | 156626 | 393979 | 581 | 42279 | 172160 | 308184 | 11278 |

Prof. S. CITELLI

# Su un caso di settico-piemia otitica da enterococco in cui riuscì preziosa la auto-vaccino-terapia. E sulla efficacia della immuniterapia anche nelle altre infezioni gravi di origine otitica. [1]

Credo utile riferire per esteso, fra i tanti da me curati, un solo caso clinico, perchè ad esso si connettono nozioni molto recenti riguardanti l'importanza dell'enterococco nelle infezioni otitiche, e nozioni terapiche nuove, riguardanti l'efficacia del relativo autovaccino, che pare non sia stato mai adoperato da altri, almeno nelle forme chirurgiche da enterococco. Per le altre infezioni (da strepto diplo-stafilococco ecc.) sarà sufficiente quanto accennerò in ultimo.

Caliceti e Vaglio, studiando per mio consiglio i germi di tre casi rapidamente mortali di complicanze otitiche acute che avevano presentato una eccezionale gravità, trovarono che all'enterococco si dovette, sia l'infezione generale e mastoidea come quella timpanica (1). In base a estese ricerche batteriologiche, che gli Autori sudetti stavano continuando, essi affermarono per i primi che l'enterococco può dare anche infezioni otitiche, le quali non di rado pare presentino una eccezionale gravità, per la tendenza che ha il germe a invadere rapidamente, oltrechè la mastoide, i seni della dura, il sacco aracnoide, il sangue. La osservazione clinica che riferirò, mi occorse appunto in zona di guerra, nello stesso riparto da me diretto, dove si ebbero i tre casi studiati da Caliceti e Vaglio.

M. A. soldato di anni 27 riferisce che 4 mesi prima di presentarsi al nostro ospedale da Campo (si presentò l'11 aprile 917), in seguito a forte raffreddore con febbre, cominciò ad avere suppurazione timpanica a destra. Per il passato non aveva mai sofferto malattie d'orecchio, nè altre degne di rilievo: si trattava del resto di un giovane discretamente robusto e abbastanza sano.

La secrezione purulenta che veniva fuori dalla cassa era completamente inodora e non tanto abbondante. All'endoscopia si trovò una vasta perforazione ovoidale antero-inferiore della membrana, la quale era notevolmente iperemica ed infiltrata. Nulla di apprezzabile esisteva, in principio, alla mastoide. Si fece diagnosi di suppurazione timpanica semplice a destra, cronica riacutizzata.

Da principio non si ebbero a rilevare fatti di speciale importanza: la suppurazione, come anche le note di infiammazione acuta della cassa andavano lentamente diminuendo; sicchè si sperava di potere ottenere la guarigione persistendo nelle cure mediche. Senonchè il 3 maggio (3 settimane dopo l'entrata nel reparto) l'infermo, ch'era stato sempre sfebbrato, ebbe la mattina 37.2 e la sera, con lieve brivido, febbre a 40: nello stesso tempo comparvero dolori spontanei intensi all'orecchio. L'indomani la temperatura massima (di sera) fu solo di 37.4, e poscia variò da 37.4 a 38.4; essendo però comparsi dolori alla pressione sulla mastoide e poscia tumefazione di questa con arrossamento dei tegumenti, il 12 maggio si intervenne operativamente. Si asportò tutta la mastoide, sede

(1) Comunicazione fatta nella seduta del 20 Febbraio 1918.

di una osteite diffusa con scarso essudato siero-purulento nelle cellule, e si scoprì in gran parte il seno sigmoide, il quale presentavasi di colorito grigio un po' sporco. Siccome però il seno era pulsante e depressibile, e siccome durante l'operazione venne aperto il suo emissario, il quale diede un getto di sangue abbondante e un po' pulsante (1), non si credette per il momento di aprire il seno; anche perchè la temperatura e lo stato generale ancora non facevano pensare a una pioemia o settico-pioemia.

Dopo l'operazione, però, le condizioni dell'infermo, piuttosto che migliorare, peggiorarono: comparve difatti un colorito sub-itterico, persistette la cefalea, e la temperatura nei giorni 15, 16 e 17 maggio fu la seguente: 38.9 - 38.3; 38. 5- 39.4; 39.1 - 38.6. I movimenti del collo, intanto, erano quasi del tutto liberi e indolenti, la palpazione sulla giugulare provocava appena un po' di dolore, e non si apprezzava l'esistenza di un cordone lungo il decorso del vase. Non esisteva nistagmo nè disturbi di equilibrio; il sensorio era ottimo, i movimenti oculari e la reazione pupillare normali.

Il 17 sera si interviene per la seconda volta, sopratutto per agire sul seno. Si pratica la radicale, si scopre tutto il seno sigmoide, dal gomito superiore fino alla parte superiore del golfo (attorno e sopratutto in avanti al quale si trovano piccole cellule con siero-pus), e, attraverso alcune cellule della squama del temporale piene di siero pus, si scopre ampiamente la dura della base del lobo temporo-sfenoidale. Siccome questo non presentava pulsazioni, dopo incisione della dura, lo esploro colla sonda scanalata, della quale abitualmente mi servo negli ascessi encefalici: il risultato però fu negativo. Il seno invece, che si presentava d'aspetto grigio-giallastro opaco e non pulsante (solo premendo un poco, col dito mignolo, l'estremo inferiore di esso, si notava appena una leggera pulsazione) inciso, conteneva non più sangue circolante ma un coagulo macroscopicamente non purulento e non tanto grosso. Viene asportata allora quasi tutta la sua parete esterna: dopo di che con pinze a denti (com'è mia abitudine) porto via tutto il coagulo, fino a ottenere un fiotto di sangue abbondante, sia dal moncone superiore come da quello inferiore. Ottenuto il fiotto sanguigno anche in basso, non procedetti alla legatura della giugulare (2).

Tuttavia dopo un così completo atto operativo, lo stato generale si manteneva grave: la cefalea rimase intensa,il polso piccolo, spiccatamente itteriche le congiuntive oculari, il sensorio era solo lievemente depresso, la temperatura persisteva alta (Vedi specchietto che riporta la temperatura dall'indomani della seconda operazione fino alla scomparsa della febbre).

Il 20/5, preceduto da lievi dolori e da fatti infiammatorî poco spiccati, si manifestò un ascesso sottocutaneo al terzo medio dell'avambraccio sinistro, parte radiale; ascesso che venne subito inciso, dando esito a pus fluido appena verdastro, discretamente abbondante. La formazione e l'apertura dell'ascesso metastatico, però, come avvenne per gli altri 5 ascessi che si formarono dopo, influì poco o nulla (vedi specchietto) sul decorso della febbre, la quale invece era in rapporto coll'infezione generale settico-piemica. Allora col pus dell'ascesso che, come vedremo, conteneva lo stesso germe del siero-pus mastoideo e del trombo sinusale, feci preparare dal Collega Vaglio l'autovaccino, e il 25/5, giorno in cui la temperatura arrivò a 39.9, iniettai di sera (dopo presa la temperatura) circa 15 milioni di germi sottocute. Tre giorni dopo tale iniezione migliorò in modo evidente lo stato generale e la temperatura, la quale, specie al mattino, presentava delle forti remissioni. Il 30/5, quindi, feci di sera una seconda iniezione con 45 milioni di germi. Visto l'effetto favorevole del vaccino e la tolleranza dell'infermo per esso (si avevano lievi elevazioni di temperatura dopo ogni iniezione), la mattina del 2 giugno iniettai 60 milioni di germi (3ª iniezione); iniezione che ripetei nei giorni: 6 (60 milioni), 9 (90 milioni), 13 (90 milioni) e 16 giugno (90 milioni).

Coll'autovaccinazione, appunto, la febbre scomparve definitivamente dopo la 6ª iniezione, e, colla progressiva miglioria dello stato generale e della ferita operatoria, si ottenne

---

(1) Da quanto segue si rileva che nel seno doveva probabilmente esistere fin d'allora qualche trombo parietale: sicchè l'abbondante sanguinare dell'emissario mastoideo, non serve, neppure esso, come criterio per escludere l'esistenza di un trombo parziale.

(2) Io contrariamente a quanto si teme dagli altri, non ho avuto mai, così facendo, embolia gassosa per penetrazione d'aria nella giugulare interna: mentre, non di rado con ottimo risultato, ho risparmiato in tal modo l'ampia scopertura del golfo e la legatura della giugulare.

la guarigione definitiva. Nel frattempo, intanto, vennero aperti i seguenti ascessi metastatici sottocutanei che, al solito, si formavano senza notevoli fatti reattivi e influenzando poco o nulla il decorso della temperatura e dello stato generale; e cioè; il 4/6 due ascessi (uno al terzo medio della gamba sinistra, parte anterioriore, e l' altro alla parte anteriore del terzo medio della coscia destra), l' 8/6 un ascesso al terzo inferiore dell' avambraccio sinistro (faccia dorsale), l' 11 un ascesso alla parte antero-esterna del gomito destro e finalmente il 20 un ultimo ascesso alla faccia anteriore della metà superiore della coscia sinistra.

### Specchietto della temperatura dall' indomane della 2ª operazione fino alla guarigione.

| | 18 maggio | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mattina | 39.4 | 38.6 | 38.7 | 38.7 | 37.9 | 37.7 | 37.8 | 37.7 | 37.7 | 37.6 | 37.3 | 36.5 | 36.4 | 37.2 |
| sera | 39.6 | 39.9 | 38.9 | 38.8 | 38.7 | 38.7 | 38.5 | 39.9 | 39.2 | 39.2 | 38.6 | 38.6 | 38.6 | 38.4 |
| | | | (si incide ascesso) | | | | | 1ª iniezione vaccino (di sera) | | | | | 2ª iniez. di sera | |

GIUGNO

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 37.1 | 37.1 | 37.2 | 36.7 | 37 | 37.1 | 36.6 | 36.4 | 36 2 | 36.6 | 36.7 | 36.6 | 36.3 |
| | 38.6 | 39.2 | 38.2 | 37.8 | 38 | 38 | 37.4 | 37.4 | 37 | 37.2 | 37.6 | 37.9 | 37.7 |
| | | 3ª iniez. di mattina | | aperti due ascessi | | 4ª iniez. di sera | | 4° ascesso inciso | 5ª iniez. sera | | inciso 5° ascesso | | 6ª iniez. sera |

| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 36.4 | 36 | 36.4 | 36.1 | 36.5 | 36.1 | 36.1 | 36 | 35.8 | 36.6 | 36.2 | 36.1 |
| | 36.6 | 36.7 | 36.5 | 36.5 | 36.4 | 37.3 | 37.3 | 36.2 | 36.1 | 36.2 | 36.7 | 36.4 |
| | | | 7ª iniez. sera | | | | inciso 6° ascesso | | | | | |

L' effetto clinico (sulla temperatura e sullo stato generale) dell' autovaccinazione fu adunque in questo caso evidentissimo e prezioso; sicchè si può affermare che senza la sua azione complementare dei due atti operativi, quasi certamente il paziente sarebbe soggiaciuto alla setticemia.

Ecco infine i reperti batterioscopici e batteriologici del caso in parola :

Nel pus della cassa: discreta quantità di diplococchi, qualche piccola catena di 4-5 elementi, rare forme bacillari.

Nel siero-pus mastoideo: diplococchi e brevi catene.

Nel trombo del seno sigmoide: diplococchi e brevi catene.

Negli ascessi metastatici si riscontrò pure costantemente la sola presenza degli stessi cocchi disposti a coppie e a brevi catene.

Sia con il pus mastoideo che con quello degli ascessi si fecero delle culture:

In *brodo*, dopo 24 ore scarso intorbidamento con fiocchetti lungo le pareti: in seguito il brodo si mantiene torbido. All' esame microscopico di questa cultura si rilevano numerose catene di cocchi leggermente polimorfi.

In *agar* colonie puntiformi di aspetto trasparente, bluastre, che in seguito assumono aspetto opalescente. All'esame batterioscopico di una cultura di 24 ore si notano diplococchi e cocchi in ammassi, talvolta dei cocchi-bacilli.

Colle brodo-culture, poi, sono state iniettate per via sottocutanea ed endo-peritoneale dei piccoli topi e dei conigli. I topi morirono in 24 e più spesso in 36-48 ore di setticemia diplococcica: i conigli invece non mostrarono sintomi morbosi degni di nota. Inoltre il germe tenuto in brodo dopo cinque mesi si sviluppava ancora in cultura e si manteneva virulento per il topo; mentre, come si sa, le culture di streptococco in brodo comune sogliono morire in pochi giorni.

Per tutti i sudetti caratteri, quindi, si è indotti a ritenere questo germe identico all'enterococco; solo il deposito lungo le pareti del tubo nelle culture in brodo si avvicina allo streptococco. L'enterococco, difatti, dopo 24 ore dà lievissimo intorbidamento con scarso deposito al fondo; in seguito il brodo diviene perfettamente limpido e al fondo della provetta notasi un deposito aderente che, agitando, si solleva nel liquido senza dissociarsi. Esistono però anche tipi di enterococco che nelle culture in brodo dànno, come nel nostro caso, deposito di fiocchetti lungo le pareti del tubo.

Il presente caso adunque, dopo i tre comunicati da Caliceti e Vaglio, rappresenta il quarto in cui l'enterococco (probabilmente associatosi alla preesistente infezione timpanica nella fase acuta ultima) ha dato gravissime complicanze otitiche. Però degno del massimo rilievo è il fatto che la vaccinoterapia, completando l'azione della cura chirurgica, riuscì a salvare l'infermo. Credo, infatti, che nessuno finora abbia adoperato la vaccino-terapia nelle infezioni da enterococco, almeno in quelle chirurgiche. I miei risultati perciò dimostrano che la cura vaccinica può dare ottimi risultati nelle infezioni enterococciche, e spingono ad adoperare contro l'enterococco la vaccino e la sieroterapia. Sicchè se, come pare, non c'è in commercio siero anti-enterococcico, sarebbe bene ch'esso venga preparato con diversi ceppi e tipi; tanto più che l'importanza patogena dell'enterococco nelle più svariate infezioni (intestinali, broncopulmonali, epatiche, peritoneali, meningee, otitiche ecc.) è stata in questi ultimi tempi sempre più messa in luce, man mano si son fatte delle ricerche al riguardo.

* * *

Traendo argomento, intanto, dal sudetto caso, credo opportuno richiamare l'attenzione sull'importanza terapica che nelle gravi infezioni di origine otitica può avere la immuniterapia; però se adoperata di solito come cura complementare di interventi chirurgici razionalmente completi, e non senza di essi come alcuni hanno fatto e proposto. Se non si drena o toglie, difatti, il focolaio purulento o settico causale, assai di rado la siero- e la vaccino-terapia potranno dare risultati soddisfacenti. Invece, dominato chirurgicamente il o i focolai purulenti princîpali, la immuniterapia può dare splendidi risultati per completare la cura, nei casi in cui per varie ragioni e sopratutto per la virulenza dell'infezione, il trattamento chirurgico da solo non riesce a dominare o prevenire: una setticemia, una settico-pioemia, una pioemia comune, e anche una meningite, un ascesso encefalico, una labirintite acuta, una osteo-mielite cranica diffusa. Solo nelle relativamente rare suppurazioni timpaniche acute che si accompagnano a setticemia (febbre alta e persistente anche dopo ampia paracentesi, assenza di complicanze mastoidee, stato generale grave che per lo più finisce colla morte) si adopererà solamente (e al più presto possibile) il siero, meglio per via endovenosa (in questi casi di solito si tratta di infezioni prevalentemente o solo streptococciche). Anche nei casi di cosidetta pioemia senza trombosi dei seni o della giugulare, pur non essendo, quando non c'è mastoidite, indicato alcun intervento e pur avendosi così per lo più la guarigione, la immuniterapia può riuscire utile, accorciando il decorso dell'infezione, limitando la formazione di focolai metastatici e, fino a un certo punto, evitando la suppurazione di qualcuno di essi che ne abbia la tendenza.

Io che da anni seguo, quando posso, tale indirizzo con risultati non poche volte insperati, ecco come mi regolo per potermi giovare all'occasione dei sussidî terapici suddetti.

Nelle suppurazioni timpaniche acute sovente si trova non un solo germe ma un paio o poco più; nelle forme croniche, poi, ci suole essere un' associazione microbica più o meno numerosa. Invece nelle consecutive infezioni mastoidee e poscia in quelle generali oppure encefaliche, l' infezione della cassa subisce, come attraverso un filtro relativo, una specie di isolamento, per cui nel pus o comunque nell' essudato delle cellule mastoidee si suole incontrare uno o tutt' al più due germi. Ciò è dovuto al fatto che le complicanze otitiche sogliono essere determinate dal predominio e dall' esaltazione in virulenza di qualcuno dei microbi della cassa. Questo è stato recentemente dimostrato all' evidenza, con ricerche apposite, dal mio Assistente D.r Caliceti.

In base a tali fatti io abitualmente nelle operazioni sulla mastoide col pus o l' essudato sieroso che vi trovo preparo degli strisci e, quando posso, pure delle brodo-culture. Queste sono indispensabili quando si ha il dubbio si tratti di enterococco, sia per preparare l' auto-vaccino (tanto più che non c' è in commercio il relativo siero), sia per potere stabilire che realmente trattasi di enterococco. Sono pure utili le culture anaerobiche. In tal modo, se l' infezione dopo l' operazione non prende una piega favorevole, conoscendo il germe che di solito è unico, posso fare la siero o la vaccino-terapia (questa meglio coll' autovaccino). Se i germi fossero due, si può intervenire con tutt' e due i sieri o vaccini relativi o almeno con quello che corrisponde al microbo il quale suole avere maggiore virulenza. Col pus della cassa, invece, per le ragioni sopra dette, sovente non è facile praticare una immuniterapia efficace; mentre possono servire lo stesso o meglio del pus mastoideo, le emoculture (quando riescono positive) nelle infezioni generali in atto, l' esame del liquido cefalo-rachidiano (nelle meningiti) e quello del pus degli ascessi encefalici.

Va da sè, inoltre, che se dopo la prima operazione se ne rendesse necessaria una seconda o altre, intervengo di nuovo e al più presto. Anche gli ascessi metastatici (dove per lo più si trova il germe causale in cultura pura) vengono, man mano che si formano aperti.

Il siero specifico, nella sieroterapia, in principio lo inietto dentro le vene, alla dose di 1-2 fiale al giorno nei primi 2-3 giorni: dopo, in dose minore e per lo più per via sottocutanea, quando è necessario continuare per qualche altro giorno (ci si lascerà guidare dalla temperatura e dallo stato generale). Se si tratta o si teme una meningite, lo inietto nel sacco durale, proprio come si fa nella meningite epidemica. L'auto-vaccino o lo stock-vaccino, invece, lo inietto sotto cute cominciando, per lo streptococco, con circa 10 milioni di germi, con 12-15 milioni per l' enterococco, con 20 25 milioni per il pneumococco, con 50 milioni per lo stafilococco, etc. L' aumento della dose e l' intervallo tra l'una iniezione e l' altra sarà in rapporto con il comportamento delle condizioni generali dopo le iniezioni, poichè la reazione termica che suole determinare l' iniezione può servire poco nei nostri casi in cui si suole avere febbre alta. Per lo più la dose della 2ª iniezione è approssimativamente doppia della 1ª, la 3ª tripla della 1ª e così di seguito: il numero delle iniezioni negli infermi da me curati ha variato da 3 a 10.

Siccome, intanto, per preparare l' autovaccino ci vogliono non meno di 5 giorni, spesso comincio la cura col siero (quando c' è in commercio quello relativo al germe), per passare poscia, se è necessario continuare la immuniterapia, all' autovaccino; ciò anche per evitare la possibilità di fenomeni anafilattici, che il siero può dare 5-6 giorni dopo la prima iniezione, mentre il vaccino, ch' è preparato con soluzione fisiologica o acqua distillata, non li darà mai. Nelle forme setticemiche pure è per lo più preferibile la siero-terapia

che immette in circolo rapidamente gli anticorpi già preformati. Nelle forme piemiche è preferibile la vaccino-terapia, meglio dopo che nei primi giorni s' è fatta la siero-terapia endovenosa. La auto-vaccino-terapia, infine, è da preferire quando, come non molto di rado succede, si resta in dubbio oppure occorrono molti giorni per stabilire, p. es., se il germe è uno streptococco con qualche elemento a coppia (cosidetto diplo-streptococco) oppure un enterococco, o, nel caso di bacilli, di quale forma si tratti.

Regolandomi come sopra son riuscito a salvare oramai un discreto numero di pazienti (anche con setticemie streptococciche), nei quali l' atto o gli atti operativi, per quanto completi, non erano stati sufficienti a dominare l' infezione. S' è trattato per lo più di infezione da streptococco; ma qualche volta anche da pneumococco, da stafilococco e una volta, come abbiamo esposto, da enterococco.

È questa, a me sembra, la immuniterapia razionale che, ripeto, può dare ottimi risultati, di solito come complemento di atti operativi completi: ed è su di essa che ho creduto opportuno richiamare in modo speciale l' attenzione dei colleghi della specialità, i quali finora si sono occupati assai poco dell' argomento. Scorrendo difatti la letteratura, salvo involontarie omissioni sempre possibili, ho trovato degno di nota solo quanto segue:

Bélogolovoff (di Riga) nel 907 dice che mercè un trattamento medico con siero antistreptococcico e con collargolo, parallelamente a quello chirurgico, aveva avuto buoni risultati nella trombosi dei seni e pioemia settica d' origine otitica (2). L' Autore adunque si limita a raccomandare la sieroterapia solo contro la comune pioemia, e inoltre consiglia una sieroterapia non razionale perchè senza l' esame dei germi vorrebbe adoperato sempre il siero antistreptococcico. Ora, se è vero che le gravi complicanze otitiche sono dovute per lo più allo streptococco, non di rado però esse sono provocate da altri germi (diplococco, stafilocco, colibacillo, piocianeo, Friedländer, bacillo dell' influenza, micrococco tetragono, proteo volgare ecc.).

Arslan nel 908-09 (3), in base a due suoi casi clinici, insiste sulla efficacia delle iniezioni di siero antistreptococcico nella pioemia da streptococco. Però egli raccomanda tale sieroterapia per evitare in simili casi il completamento di atti operativi incompleti sul focolaio causale, o addirittura per risparmiare qualsiasi intervento chirurgico: invece, come ho detto sopra, la sieroterapia, salvo eccezioni, può dare ottimi risultati come complemento di atti operativi completi. Nei due infermi, difatti, curati e guariti dall' autore, molto probabilmente si trattava di pioemia senza trombosi dei seni; perciò fu sufficiente l' intervento sulla sola mastoide senza l' apertura del seno sigmoide. Questi casi spessissimo guariscono senza intervento sul seno e, quando non c' è mastoidite, anche senza alcun intervento e senza sieroterapia. Questa a ogni modo può, come ho detto, in tali evenienze giovare, per accorciare il decorso dell' infezione ed evitare la suppurazione di qualche focolaio metastatico che ne avesse la tendenza.

Chmourlo nel 909 dice che nella pioemia e setticemia d' origine otitica, oltre della cura chirurgica, si può fare uso pure del siero antistreptococcico (4).

Gradenigo nello stesso anno (5) accenna a un caso di trombosi infettiva del seno sigmoide, nel quale ottenne la guarigione con ripetuti interventi operativi e il siero antistreptococcico. Non dice però se il germe era lo streptococco.

Urbantschitsch (6) in un caso di setticemia otitica da streptococco, conseguì un miglioramento evidente dello stato generale con due iniezioni sottocutanee di siero antistreptococcico.

v. Wild, invece, dice che non ottenne risultati soddisfacenti coll' iniezione di siero antistreptococcicco, dopo l' operazione sul seno, in qualche caso di comune piemia (7).

Randall (8), dopo avere insistito sulla cura vaccinica nelle suppurazioni timpaniche semplici specie croniche (nei quali casi però, secondo me, la vaccinazione riesce poco utile), parla pure della utilità della autovaccinazione, complementare degli interventi chirurgici, in quelle mastoiditi e loro complicanze in cui la cura si protrae. Riferisce inoltre osservazioni, alcune delle quali di meningite otitica, di qualche altro Autore Americano. Randall, adunque, esagera non poco sulla utilità della autovaccinazione in otologia. D' altro canto nel 905 egli dice (9) che nella setticemia otitica il siero antistreptococcico non gli aveva dato alcun risultato.

Ohnacher (10) nel 911 in un infermo di meningite otitica da streptococco con trombo-flebite, ottenne la guarigione, oltrechè colla cura chirurgica completa del focolaio causale, con ripetute punture lombari seguite da 2 iniezioni (da 20 $cm^3$ ciascuna) di siero anti-streptococcico.

Stoddart Barr nello stesso anno riporta un caso di ascesso cerebellare terminato colla guarigione, in cui oltre alla cura chirurgica razionale praticò ogni 8 giorni iniezioni di autovaccino a dosi crescenti. L' ascesso era dovuto a stafilococco (11).

Logan Turner nel 910 (12) riferisce su un paziente ch'egli guarì di meningite otitica, col curare chirurgicamente il focolaio causale e col praticare ripetute punture lombari, seguite da iniezioni (sottocutanee e nel sacco durale) di siero antistreptococcico. Nel liquido rachidiano torbido aveva trovato lo streptococco, il proteo volgare e un bacillo anaerobio Gram positivo. Nel 912 poi lo stesso Autore (13) riferisce su 5 casi di gravi complicanze otitiche (4 con leptomeningite, di cui una sierosa, e uno con trombosi del seno sigmoide) trattati col siero antistreptococcico. Di essi guarirono 3 dei 4 meningitici (tra cui quello con forma sierosa), gli altri morirono. Inoltre di 4 malati con trombosi del seno (di cui 2 associati a meningite), trattati con l' operazione e con l' autovaccinazione, 3 guarirono uno morì. I germi che l' Autore trovò nei focolai infetti furono: proteo volgare e streptococco piogene nel 1°, colibacillo nel 2°, streptococco, proteo e stafilococco aureo nel 3°, streptococco piogene nel 4°. L' Autore conclude, che secondo lui, senza dubbio, siero e vaccini sono stati utili nei suoi 9 casi, e che in presenza d'una complicanza cranica non si deve esitare a ricorrervi.

Al congresso del 912 della Società tedesca di Otologia, trattandosi come tema la curabilità della meningite otogena, Preysing, relatore, accennò che alla puntura lombare si sono aggiunte le iniezioni lombari di elettrargolo; e Voss riferisce su un caso in cui il siero antistreptococcico iniettato nel sacco durale si mostrò di una efficacia certa. Gli altri Autori che interloquirono sul tema, non accennarono a tale argomento (14).

Lang nella setticemia otogena adoperò il siero antistreptococcico e l' elettrargolo, insistendo molto però sull' azione utile dell' elettrargolo (15).

Braeslin nel 913 dice che l' impiego di vaccini autogeni in alcuni casi di mastoiditi complicate, sembra dare risultati convincenti (16).

Risulta adunque dalla bibliografia come, salvo pochi accenni, non concordi, parziali e per lo più non razionali o esatti, finora nella nostra disciplina nessuno aveva insistito convenientemente sul fatto che la immuniterapia merita di essere adoperata sistematicamente e razionalmente, di solito come complemento della cura chirurgica completa, in cui questa da sola non riesce a vincere le complicanze gravi di una infezione otitica.

# BIBLIOGRAFIA

(1) **Caliceti e Vaglio** — Policlinico — Sezione pratica e Chirurgica 1917.

(2) **Bélogolovoff** — Trombosi dei seni e pioemia settica d' origine otitica — Giornale mensile russo dell'orecchio, naso e gola — 1907.

(3) **Arslan** — Pioemia otitica da streptococco con sinusite — Accademia Med. di Padova 31 gennaio 1908 e Bollettino malattie d' orecchio naso e gola 1909.

(4) **Chmourlo** — La pioemia e la setticemia d' origine otitica e loro trattamento — Giornale mensile russo dell' orecchio del naso e della gola — 1909.

(5) **Gradenigo** — Trattamento della trombosi infettiva del seno sigmoide d' origine otitica — R. Accademia di Medicina di Torino 19 Novembre 1909.

(6) **Urbantschitsch** — Ebenda — Vol. 43 — 1909.

(7) **v. Wild** — Zeitschrift für Ohrenh. Vol. 57 — 1909.

(8) **Randall** — La terapia vaccinica in Otologia — The Laryngoscope — Vol. 20 Settembre 1910.

(9) **id.** — Therapeutic Gazette — Aprile 1905.

(10) **Ohnacher** — Zeitschrift für Ohrenh Vol. 63 4° fasc. — 1911.

(11) **Stoddart Barr** — Società scozzese di Otologia e di laringologia — Seduta 20 Maggio 1911 — rifer. in Annales des maladies de l' or. 1912 pag. 81 — 2ª parte.

(12) **Logan Turner** — Due casi di meningite complicanti otite media suppurata cronica con guarigione—Edinburgh. Med. Journal, Febbraio 1910.

(13) **id.** — Journal of Laryng. Rhinol. and Otol. — Giugno 912.

(14) **Congresso della Società Otologica tedesca dal 1912** — rifer. in Annales des mal. de l'or. p. 81 1912 2ª parte.

(15) **Lang** — Il siero antistreptococcico e l' elettrargolo nel trattamento della setticemia otogena — Archiv für Ohrenh. Vol. 90 fasc. 4°.

(16) **Braeslin** — L' impiego dei vaccini dopo la cura mastoidea — Annal. of Otol. Dicembre 1913.

# Ricerche sulle congruenze di $V_{r-2}$ che ricoprono semplicemente l'$S_r$.

## Memoria di GIUSEPPE MARLETTA

Per quanto io sappia quasi nulla si conosce delle congruenze di varietà $V_{r-2}^{m}$, con $m>1$, dell' $S_r$, eccetto il caso particolarissimo di $r=3$ e $m=2$; per $r=3$ ed $m \geq 3$ si conosce pochissimo.

Ho creduto quindi conveniente occuparmi di dette congruenze nell' ipotesi generale di $r$ ed $m$ qualunque; e in questo lavoro ne ho cominciato lo studio trattando delle congruenze d'ordine *uno*, di quelle, cioè, che ricoprono semplicemente l' ambiente $S_r$.

Premessi, nell' introduzione, alcuni noti teoremi assai utili per il seguito, nel cap. I si assegnano tutte le congruenze di classe $\nu=0, 1, 2$ con un metodo semplicissimo e fecondo che consiste nel trarre profitto di una certa superficie $F$ la quale, com' è noto, è intimamente legata (Castelnuovo) all'involuzione che le varietà della congruenza determinano sopra un piano generico. Per $r=2$ la congruenza di $V_{r-2}^{m}$ diventa un' involuzione piana d' ordine $m$ (cioè di gruppi di $m$ punti ciascuno); in tal modo si ha l' occasione (nº 25, *b*) di presentare un' involuzione piana, d' ordine *2* e classe *2*, che credo *nuova*.

Nel cap. II si studiano le congruenze generate da varietà $V_{r-2}^{m}$ iperpiane, specialmente quelle di classe $\nu=0$, $\binom{m}{2}$, $2\binom{m}{2}$. Si trovano quindi, per via diversa, noti teoremi sulle congruenze di coniche, e teoremi nuovi sulle congruenze di cubiche piane.

1. Chiameremo *congruenza*, nell' $S_r$, ogni varietà algebrica doppiamente infinita di varietà algebriche $V_{r-2}^{m}$; essa sarà costantemente indicata con $\Gamma$, e le sue $V_{r-2}^{m}$ con $k$.

Il numero (finito) delle $k$ passanti per un punto generico dell'ambiente $S_r$, sarà detto *ordine* di $\Gamma$; *classe* di questa sarà il numero (finito) $\nu$ delle coppie di punti ognuna appartenente ad una data retta generica e ad una varietà $k$.

Un punto si dirà *singolare* se per esso passano infinite $k$; sarà *fondamentale* se per esso passano tutte le $k$. Analogamente una retta si dirà *singolare* se essa è corda di infinite $k$; sarà *fondamentale* se essa è corda di tutte le $k$. Infine sarà chiamata ipersuperficie *appartenente* a $\Gamma$, ogni ipersuperficie luogo algebrico di $\infty^1$ varietà $k$.

2. Si osservi che se le $k$ sono varietà iperpiane [1], la classe $\nu$, se maggiore di zero, è eguale ad $ls\binom{m}{2}$, indicando con $l$ il numero (finito) degl' iperpiani, delle $k$, passanti per una retta generica, e con $s$ il numero (finito) delle $k$ esistenti in uno generico degl' iperpiani contenenti qualche $k$.

Siccome in tutto questo lavoro si tratterà soltanto di congruenze d' ordine *uno*, conveniamo, una volta per tutte, di indicare con $\Gamma_{m,\nu}$ una congruenza, d' ordine *1*, le cui $V_{r-2}$ siano d' ordine $m$ e la cui classe sia $\nu$.

[1] Una varietà sarà detta *iperpiana* quando è immersa in un iperpiano; ne segue che essa è d' ordine $m > 1$.

3. Secando $\Gamma_{m,\nu}$ con un piano generico, si ottiene in questo un' involuzione piana $I$ d' ordine $m$. Essendo (CASTELNUOVO) $I$ razionale, i suoi gruppi si possono mettere in corrispondenza algebrica biunivoca coi punti di una qualunque delle superficie razionali; ma fra queste è notevole una, normale, $F$, dallo studio della quale ([2]) si possono dedurre le proprietà dell' involuzione $I$. Ma le $k$ sono in corrispondenza algebrica biunivoca coi gruppi di $I$, quindi possiamo concludere che la congruenza $\Gamma$ è rappresentata, biunivocamente, su questa certa superficie $F$, anzi per mezzo di questa medesima si potrà addirittura studiare $\Gamma$.

4. Riassumiamo quì i principali teoremi dei quali ci serviremo, teoremi che si possono facilmente dimostrare applicando all' involuzione $I$ quanto stabilirono il CASTELNUOVO e il FERRETTI nei lavori citati, ovvero addirittura sostituendo, in questi lavori, alla $I$ la congruenza $\Gamma$.

*a)* L' ordine di $F$ è $2\nu+\delta+1$, ove $\delta$ è l' ordine della curva unita dell' involuzione $I$.

*b)* L' ordine $m$ delle $k$ non è maggiore dell' ordine di $F$.

*c)* La sezione iperpiana di $F$ ha per genere la classe $\nu$ di $\Gamma$.

*d)* Un' ipersuperficie appartenente (n° 1) a $\Gamma$ ha per corrispondente, sulla superficie $F$, una curva dello stesso ordine; e viceversa.

5. Perchè utili in seguito, rammentiamo qui alcuni teoremi ([3]) sulle involuzioni piane.

*a)* Dati in uno stesso piano due fasci $\varphi$ e $\varphi'$ di curve rispettivamente d' ordine $n$ e $n'$, e ammesso che esista un sistema di curve (fondamentali) ognuna delle quali (sia d' ordine $z_i$ la generica) non abbia punti variabili comuni con le curve di essi fasci, l'involuzione da questi medesimi generata è di classe

$$\nu=(n-1)(n'-1)-\frac{1}{2}\sum_i z_i(z_i-1).$$

*b)* Data, in un piano, una rete $\varphi$ di curve d' ordine $n$, e ammesso che esista un sistema di curve (fondamentali) una qualunque delle quali (sia d' ordine $z_i$ la generica) non abbia punti variabili comuni con le curve di $\varphi$, l' involuzione da essa rete generata è di classe

$$\nu=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\sum_i z_i(z_i-1).$$

## CAP. I.

### § 1.

### $\nu=0$.

6. Nell' ambiente $S_r$ sia $\Gamma_{m,0}$ una congruenza d' ordine $1$ e classe $\nu=0$ di varietà $k\equiv V_{r-2}^m$.

---

([2]) L' idea, veramente geniale, di legare all' involuzione $I$ la superficie $F$, è dovuta al CASTELNUOVO nell' importante studio *Sulla razionalità delle involuzioni piane* [Mathematische Annalen, Bd. 44 (1893)]. Se ne servì il FERRETTI nella Nota *Sulla generazione delle involuzioni piane di classe zero ed uno* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII (1903)].

([3]) CHIZZONI, *Sopra le involuzioni nel piano* [Atti della R. Accademia dei Lincei, serie 3ª, vol. 19 (1883)].

La superficie $F$, relativa a $\Gamma_{m,o}$, è (n° 4, c) a sezioni iperpiane razionali, onde essa o è rigata ovvero è la superficie di VERONESE.

Nella prima ipotesi la congruenza ha (n° 4, *d*) un fascio d'iperpiani appartenenti ad essa, e in ciascuno di questi le varietà $k$ costituiscono un fascio, giacchè per un punto generico di $S_r$ passa una sola varietà $k$; ne segue che queste sono varietà iperpiane. Viceversa se le $k$ sono varietà iperpiane, la superficie $F$ è rigata, infatti se essa fosse la superficie di VERONESE, l'involuzione $I$ (n° 3) sarebbe generabile mediante una rete di coniche con uno o nessun punto base [4], ciò che contradice all'ipotesi fatta sulle varietà $k$.

Dunque :

*se le varietà* k *di* $\Gamma_{m,0}$ *sono iperpiane, i loro iperpiani generano un fascio, e in ognuno di essi esistono* $\infty^1$ *varietà* k *le quali costituiscono un fascio.*

7. Si osservi inoltre, sempre nella stessa ipotesi, che fissato in $F$ un fascio di sezioni iperpiane, ogni punto di $F$ si può considerare come comune ad una di queste sezioni e ad una retta (n° 6) di $F$; e viceversa due siffatte curve si secano in un (sol) punto di $F$. Ma ad una qualunque curva di questa superficie corrisponde (n° 4, *d*) un'ipersuperficie appartenente a $\Gamma$, quindi concludiamo che

*ogni congruenza* $\Gamma_{m,0}$, *d'ordine* 1 *e classe* 0, *di varietà iperpiane, è sempre generabile mediante un fascio* $\varphi$ *d'iperpiani e un fascio* $\psi$ *d'ipersuperficie irriducibili d'ordine* $m+h$ *aventi come* h-*pla la base di* $\varphi$.

8. Da quanto si disse nel n° 6 segue pure (n° 4, *b*) che

*in* $S_r$ *non esistono congruenze d'ordine* 1 *e classe* 0, *di varietà* $V_{r-2}^m$ *non iperpiane e d'ordine* $m > 4$.

9. Sia $m = 3$ e le varietà $k$ non siano iperpiane; la $F$ è dunque (n° 6) la superficie di VERONESE.

Alla rete delle coniche di questa corrisponde (n° 4, *d*) una rete d'iperquadriche appartenenti a $\Gamma_{3,0}$, e ad un fascio di quella un fascio, di questa, la cui base ha come parte variabile una varietà $k$. Ne segue che

*ogni congruenza* $\Gamma_{3,0}$ *di varietà non iperpiane, è sempre generabile mediante una rete d'iperquadriche tutte passanti per un* $S_{r-2}$ *fisso.*

Che effettivamente in tal modo si ottenga una congruenza d'ordine *uno* è evidente; che, poi, essa sia di classe *zero* è facilissimo dimostrare o direttamente ovvero mediante il teorema del n° 5 *b*.

10. *a*) Per $r = 3$ il teorema precedente afferma che ogni congruenza di cubiche gobbe, d'ordine *uno* e classe *zero*, è sempre generabile mediante una rete di quadriche alla cui base appartenga una retta $d$. Questa retta è, evidentemente, corda di qualunque cubica gobba $k$ di $\Gamma_{3,0}$, cubica che passa, inoltre, pei quattro punti che insieme con $d$ costituiscono la base della detta rete d'iperquadriche. Dunque [5]

*ogni congruenza di cubiche gobbe, d'ordine* 1 *e classe* 0, *è generata da tutte le cubiche passanti per quattro punti dati (non complanari) e aventi come corda una retta data.*

---

[4] Si noti come il teorema di questo n° 6, si può dimostrare anche direttamente, cioè senza tener conto della superficie $F$.

[5] VENERONI, *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVI (1902)], n° 7.

Che la congruenza generata come ora si è detto sia d'ordine *uno* è evidente; che sia di classe *zero* si può anche dimostrare direttamente osservando che se una retta generica fosse corda di qualcuna delle dette cubiche, essa retta apparterrebbe ad una stessa quadrica insieme con $d$ e coi quattro punti dati, ciò che è assurdo.

*b*) Per $r = 4$ il teorema del n° 9 afferma che

*nell'* $S_4$ *ogni congruenza, di rigate cubiche normali, d'ordine* 1 *e classe* 0, *è generabile mediante una rete d'iperquadriche tutte passanti per un piano fisso;*

cioè

*nell'* $S_4$ *ogni congruenza, di rigate cubiche normali, d'ordine* 1 *e classe* 0, *è generata da tutte le rigate cubiche normali passanti per una data quartica razionale normale, e che abbiano, inoltre, una conica in uno dato dei piani trisecanti questa quartica.*

Che effettivamente con tale costruzione si ottenga una $\Gamma_{3,0}$, si dimostra, direttamente, in modo analogo a come si fece in *a*).

11. Sia $m = 4$; anche ora, se le $k$ non sono varietà iperpiane, $F$ è (n° 6) la superficie di VERONESE. Dunque

a) *ogni congruenza* $\Gamma_{4,0}$, *di varietà non iperpiane, è generabile mediante una generica rete d'iperquadriche.*

Ne segue che

b) *non esistono congruenze* $\Gamma_{4,0}$ *le cui varietà* k *non siano, ognuna, la totale intersezione di due iperquadriche.*

12. Per $r = 3$ possiamo (n° 11, *b*) dunque affermare che

a) *non esistono congruenze d'ordine* 1 *e classe* 0 *di quartiche gobbe di* $2^a$ *specie.*

Inoltre (n° 11, *a*)

b) *ogni congruenza, d'ordine* 1 *e classe* 0, *di quartiche gobbe di* $1^a$ *specie, è generata da tutte le siffatte quartiche passanti pei punti base di una generica rete di quadriche* ([6]).

Per $r = 4$ non esistono (n° 11, *b*) congruenze d'ordine *uno* e classe *zero* di superficie d'ordine *4* immerse nell' $S_4$ e che non siano superficie di SEGRE. Inoltre

c) *ogni congruenza d'ordine* 1 *e classe* 0 *di superficie di* SEGRE *è generabile mediante una generica rete d'iperquadriche;*

cioè

*ogni congruenza d'ordine* 1 *e classe* 0 *di superficie di* SEGRE, *è generata da tutte le superficie di* SEGRE *passanti per la curva base di una generica rete d'iperquadriche.*

È anche facilissimo dimostrare direttamente che con le costruzioni date in *b*) e in *c*), si ottiene effettivamente una congruenza $\Gamma_{4,0}$.

13. Si osservi (n$^i$ 8 e 11 *b*) che nell' $S_3$ non esistono congruenze d'ordine *1* e classe *0* di curve gobbe oltre le due date nel n° 10 *a*) e nel n° 12 *b*); nell' $S_4$ non esistono con-

([6]) Se le quartiche $k$ sono ellittiche, allora la rete ha 8 punti base semplici che, com'è noto, formano un *gruppo di 8 punti associati*; ne segue che il teorema si potrebbe enunciare anche in quest'altro modo: *ogni congruenza d'ordine* 1 *e classe* 0 *di quartiche gobbe ellittiche, è generata da tutte le siffatte quartiche passanti per sette punti generici dello spazio.*

gruenze d' ordine *1* e classe *0* di superficie, in esso immerse, oltre le due date nel n° 10 *b*) e nel n° 12 *c*).

§ 2.

$\nu = 1$.

14. In $S_r$ sia data la congruenza $\Gamma_{m,1}$ di classe $\nu = 1$.

La superficie $F$ è dunque (n° 4, *c*) a sezioni iperpiane ellittiche, e quindi d' ordine $\leq 9$. Ne segue subito (n° 4, *b*) che

*in* $S_r$ *non esiste alcuna congruenza d' ordine* 1 *e classe* 1 *generata da varietà* $V_{r-2}$ *d' ordine* $m > 9$.

15. Tenendo presente i noti tipi di sistemi lineari di curve piane ellittiche, si può concludere che

*ogni congruenza* $\Gamma_{m,1}$ *è generabile con una* (*almeno*) *delle costruzioni seguenti:*

a) *mediante due fasci d' iperquadriche,* $\varphi$ *e* $\psi$, *non dotati d' iperquadrica comune*;

b) *mediante una rete d' ipersuperficie cubiche;*

c) *mediante un fascio* $\varphi$ *d' iperquadriche e un fascio* $\psi$ *d' ipersuperficie d' ordine 4 una delle quali si spezzi in due iperquadriche di* $\varphi$.

La congruenza $\Gamma_{m,1}$ è generabile come è detto in *b*), quando la superficie $F$ è rappresentata da un sistema lineare di cubiche (ellittiche). Ne segue che in tale ipotesi la $\Gamma_{m,1}$ può, come caso particolare, essere generata anche mediante due fasci: uno $\varphi$ d' iperquadriche e l' altro $\psi$ d' ipersuperficie cubiche di una delle quali faccia parte un' iperquadrica di $\varphi$. Sempre nella medesima ipotesi, e come caso particolare, la $\Gamma_{m,1}$ può essere generata anche come è detto in *a*), con la condizione che esista un iperpiano comune ad un' iperquadrica di $\varphi$ e ad una di $\psi$.

Se la superficie $F$ è rappresentata dal sistema lineare $|\lambda_{1^2 2^2}^4|$, la congruenza $\Gamma_{m,1}$ è generabile come è detto in *a*) se i punti 1 e 2 sono distinti, è generabile come in *c*) se questi due punti sono infinitamente vicini. In quest' ultima ipotesi il fascio $\psi$ di cui si parla in *c*), corrisponde al fascio di quartiche, di $F$, avente per immagine il fascio di coniche $|\lambda_{1234}^2|$, essendo 3 e 4 due punti arbitrari del piano rappresentativo. Secondo che questi due punti sono distinti o infinitamente vicini, le due iperquadriche di $\varphi$, costituenti un' ipersuperficie di $\psi$, saranno distinte ovvero no ([7]).

Si noti, infine, che in virtù dei teoremi del n° 5, ogni congruenza costruita come è detto in *a*), *b*), *c*), è effettivamente di classe $\nu = 1$. Che, poi, sia d' ordine *1* è evidente.

16. Per $m = 2$ la superficie $F$ non è rappresentabile ([8]) mediante un sistema lineare

---

([7]) Si noti dunque che il fascio $\psi$ può, per la costruzione di $\Gamma_{m,1}$, essere sostituito da infiniti altri, e in modo che le due iperquadriche, ora dette nel testo, siano, ad arbitrio, distinte o no.

([8]) La superficie $F$ non può essere rappresentata dal sistema lineare $|\lambda_{1^2 2^2}^4|$; infatti se i punti 1 e 2 fossero distinti, $\Gamma_{2,1}$ sarebbe generata, è vero, da due fasci d'iperquadriche, ma le basi di questi non avrebbero una $V_{r-2}^2$ irriducibile comune (il che è necessario), perchè l' esistenza di questa varietà conduce di conseguenza (n° 4, *d*) all' esistenza d' iperpiani appartenenti (n° 1) a $\Gamma_{2,1}$, ciò che (n° 4, *d*) è assurdo giacchè sulla $F$ rappresentata come si è detto, non esiste alcuna retta. L' ipotesi, poi, che i punti 1 e 2 siano infinitamente vicini si esclude pure. Infatti si ammetta che $F$ possa essere rappresentata in tal modo. Allora del fascio $\psi$

di quartiche con due punti doppi, onde possiamo (n° 15) affermare che
*in* $S_r$ *ogni congruenza* $\Gamma_{2,1}$ *è generabile mediante una rete d' ipersuperficie cubiche* (9).

In qualche caso particolare una congruenza $\Gamma_{2,1}$ può anche essere generata mediante due fasci d' iperquadriche $\varphi$ e $\psi$ non dotati d' iperquadrica comune, e tali che esista un iperpiano comune ad un' iperquadrica di $\varphi$ e ad una di $\psi$; ovvero mediante due fasci, uno $\varphi$ d' iperquadriche l' altro $\psi$ d' ipersuperficie cubiche, tali che esista un' iperquadrica di $\varphi$ la quale sia parte di una ipersuperficie di $\psi$.

17. Per $r = 3$ si ha (n° 16) che

a) *ogni congruenza* $\Gamma_{2,1}$ *di coniche è generabile mediante una rete di superficie cubiche tutte passanti per una curva gobba d' ordine 7 e genere* $p = 5$.

Inoltre
*come caso particolare una congruenza* $\Gamma_{2,1}$ *di coniche può anche essere generata*

b) *mediante due fasci di quadriche,* $\varphi$ *e* $\psi$, *non dotati di quadrica comune, e tali che esista una conica comune alle loro basi*;

c) *mediante un fascio di* $\varphi$ *di quadriche e un fascio* $\psi$ *di superficie cubiche, tali che esista una quadrica di* $\varphi$ *parte di una superficie di* $\psi$; *inoltre o la base di* $\varphi$ *appartiene a quella di* $\psi$, *ovvero essa si spezza in quattro rette delle quali una sia doppia per le superficie di* $\psi$, *e altre due, a questa incidenti, siano semplici per queste superficie medesime.*

È facile dimostrare, e del resto ritroveremo per altra via, che il teorema *a*) è equivalente a quest' altro noto (10):

*Ogni congruenza* $\Gamma_{2,1}$ *di coniche, è generata dalle coniche 6-secanti una curva (gobba) d' ordine 7 e genere* $p = 5$.

18. Per $m = 3$ si può (n° 15) affermare che
*ogni congruenza* $\Gamma_{3,1}$ *è generabile con una (almeno) delle costruzioni seguenti*:

a) *mediante due fasci d' iperquadriche,* $\varphi$ *e* $\psi$, *non dotati d' iperquadrica comune e le cui basi hanno un* $S_{r-2}$ *comune*;

---

di coniche appartenenti all' involuzione $I$ (n° 3), e a cui corrisponde il fascio di $F$ rappresentato da $|\lambda_1^1|$, si scelgano due coniche generiche irriducibili. A queste corrispondono due rette passanti per il punto 1; si fissino su queste rispettivamente due punti generici 3 e 4, e si consideri il fascio $|\lambda_{1234}^2|$. Esso rappresenta un fascio di quartiche, di $F$, a cui corrisponde un fascio $\tau$ di quartiche, di $I$, le quali, dovendo essere secati in due punti (coniugati) variabili dalle coniche di $\theta$, avrà fra i suoi punti base i punti base di $\theta$, anzi due di questi come doppi. Ciò posto la retta congiungente i due punti base semplici è secata dalle quartiche di $\tau$ in due punti (coniugati) variabili, onde ad essa corrisponde (n° 4, *d*) una retta di $F$, e ciò è assurdo perchè su $F$ non esistono rette. Si noti che non si può obbiettare che la detta retta insieme con la congiungente i due punti base doppi, faccia parte di una quartica di $\tau$, perchè in tal caso $I$ sarebbe (n° 5, *a*) di classe $\nu = 1 . 3 - 2 - 1 = 0$. Se poi i punti base di $\theta$ fossero per $\tau$ uno triplo e tre semplici, allora, ragionando come si è fatto, si concluderebbe l' esistenza in $F$ di tre rette, ciò che è assurdo. Concludiamo dunque che l' ipotesi dei punti 1 e 2 infinitamente vicini è anche da escludere.

Si noti infine che il caso dei punti 1 e 2 distinti si può escludere anche con le considerazioni fatte per il secondo caso, con qualche lievissimo ritocco.

(9) Questa rete, evidentemente, deve esser tale che due sue ipersuperficie generiche abbiano come intersezione variabile comune una $V_{r-2}^2$ irriducibile. Analoga osservazione si faccia per quanto ancora si asserisce in questo n°.

(10) MONTESANO, *Su di un sistema lineare di coniche nello spazio* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXVII (1892)].

b) *mediante una rete d'ipersuperficie cubiche alla cui base appartenga una conveniente* [11] $V^6_{r-2}$;

c) *mediante un fascio* $\varphi$ *d' iperquadriche e un fascio* $\psi$ *d' ipersuperficie d' ordine 4 una delle quali si spezzi in due iperquadriche di* $\psi$ [12].

19. In particolare, dunque, per $r = 3$ si ha (n° 18) che *ogni congruenza* $\Gamma_{3,1}$ *di cubiche gobbe, d' ordine 1 e classe 1, è generabile con una (almeno) delle costruzioni seguenti:*

a) *mediante due fasci di quadriche,* $\varphi$ *e* $\psi$, *non dotati di quadrica comune e le cui basi hanno una retta comune;*

b) *mediante una rete di superficie cubiche tutte passanti per una sestica di genere* $p = 3$ *e (di conseguenza) per un punto staccato* [13];

c) *mediante un fascio* $\varphi$ *di quadriche e un fascio* $\psi$ *di superficie d' ordine 4, una delle quali è spezzata in due quadriche di* $\varphi$; *inoltre la base di* $\varphi$ *si spezza in una retta e in una cubica rispettivamente doppia e semplice per le superficie di* $\psi$ [14]:

c') *come in* c) *con la differenza che le quadriche di* $\varphi$ *siano coni dal vertice comune; inoltre della base di* $\varphi$ *due rette siano infinitamente vicine e una di esse sia tripla per le superficie di* $\psi$, *superficie che inoltre passano per le altre due rette della base di* $\varphi$.

Si noti che per ogni congruenza generata come è detto in *a*), *c*), *c'*), una retta che sia comune alle basi dei due fasci è (n° 1) una corda fondamentale; per ogni congruenza generata come è detto in *b*), il punto staccato è (n° 1) un punto fondamentale. Si osservi ancora che una congruenza $\Gamma_{3,1}$ può essere costruibile con due delle costruzioni dette nel teorema; ciò segue dalla rappresentazione piana della superficie $F$ [15]. Del resto un esempio notevole è dato *dalla congruenza* $\Gamma_{3,1}$ *generata da tutte le cubiche gobbe passanti per cinque punti dati* $A, B, C, D, E$. Essa è generata sia dalla rete di superficie cubiche aventi tutte come doppi i quattro punti $A, B, C, D$ e passanti (semplicemente) per $E$; sia dai due fasci di coni quadrici aventi per basi rispettivamente le rette $AB$, $AC$, $AD$, $AE$, e le rette $BA$, $BC$, $BD$, $BE$ [16].

Si noti, infine, che la $\Gamma_{8,1}$ ottenuta con la costruzione detta in *c*) o in *c'*), non è generabile come è detto in *a*), nè come in *b*). Infatti giacchè non esiste alcun piano appartenente alla congruenza, la $F$ non è rappresentata da un sistema lineare di cubiche (ellit-

---

[11] Evidentemente questa $V^6_{r-2}$ deve esser tale che due generiche ipersuperficie della rete si sechino ulteriormente in una $V^3_{r-2}$ irriducibile.

[12] Inoltre le basi di $\varphi$ e $\psi$ devono esser tali che un' iperquadrica di $\varphi$ e un' ipersuperficie di $\psi$ abbiano come intersezione variabile comune una $V^3_{r-2}$ irriducibile.

[13] Si osservi che dati un punto e una sestica gobba di genere $p = 3$, le superficie cubiche passanti per questa e per quello costituiscono una rete

[14] Per i teoremi *a*) e *b*), di questo n°, cfr.

VENERONI, l. c. in [5], n. 9, 10, 11 e 12. Per il teorema *c*) cfr.

VENERONI, *Sui vari tipi di congruenze bilineari di cubiche gobbe* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 2ª, vol. XXXVII (1904)].

[15] Da questa rappresentazione seguono infinite altre costruzioni di $\Gamma_{3,1}$, ma con superficie d' ordine più elevato di quelle dette nel teorema. Basterebbe, p. es., scegliere, nel piano rappresentativo di $F$, una rete omaloidica qualunque.

[16] VENERONI, l. c. in [5], n° 12.

tiche); nè $F$ può essere rappresentata dal sistema $|\lambda_{1^2 2^2}^4|$ coi punti 1 e 2 distinti, perchè in tal caso nessuno dei due fasci di quadriche appartenenti a $\Gamma_{3,1}$ sarebbe tale che due sue quadriche costituiscano una stessa superficie del fascio $\psi$.

20. Per $m = 4$ ed $r$ qualunque basterà servirsi di quanto è detto nel n° 15.

In particolare per $r = 3$ e se le curve $k$ di $\Gamma_{4,1}$ sono quartiche (gobbe) di 1ª specie, si ha che

*ogni congruenza $\Gamma_{4,1}$ di quartiche gobbe di 1ª specie è generabile con una (almeno) delle seguenti costruzioni:*

a) *mediante due fasci di quadriche, $\varphi$ e $\psi$, non dotati di quadrica comune e le cui basi non abbiano alcuna curva comune;*

b) *mediante una rete di superficie cubiche tutte passanti per una quintica di genere $p = 2$ e (di conseguenza) per quattro punti staccati* ([17]);

c) *mediante un fascio $\varphi$ di quadriche e un fascio $\psi$ di superficie d' ordine 4 una delle quali si spezzi in due quadriche di $\varphi$; inoltre della base di $\psi$ è parte la base di $\varphi$.*

Si noti che per ogni congruenza $\Gamma_{4,1}$ generata come è detto in *b*), i quattro punti staccati, detti nel teorema, sono (n° 1) punti fondamentali per la congruenza. Si osservi, ancora, che una congruenza $\Gamma_{4,1}$ costruibile come è detto in *b*), può, come caso particolare, essere generabile anche mediante due fasci uno $\varphi$ di quadriche e uno $\psi$ di superficie cubiche di una delle quali è parte una quadrica di $\varphi$; questi fasci, inoltre, son tali che alla base di $\psi$ appartiene una conica parte della base di $\varphi$; ovvero, sempre come caso particolare, come è detto in *a*).

21. Esaminiamo ancora l' ipotesi $m = 4$ ed $r = 3$, ma supponiamo che le quartiche $k$ della congruenza $\Gamma_{4,1}$ siano quartiche di 2ª specie.

La $\Gamma_{4,1}$ evidentemente non è generabile come è detto in *a*) del n° 15. Concludiamo dunque che

*ogni congruenza $\Gamma_{4,1}$ di quartiche gobbe di 2ª specie è generabile con una (almeno) delle costruzioni seguenti:*

b) *mediante una rete di superficie cubiche tutte passanti per una quintica ellittica e (di conseguenza) per due punti staccati* ([18]);

c) *mediante un fascio $\varphi$ di quadriche e un fascio $\psi$ di superficie d' ordine 4 una delle quali si spezzi in due quadriche di $\varphi$; inoltre tutte le superficie di $\psi$ passano doppiamente per una retta e semplicemente per una conica, appartenenti alla base di $\varphi$.*

I due punti staccati dei quali si parla in *b*), sono (n° 1) fondamentali per la congruenza.

Come caso particolare la $\Gamma_{4,1}$ può essere costruibile, oltre di come abbiamo detto, mediante (n° 15) un fascio $\varphi$ di quadriche e uno $\psi$ di superficie cubiche di una delle quali è parte una quadrica di $\varphi$; questi due fasci, inoltre, devono esser tali che alla base di $\psi$ appartengano due rette sghembe parte della base di $\varphi$.

---

([17]) Si noti che le superficie cubiche passanti per una quintica gobba di genere $p = 2$ e per 3 punti staccati, superficie che costituiscono una rete, passano di conseguenza per un altro punto staccato (perfettamente individuato).

([18]) Si noti che dati due punti e una quintica gobba ellittica, le superficie cubiche passanti per questa e per quelli costituiscono una rete.

§ 3.

$\nu = 2$.

22. In $S_r$ sia data la congruenza $\Gamma_{m,2}$ di classe $\nu = 2$, onde se le sue varietà $k$ sono iperpiane sarà necessariamente $m = 2$.

La superficie $F$ è dunque (nº 4, *c*) a sezioni iperpiane di genere $p = 2$, e quindi d'ordine $\leq 12$. Ne segue subito (nº 4, *b*) che

*in* $S_r$ *non esiste alcuna congruenza d'ordine 1 e classe 2 generata da varietà* $V_{r-2}$ *d' ordine* $m > 12$.

23. Tenendo conto dei noti tipi [19] di sistemi lineari di curve piane di genere $p = 2$, si può affermare che

*ogni congruenza* $\Gamma_{m,2}$ *è generabile con una (almeno) delle costruzioni seguenti:*

a) *mediante un fascio* $\varphi$ *d' iperquadriche e un fascio* $\psi$ *d' ipersuperficie cubiche;*

b) *mediante un fascio* $\varphi$ *d' iperquadriche e un fascio* $\psi$ *d' ipersuperficie d' ordine* 4 *di una delle quali è parte una (sola) iperquadrica di* $\varphi$;

c) *mediante un fascio* $\varphi$ *d' iperquadriche e un fascio* $\psi$ *d' ipersuperficie d' ordine* 5 *di una delle quali sono parte due iperquadriche di* $\varphi$;

d) *mediante un fascio* $\varphi$ *d' iperquadriche e un fascio* $\psi$ *d' ipersuperficie d' ordine 6 una delle quali è spezzata in tre iperquadriche di* $\varphi$ [20].

La dimostrazione di questo teorema non offre difficoltà.

La costruzione *c*), p. es., si ha quando la superficie $F$ sia rappresentata da un sistema lineare di quintiche con un punto base triplo $A$ e un punto base doppio $B$ infinitamente vicini. In tal caso conviene considerare il fascio delle rette passanti per $A$, e il fascio delle coniche passanti per $A$, $B$, $C$ e $D$, essendo $C$ e $D$ due puntl generici, del piano rappresentativo, distinti o infinitamente vicini. Le due rette $AC$ e $AD$ sono immagini di quelle due coniche di $F$ alle quali corrispondono le due iperquadriche, di $\varphi$, delle quali si parla nell' enunciato.

La costruzione *d*) si ha quando la superficie $F$ è rappresentata da un sistema lineare di sestiche con un punto base quadruplo $A$ e due punti base doppi $B$ e $C$ situati nell'intorno di 1º ordine del punto quadruplo. In tal caso conviene considerare il fascio di rette passanti per $A$, e il fascio di cubiche aventi $A$ come doppio e passanti per $B$, $C$ e per tre punti generici del piano rappresentativo. Le tre rette che da $A$ proiettano questi tre punti, sono le immagini di quelle tre coniche di $F$ alle quali corrispondono le tre iperquadriche, di $\varphi$, delle quali si parla nell' enunciato.

---

[19] Per questi tipi, dati la prima volta da JUNG, cfr. p. es. FERRETTI, *Sulla riduzione all' ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere* p; *in particolare per i valori* 0, 1, 2 *del genere* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVI (1902)].

[20] La superficie $F$ non può essere rappresentata da un sistema lineare di sestiche con otto punti base doppi, perchè essa è (nº 4, *a*) d' ordine $> 4$. Del resto è noto che il detto sistema lineare non è semplice; cfr. BERTINI, *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* [Annali di Matematica, serie 2ª, tomo 8º (1877)], nº 35; osservazione già fatta dal CREMONA e comunicata per lettera al CAPORALI.

Che effettivamente le congruenze generate come dice il teorema siano d'ordine *1* è evidente; che siano di classe $\nu = 2$ segue dal n° 5 *a*).

24. Per $m = 2$ il teorema del n° precedente si riduce ad affermare che
*ogni congruenza* $\Gamma_{2,2}$ *in* $S_r$

a) *o è generabile mediante un fascio d'iperquadriche e un fascio d'ipersuperficie cubiche, tali che della base di questo sia parte la base di quello*;

b) *ovvero è generabile mediante un fascio* $\varphi$ *d'iperquadriche e un fascio* $\psi$ *d'ipersuperficie d'ordine 5 aventi come doppia la base di* $\varphi$; *inoltre di una di queste superficie sono parte due iperquadriche di* $\varphi$.

25. Per $r = 2$ la $\Gamma_{2,2}$ è un' involuzione piana di coppie di punti, e il teorema del n° precedente afferma che
*ogni involuzione piana* $\Gamma_{2,2}$, *cioè di coppie di punti e di classe* $\nu = 2$,

a) *o è generabile mediante un fascio* $\varphi$ *di coniche e un fascio* $\psi$ *di cubiche tali che della base di questo sia parte la base di quello;*

b) *ovvero è generabile mediante un fascio* $\varphi$ *di coniche e un fascio* $\psi$ *di curve d'ordine 5 tutte aventi come doppi i quattro punti base di* $\varphi$; *inoltre una curva di* $\psi$ *si spezza in due coniche di* $\varphi$ *e in una retta generica.*

La $\Gamma_{2,2}$ generata come è detto in *a*) è un' involuzione di JONQUIÈRES nell'ipotesi che $\varphi$ degeneri in un fascio involutorio di rette il cui centro sia doppio per tutte le cubiche di $\psi$. L'involuzione detta in *b*) non era conosciuta; essa si costruisce mediante un fascio generico $\varphi$ di coniche, e il fascio $\psi$ individuato: da una quintica irriducibile avente come doppi i quattro punti base di $\varphi$, e dalla quintica spezzata in due coniche generiche di $\varphi$ e in una retta $f$ generica ([21]). Infatti se esistesse un fascio $\theta$ di cubiche ellittiche unite (generalmente irriducibili), tale che insieme con $\varphi$ possa costruire l' involuzione $\Gamma_{2,2}$, queste cubiche passerebbero pei quattro punti base di $\varphi$, e tre qualunque dei rimanenti cinque punti base di $\theta$ non potrebbero essere collineari, altrimenti qualche cubica di $\theta$ conterrebbe una conica di $\varphi$, ciò che è assurdo perchè ne verrebbe $\nu < 2$. Dunque l' unico caso da esaminare è che le cubiche di $\theta$ passino tutte per uno (solo) $P$ dei cinque punti base che $\psi$ ha in $f$. Or siccome questa retta è luogo di coppie di punti coniugati nella $\Gamma_{2,2}$, su ogni cubica di $\theta$ le coppie siffatte sarebbero tutte collineari con $P$, onde l' involuzione $\Gamma_{2,2}$ sarebbe di classe $\nu = 0$. Lo stesso ragionamento varrebbe se le cubiche di $\theta$ fossero razionali, e il punto base doppio non coincidesse con alcuno dei punti base di $\varphi$. Infine nell' ipotesi che il detto punto doppio fosse uno dei punti base (semplici) di $\varphi$, siccome questi punti si comportano tutti egualmente, dovrebbero esistere altri $4.3 - 1 = 11$ fasci di cubiche unite, ciò che è assurdo come si vede dalla rappresentazione piana della superficie $F$.

26. Per $r = 3$, e ancora $m = 2$, $\Gamma_{2,2}$ è una congruenza di coniche di classe $\nu = 2$. Il teorema del n° 24 afferma che
*ogni congruenza* $\Gamma_{2,2}$ *di coniche*

([21]) Nel lavoro del BERTINI, *Sopra alcune involuzioni piane* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie 2ª, vol. XVI (1883)], figurano soltanto le involuzioni costruibili come è detto in *a*). Del resto per le involuzioni costruite come in *b*), il fascio di cubiche di cui si parla alla fine del n° 12 di questo lavoro citato, si spezza in una retta fissa e nel fascio di coniche unite, onde esso fascio di cubiche non può servire, insieme con questo di coniche, a costruire l' involuzione.

a) *o è generabile mediante un fascio $\varphi$ di quadriche e un fascio $\psi$ di superficie cubiche, tali che della base di $\psi$ sia parte quella di $\varphi$;*

b') *ovvero è generabile mediante un fascio $\varphi$ di quadriche e un fascio $\psi$ di superficie d' ordine 5 aventi come doppia la base di $\varphi$; inoltre una di queste superficie si spezza in due quadriche di $\varphi$ e in un piano generico $\pi$.*

Nel caso *a)* la base di $\psi$ è costituita dalla quartica di 1ª specie $\gamma'$ base di $\varphi$, e da una quintica gobba $\gamma$ di genere $p = 2$ avente con $\gamma'$ otto punti comuni. Le coniche $k$ della congruenza $\Gamma_{2,2}$ si appoggiano in 2 punti a $\gamma$ e in 4 a $\gamma'$; ma le quadriche di $\varphi$ secano $\gamma$ nella $g_2^1$ di essa, quindi anche le $k$ secano $\gamma$ in coppie di questa $g_2^1$. Ciò posto sono da distinguere due ipotesi secondo che la rigata quadrica delle rette contenenti le coppie della detta $g_2^1$ non è ovvero è un cono. Nella prima ipotesi per una retta generica passano due piani distinti ognuno contenente una (sola) conica $k$; ne segue (nº 2) $l = 2$ ed $s = 1$. Nella seconda ipotesi per una retta generica passa un (solo) piano contenente due coniche $k$; cioè (nº 2) $l = 1$ ed $s = 2$.

Nel caso *b)* esiste una quintica $\gamma$, del piano $\pi$, la quale è parte della base di $\psi$; questa quintica è di genere $p = 2$, e precisamente ha come doppi i quattro punti $\pi\gamma'$, indicando anche qui con $\gamma'$ la base di $\varphi$. Le coniche $k$ di $\Gamma_{2,2}$ si appoggiano, anche in questo caso, in 2 punti a $\gamma$ e in 4 a $\gamma'$; ma le quadriche di $\varphi$ secano $\gamma$ nella $g_2^1$ di essa, quindi anche le $k$ secano $\gamma$ in coppie di questa $g_2^1$. Anche qui sono da distinguere due ipotesi secondo che l' inviluppo, di classe *2*, generato dalle rette contenenti le coppie della detta $g_2^1$, sia irriducibile ovvero degeneri in un fascio contato due volte. Nella prima ipotesi per una retta generica passano due piani distinti ognuno contenente una (sola) conica $k$, onde è (nº 2) $l = 2$ ed $s = 1$; nella seconda ipotesi per una retta generica passa un (solo) piano contenente due coniche $k$, onde è (nº 2) $l = 1$ ed $s = 2$.

Concludiamo dunque che [22]

*ogni congruenza di coniche, d' ordine* 1 *e classe* 2, *è generata dalle coniche bisecanti una quintica $\gamma$ di genere* $p = 2$ *e 4-secanti una quartica gobba di* 1ª *specie $\gamma'$, le $\gamma$ e $\gamma'$ con otto punti comuni.*

27. Sia ora $r = 3$ e $m = 3$.

Dal teorema del nº 23 segue che

*ogni congruenza $\Gamma_{3,2}$ di cubiche gobbe è generabile con una (almeno) delle seguenti costruzioni:*

a) *mediante un fascio $\varphi$ di quadriche e un fascio $\psi$ di superficie cubiche le cui basi abbiano una cubica gobba in comune;*

a') *come in* a) *con la differenza che della base di $\varphi$ facciano parte due rette complanari rispettivamente doppia e semplice per le superficie di $\psi$;*

b) *mediante un fascio $\varphi$ di quadriche e un fascio $\psi$ di superficie d' ordine* 4 *di una delle quali faccia parte una* (*sola*) *quadrica di $\varphi$; inoltre la base di $\varphi$ si spezza in una retta e in una cubica rispettivamente doppia e semplice per le superficie di $\psi$;*

c) *mediante un fascio $\varphi$ di quadriche e un fascio $\psi$ di superficie d' ordine 5 di una delle quali sono parte due quadriche di $\varphi$; inoltre la base di $\varphi$ si spezza*

---

[22]) IPERI, *Sopra alcune congruenze di coniche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXVIII (1893)], n. 9, 11 e 12.

*in una retta e in una cubica rispettivamente semplice e doppia per le superficie di* $\psi$;

c') *come in* c) *con la differenza che la base di* $\varphi$ *si spezzi in quattro rette delle quali due sghembe siano doppie per le superficie di* $\psi$, *e una, delle due rette rimanenti, sia tripla per queste superficie medesime*;

c'') *come in* c) *con la differenza che le quadriche di* $\varphi$ *siano coni dallo stesso vertice, e le quattro rette costituenti la base di* $\varphi$, *abbiano per le superficie di* $\psi$ *rispettivamente le seguenti multiplicità:* 0,2,2,3; *ovvero* 1,1,2,3; *o infine* 1,1,1,4 [23])

d) *mediante un fascio* $\varphi$ *di quadriche e un fascio* $\psi$ *di superficie d' ordine* 6 *una delle quali si spezzi in tre quadriche di* $\varphi$; *inoltre la base di* $\varphi$ *è spezzata in una retta e in una cubica rispettivamente tripla e doppia per le superficie di* $\psi$;

d') *come in* d) *con la differenza che la base di* $\varphi$ *si spezzi in una conica tripla per le superficie di* $\psi$, *e in due rette rispettivamente doppia e semplice per queste superficie medesime;*

d'') *come in d) con la differenza che le quadriche di* $\varphi$ *siano coni dallo stesso vertice, e le quattro rette costituenti la base di* $\varphi$, *abbiano per le superficie di* $\psi$ *rispettivamente le seguenti multiplicità:* 0, 3, 3, 3; 1, 2, 2, 4.

28. Sia ora $r = 3$ *ed* $m = 4$, e precisamente supponiamo che le curve $k$ siano quartiche gobbe di 1ª specie.

Dal teorema del nº 23 si deduce che

*ogni congruenza* $\Gamma_{4,2}$ *di quartiche gobbe di* 1ª *specie è generabile con una* (*almeno*) *delle costruzioni seguenti:*

a) *mediante un fascio* $\varphi$ *di quadriche e un fascio* $\psi$ *di superficie cubiche, tali che le loro basi abbiano di comune una conica*;

a') *mediante un fascio* $\varphi$ *di coni quadrici, dallo stesso vertice, e un fascio* $\psi$ *di superficie cubiche le quali abbiano come doppia una delle quattro rette costituenti la base di* $\varphi$ [24]);

b) *mediante un fascio* $\varphi$ *di quadriche e un fascio* $\psi$ *di superficie d' ordine* 4 *di una delle quali è parte una quadrica di* $\varphi$; *inoltre della base di* $\psi$ *è parte la base di* $\varphi$;

b') *come in* b) *con la differenza che la base di* $\varphi$ *si spezzi in due coniche una delle quali sia doppia per le superficie di* $\psi$;

b'') *come in* b) *con la differenza che la base di* $\varphi$ *si spezzi in quattro rette, delle quali , per le superficie di* $\psi$, *due sghembe siano semplici e una, delle rimanenti, sia doppia*;

b''') *come in b) con la differenza che le quadriche di* $\varphi$ *siano coni dallo stesso vertice, e le quattro rette costituenti la base di* $\varphi$, *abbiano per le superficie di* $\psi$ *rispettivamente le seguenti multiplicità:* 0, 1, 1, 2; *ovvero* 0, 0, 1, 3;

---

[23]) In quest' ultimo caso l' ultima retta è infinitamente vicina ad una delle rimanenti tre. Questa osservazione valga, in seguito, per casi analoghi.

[24]) Le quartiche della congruenza, così costruita, hanno tutte come doppio il vertice comune a tutti i coni quadrici di $\varphi$, e inoltre esse si appoggiano tutte ulteriormente alle quattro rette costituenti la base di $\varphi$. Si dica lo stesso per casi analoghi che seguiranno.

c) *mediante un fascio φ di quadriche e un fascio ψ di superficie d' ordine 5 di una delle quali sono parte due quadriche di φ; inoltre la base di φ si spezza in due coniche rispettivamente doppia e semplice per le superficie di ψ;*

c') *come in* c) *con la differenza che la base di φ si spezzi in quattro rette delle quali due sghembe siano, per la superficie di ψ, rispettivamte semplice e doppia, e una delle due rimanenti sia tripla per queste superficie medesime;*

c'') *come in* c) *con la differenza che le quadriche di φ siano coni dallo stesso vertice, e le quattro rette costituenti la base di φ, abbiano per le superficie di ψ rispettivamente le seguenti multiplicità: 0,2,2,2; ovvero 1,1,1,3; ovvero 0,1,2,3; o infine 0,1,1,4;*

d) *mediante un fascio φ di quadriche e un fascio ψ di superficie d' ordine 6 una delle quali è spezzata in tre quadriche di φ; inoltre la base di questo fascio è doppia per le superficie di ψ;*

d') *come in* d) *con la differenza che la base di φ si spezzi in due coniche rispettivamente semplice e tripla per le superficie di ψ;*

d'') *come in* d) *con la differenza che la base di φ si spezzi in quattro rette, delle quali due sghembe siano doppie per le superficie di ψ, e le altre due siano rispettivamente semplice e tripla per queste superficie medesime;*

d''') *come in* d) *con la differenza che le quadriche di φ siano coni dallo stesso vertice, e le quattro rette costituenti la base di φ, abbiano per le superficie di ψ rispettivamente le seguenti multiplicità: 1,2,2,3; ovvero 0,2,3,3; ovvero 1,1,2,4; o infine 0,2,2,4.*

29. Supponiamo, infine, ancora $r = 3$ ma che le curve $k$ siano quartiche di 2ª specie

In virtù del teorema del nº 23 si può affermare che

*ogni congruenza* $\Gamma_{4,2}$ *di quartiche gobbe di 2ª specie, è generabile con una (almeno) delle costruzioni seguenti:*

a) *mediante un fascio φ di quadriche e un fascio ψ di superficie cubiche, tali che le loro basi abbiano di comune due rette sghembe;*

a') *come in* a), *con la differenza che le basi di φ e ψ abbiano di comune soltanto una retta la quale sia doppia per le superficie di ψ; inoltre la quadrica generica di φ non dev' essere un cono;*

b) *mediante un fascio φ di quadriche, la cui generica non sia un cono, e un fascio ψ di superficie d' ordine 4 di una delle quali è parte una quadrica di φ; inoltre della base di φ son parte due rette complanari rispettivamente semplice e tripla per tutte le superficie di ψ;*

b') *come in* b), *con la differenza che della base di φ facciano parte una conica e una retta rispettivamente semplice e doppia per tutte le superficie di ψ;*

c) *mediante un fascio φ di quadriche, la cui generica non sia un cono, e un fascio ψ di superficie d' ordine 5 di una delle quali sono parte due quadriche di φ; inoltre della base di φ è parte una cubica doppia per tutte le superficie di ψ;*

c') *come in* c), *con la differenza che la base di φ si spezzi in una retta e in una cubica rispettivamente tripla e semplice per le superficie di ψ;*

c'') *come in* c), *con la differenza che la base di φ si spezzi in quattro rette delle quali due sghembe siano rispettivamente tripla e semplice per le superficie di ψ, e una, delle due rimanenti, sia doppia per queste superficie medesime;*

*d) mediante un fascio* $\varphi$ *di quadriche, la cui generica non sia un cono, e un fascio* $\psi$ *di superficie d' ordine 6 una delle quali è spezzata in tre quadriche di* $\varphi$; *inoltre la base di* $\varphi$ *si spezza in una conica doppia per le superficie di* $\psi$, *e in due rette rispettivamente semplice e tripla per queste superficie medesime ;*

d') *come in* d) *con la differenza che per le superficie di* $\psi$ *sia tripla la conica parte della base di* $\varphi$, *e sia doppia una delle due rette rimanenti di questa base.*

30. Si osservi che in $S_r$ ogni varietà $k$ di $\Gamma_{m,2}$ appartiene (nº 23) ad un' iperquadrica, e quindi

*in* $S_r$ *non esiste alcuna congruenza* $\Gamma_{m,2}$, *d' ordine 1 e classe 2, generata da varietà* $V_{r-2}^m$ *non appartenenti a iperquadriche.*

In particolare, dunque, per $r = 3$ possiamo affermare che non esiste alcuna congruenza, d' ordine *1* e classe *2*, generata da curve gobbe non appartenenti a quadriche.

P. es. non esiste alcuna congruenza, d' ordine *1* e classe *2*, generata da quintiche gobbe ellittiche prive di punti doppi.

31. Per le congruenze $\Gamma_{m,3}$, di classe $\nu = 3$, si potrebbe seguire, senza nuove difficoltà concettuali, lo stesso ordine di idee tenuto, in questo cap. I, per $\nu = 0, 1, 2$ [25].

## CAP. II.

### § 1.

### $\nu = \binom{m}{2}$.

32. In questo capitolo supporremo sempre che le varietà $k \equiv V_{r-2}^m$ della congruenza $\Gamma$, dell' $S_r$, siano varietà iperpiane.

33. La congruenza $\Gamma$ sia di classe $\nu = \binom{m}{2}$, onde (nº 2) è $l = s = 1$, cioè per una retta generica passa una sola varietà $k$, e un iperpiano che contenga una $k$ non contiene, in generale, alcun' altra varietà $k$. Gl' iperpiani delle varietà $k$ generano dunque una stella, e precisamente passano tutti per uno stesso $S_{r-3}$ che indicheremo con $\Omega$.

Fissato un $S_{r-2}$ di $\Omega$, le $k$ esistenti negl' iperpiani passanti per esso generano un' ipersuperficie d' ordine $m+1$. Al variare dell' $S_{r-2}$, sempre passando per $\Omega$, si ottengono $\infty^2$ siffatte ipersuperficie le quali generano una rete $\Phi_1$; infatti per due punti generici dell'ambiente $S_r$, passa quella (unica) ipersuperficie di $\Phi_1$ ottenuta considerando l'$S_{r-2}$ comune ai due iperpiani delle due varietà $k$ passanti, rispettivamente, pei due punti dati. Due qualunque ipersuperficie di $\Phi_1$ hanno come intersezione variabile una (sola) varietà $k$. Viceversa, data una rete $\Phi_1$ di ipersuperficie d' ordine $m+1$, tali che due qualunque di esse abbiano come intersezione variabile comune una $V_{r-2}^m$ iperpiana d'ordine $m$, tutte le siffatte varietà iperpiane generano una congruenza $\Gamma$ d'ordine *1* e (nº 5, *b*) classe $\nu = \binom{m}{2}$.

34. Quanto si disse nel nº precedente, si può presentare sotto altra forma.

---

[25] Infatti possono dirsi note le superficie a sezioni iperpiane di genere $p = 3$, e, allo scopo, basterebbe considerare soltanto le razionali (normali); cfr. dunque

CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [Atti della R. Accademia di Torino, vol. XXV (1890)]; e

DE FRANCHIS, *Riduzione dei sistemi lineari* $\infty^k$ *di curve piane di genere 3, per* $k > 1$ [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XIII (1899)].

Data la congruenza $\Gamma$, le ipersuperficie di un fascio $\Phi$ della rete $\Phi_1$ (n° 33), sono quelle ottenute facendo variare l' $S_{r-2}$ (n° 33) in un dato iperpiano $\Sigma$ (passante per $\Omega$). Viceversa, date due ipersuperficie d' ordine $m+1$ aventi in comune una varietà iperpiana $V_{r-2}^m$ esse determinano un fascio $\Phi$ d'ipersuperficie tali che ognuna di esse ammette un fascio di varietà ad $r-2$ dimensioni e d' ordine $m$, fascio ottenuto secando la detta ipersuperficie con gl' iperpiani passanti per quell' $S_{r-2}$ che essa possiede nell' iperpiano $\Sigma$ della $V_{r-2}^m$. Le varietà degl' infiniti fasci così ottenuti, generano evidentemente una congruenza $\Gamma_m, \binom{m}{2}$, e i loro iperpiani passano tutti per l' $S_{r-3} \equiv \Omega$ base del fascio degli $S_{r-2}$ tracce variabili delle ipersuperficie di $\Phi$ nell' iperpiano $\Sigma$.

Concludiamo dunque

*di avere assegnato, in questo n°, una costruzione della più generale congruenza $\Gamma_m, \binom{m}{2}$ di varietà iperpiane.*

35. La base del fascio $\Phi$ (n° 34) è costituita dalla varietà $k$ esistente in $\Sigma$, sia $k_1$, e da una $V_{r-2}^{m(m+1)+1} \equiv \gamma$ alla quale appartiene $\Omega$. L' iperpiano di una qualunque varietà $k$ seca $\gamma$ in $\Omega$ e in una $V_{r-3}^{m(m+1)}$ giacente in $k$ ([26]).

Viceversa ora si vuol dimostrare che data una varietà $\gamma \equiv V_{r-2}^{m(m+1)+1}$ tale che insieme con una $k_1 \equiv V_{r-2}^m$, di un iperpiano $\Sigma$, costituisca la totale base di un fascio $\Phi$ d'ipersuperficie d' ordine $m+1$, le varietà iperpiane $k$, ad $r-2$ dimensioni e d'ordine $m$, ognuna secante $\gamma$ in una varietà $V_{r-3}^{m(m+1)}$, generano una congruenza $\Gamma_m, \binom{m}{2}$.

Infatti fissata una $k'$ delle dette varietà $k$, dicasi $S'$ il suo iperpiano. Da $S'$ il fascio $\Phi$ è secato in un fascio $\Phi'$ della cui base fanno parte la $V' \equiv V_{r-3}^{m(m+1)}$ di $k'$, e la $k_1 S'$; rimane dunque per completare la base di $\Phi'$ un $S'_{r-3}$ che evidentemente appartiene a $\gamma$. Ora la varietà d' ordine $m+1$ e ad $r-2$ dimensioni costituita da $k'$ e dall'$S_{r-2} \equiv S'\Sigma$, giacchè passa per $V'$ e per $k_1 S'$, passerà ([27]) pure per il detto $S'_{r-3}$, onde per quest' $S'_{r-3}$ passerà o la $k'$ o il detto $S_{r-2}$. Ma non vi passa $k'$, perchè la totale intersezione di $k'$ con $\gamma$ è data dalla $V'$ (mentre, come abbiamo osservato, $S'_{r-3}$ appartiene a $\gamma$), quindi per $S'_{r-3}$ passerà l' $S_{r-2}$. Infine, siccome quest' $S_{r-2}$ appartiene a $\Sigma$, così anche $S'_{r-3}$ apparterrà a $\Sigma$, cioè $S'_{r-3}$ coincide con l' unico spazio $S_{r-3}$ che $\gamma$ ha in $\Sigma$ fuori della varietà $\gamma k_1$. In altri termini: l' iperpiano $S'$, di $k'$, passa per quest' $S_{r-3}$.

Ciò posto, fissato un punto generico $P$ di $k'$, l' ipersuperficie, del fascio $\Phi$, passante per $P$, contiene di $k'$ la $V'$ e il punto $P$, e quindi la contiene interamente, cioè $k'$ è una delle varietà, ad $r-2$ dimensioni, ottenute secando le ipersuperficie di $\Phi$ con gl'iperpiani passanti per $S_{r-3}$, cioè le varietà $k$ non sono diverse da quelle studiate nel n° precedente.

Concludiamo dunque che ([28])

---

([26]) Infatti la sezione di $\gamma$ col detto iperpiano, deve appartenere alla traccia, in questo, dell' ipersuperficie di $\Phi$ che contiene la detta $k$, traccia che è formata da questa $k$ medesima e da un $S_{r-2}$ che ha in comune con $\gamma$ soltanto $\Omega$.

([27]) Qui si fa uso della proposizione, evidente, che se della base di un fascio d' ipersuperficie d' ordine $m+1 > 2$ fa parte un $S_{r-2}$, ogni ipersuperficie d' ordine $m+1$ che passi per la parte rimanente, di detta base, passerà (in generale) anche per quest' $S_{r-2}$.

([28]) Per $r=3$ questa congruenza fu incontrata, fra quelle di curve piane aventi una sola curva singolare. da

GODEAUX, *Sulle congruenze lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXIV (1912)].

*data una varietà* $\gamma \equiv V_{r-2}^{m(m+1)+1}$ *la quale insieme con un' altra varietà iperpiana* $k_1 \equiv V_{r-2}^{m}$ *costituisca la totale intersezione di due ipersuperficie d' ordine* $m+1$, *le varietà iperpiane* $k \equiv V_{r-2}^{m}$ *ognuna delle quali sechi* $\gamma$ *in una* $V_{r-3}^{m(m+1)}$, *generano la più generale congruenza* $\Gamma_{m,\,\binom{m}{2}}$.

36. *a*) Per $r=3$ ed $m=2$ il teorema del n° precedente afferma una verità nota [29] alla quale si accennò nella fine del n° 17, cioè che la più generale congruenza di coniche d' ordine *1* e classe *1*, è costituita dalle coniche 6-secanti una data curva $\gamma$, d' ordine 7, la quale insieme con una conica $k_1$ costituisca la totale intersezione di due superficie cubiche. I piani delle coniche della congruenza passano tutti per il punto $\Omega$ che $\gamma$ ha nel piano di $k_1$ fuori di questa stessa conica.

Si noti, infine, che nel caso generico $\gamma$ è la curva gobba irriducibile (d' ordine *7* e) di genere $p=5$.

*b*) Per $r=3$ ed $m=3$ si ha (n° 35) che la più generale congruenza di cubiche (generalmente) ellittiche, d' ordine *1* e classe *3*, è costituita dalle cubiche (piane) *12*-secanti una data curva $\gamma$ d' ordine *13*, la quale insieme con una cubica piana $k_1$ costituisca la totale intersezione di due superficie d' ordine *4*. I piani delle cubiche della congruenza passano tutti per il punto $\Omega$ che $\gamma$ ha nel piano di $k_1$ fuori di questa cubica.

Si noti, infine, che nel caso generico $\gamma$ è una determinata delle due [30] curve gobbe irriducibili d' ordine *13* e di genere $p=21$.

*c*) Per $r=4$ e $m=2$ si ha (n° 35) che nell' $S_4$ la più generale congruenza di quadriche, d' ordine *1* e classe *1*, è costituita dalle quadriche secanti in sestiche una data superficie $\gamma$ d' ordine *7*, la quale insieme con una quadrica $k_1$ costituisca la totale intersezione di due ipersuperficie cubiche. Gli spazi delle quadriche della congruenza passano tutti per la retta $\Omega$ che $\gamma$ ha nello spazio di $k_1$ fuori di questa quadrica.

Si noti che nel caso generico $\gamma$ è irriducibile e a sezioni iperpiane di genere $p=5$.

37. Numerosi sono i casi particolari che presenta (n° 35) la congruenza $\Gamma_{m,\,\binom{m}{2}}$ secondo i varî spezzamenti della varietà $\gamma$.

*a*) Per $r=3$ e $m=2$ i casi più importanti sono conosciuti [31], e fra questi specialmente degno di nota è quello in cui le coniche della congruenza si appoggiano in 4 punti ad una quartica gobba di 2ª specie e passano per un dato punto dello spazio [32].

*b*) Per $r=3$ e $m=3$ è notevole il seguente caso particolare.

Si consideri una superficie $G$ d' ordine *4* con un punto $O$ triplo. Un piano passante genericamente per una delle 12 rette di $G$ uscenti da $O$, seca ulteriormente $G$ in una cubica $k_1$ dotata di punto doppio in $O$; sia $G'$ un' altra superficie d' ordine *4* avente il punto $O$ triplo, passante per $k_1$ e per 7 delle rimanenti 11 rette di $G$ uscenti da $O$. Il fascio $\Phi$ individuato da $G$ e $G'$, ha come ulteriore curva base una sestica $\gamma$ della quale è *6*-secante ogni cubica della congruenza $\Gamma$ (n° 36, *b*), cubica che ha un punto doppio in $O$.

(29) Cfr. l. c. in (10).

(30) HALPHEN, *Mémoire sur la Classification des courbes gauches algébriques* [Journal de l'École polytechnique, 52° Cahier (1882)].

(31) MONTESANO, *Sui varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio*, Nota II [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, fasc. 7° (1895)], n. 1.

(32) Per questa particolare congruenza cfr. pure il mio lavoro *Per i numeri caratteristici dei sistemi di coniche plurisecanti una o più curve gobbe* [Giornale di Matematiche, Napoli (1918)].

In altri termini: ogni cubica di $\Gamma$ si ottiene conducendo per $O$ un piano $\pi$ ad arbitrio, e poi costruendo la cubica avente $O$ come doppio e passante pei 6 punti $\pi\gamma$. Si noti che $\gamma$, in generale, è irriducibile e di genere $p = 3$; infatti un piano $\omega$ condotto per una delle 7 rette delle quali sopra si parla, seca $\Phi$ ulteriormente in un fascio di cubiche, fascio che ha $2 \cdot 2 = 4$ punti base riuniti in $O$, un altro punto base nel punto $\omega k_1$ diverso da $O$, e i rimanenti 4 punti base in $\gamma$. Ne segue che le 7 rette uscenti da $O$ e che fanno parte della base di $\Phi$, sono corde della sestica $\gamma$. Nè questa può avere alcun' altra corda passante per $O$, perchè una corda siffatta, incontrando ogni superficie di $\Phi$ in $3+1+1>4$ punti, farebbe parte della base di questo fascio, ciò che è assurdo. Dunque $\gamma$ è una sestica di genere $p = 3$.

Viceversa: una sestica gobba $\gamma$ di genere $p = 3$, insieme con le 7 sue corde uscenti da un punto generico $O$ dello spazio, e insieme con una cubica $k_1$ avente questo punto come doppio e $6$-secante $\gamma$, costituiscono la base di un fascio di superficie d' ordine $4$ col punto $O$ triplo. Infatti le superficie d' ordine $4$ aventi $O$ come triplo e passanti per $\gamma$ soddisfano a $10+(6 \cdot 4-3+1) = 32$ condizioni lineari. Inoltre ognuna di esse seca la cubica $k_1$ in $3 \cdot 2+6 = 3 \cdot 4$ punti, onde se le dette superficie si assoggettano a passare per un altro punto di $k_1$, esse contengono interamente questa cubica. Si ottengono così $32+1=33$ condizioni lineari, e quindi le dette superficie d'ordine $4$ costituiscono un fascio $\Phi$. È poi evidente che le sette corde di $\gamma$ uscenti da $O$ completano, insieme con $\gamma$ e $k_1$, la base di $\Phi$, perchè ognuna di esse rette ha già in comune cinque punti con ogni superficie di $\Phi$.

Concludiamo dunque che

*le cubiche le quali si appoggiano in 6 punti ad una sestica gobba di genere* $p = 3$, *e che hanno come doppio un punto dato fuori di questa curva, costituiscono una congruenza d'ordine 1.*

È poi evidente che la classe di questa congruenza è $\nu = 3$.

*c*) Per $r = 4$ ed $m = 2$ è degna di nota la congruenza ottenuta nell' ipotesi che la superficie $\gamma$ (n° 36, *c*) si spezzi nella proiezione $\gamma'$ della superficie di Veronese (da un punto esterno), e nei tre piani passanti per una stessa trisecante $t$ di $\gamma'$ e ognuno secante questa stessa superficie lungo una conica. Ogni quadrica della congruenza $\Gamma$ è generata dalle trisecanti di $\gamma'$ poste in uno stesso iperpiano condotto per $t$; cioè ogni $k$ è la quadrica passante per una quartica di 2ª specie, di $\gamma'$, il cui spazio passi per $t$ (quadrica che contiene questa retta).

Del resto che questa congruenza sia d' ordine *uno* (anche se $t$ fosse una qualunque retta dell' $S_4$ ambiente), segue subito dall' osservare che per un punto generico dell' $S_4$ di $\gamma'$ passa una sola trisecante di questa superficie ([33]). Che poi la congruenza sia di classe $\nu = 1$ è evidente.

## § 2.

## $\nu = 2\ (\frac{m}{2})$

38. La congruenza $\Gamma$, ancora di varietà iperpiane, sia di classe $\nu = 2\ (\frac{m}{2})$, cioè (n° 2) sia $ls = 2$.

([33]) Castelnuovo, *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; serie VII, tomo II (1891)], §§ 7 e 8.

Cfr. anche il mio lavoro: *Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXVIII, 2° sem. (1909)], cap. I.

Sono dunque da distinguere due ipotesi: $l=2$, $s=1$, e $l=1$, $s=2$; la congruenza $\Gamma$ sarà detta rispettivamente di 1ª e di 2ª *specie*.

39. Sia $\Gamma$ di 1ª specie.

Gli $\infty^2$ iperpiani delle varietà $k$ son tali, dunque, che ad una retta generica data ne appartengono due, onde essi inviluppano un $S_{r-4}$-cono quadrico ([34]) che chiameremo $\Omega$.

Esaminiamo l'ipotesi che $\Omega$ sia generico, e consideriamo uno qualunque dei suoi $S_{r-2}$. Ogni iperpiano passante per questo contiene una (sola) varietà $k$, la quale, al variare dell'iperpiano, genera un' ipersuperficie d'ordine $m+1$. Facendo variare l' $S_{r-2}$ in quel sistema, dei due sistemi di siffatti spazî di $\Omega$, che lo contiene, si ottengono in tal modo infinite ipersuperficie, d'ordine $m+1$, le quali formano un fascio $\Phi$ perchè la congruenza $\Gamma$ è d'ordine $1$.

Una qualunque ipersuperficie $\varphi$ di $\Phi$, seca $\Omega$ nell' $S_{r-2}$ (direttore) e in una varietà residua $\gamma \equiv V_{r-2}^{2m+1}$ che appartiene alla base del fascio $\Phi$; infatti per un suo punto generico $P$ passano già due ipersuperficie di $\Phi$: la $\varphi$ e quella che ammette come direttore l' $S_{r-2}$ (di quel tale sistema) di $\Omega$ passante per $P$. Concludendo possiamo dire che $\Phi$ è un fascio di ipersuperficie d'ordine $m+1$, tale che ognuna di queste seca $\Omega$ nella varietà $\gamma$ fissa e in un $S_{r-2}$ variabile in uno determinato dei due sistemi di siffatti spazî contenuti in $\Omega$. Viceversa è chiaro che un fascio d'ipersuperficie d'ordine $m+1$, tale che ognuna delle sue ipersuperficie sechi $\Omega$ in una varietà la cui parte variabile sia un $S_{r-2}$ di uno determinato dei due sistemi di siffatti spazî contenuti in $\Omega$, genera una congruenza come la $\Gamma$ in esame mediante le $V_{r-2}^{m}$, delle sue ipersuperficie, ognuna giacente in un iperpiano con uno, determinato, degli $S_{r-2}$ di $\Omega$.

Concludiamo dunque

*di avere assegnato in questo n°, nel caso generico, una costruzione della congruenza* $\Gamma_{m,2}\left(\frac{m}{2}\right)$ *di 1ª specie.*

40. Sia $r=3$ e $m=2$.

*a)* La congruenza $\Gamma_{2,2}$ di 1ª specie, nell' $S_3$, nell'ipotesi che la quadrica $\Omega$ non sia degenere, è dunque (n° 39) generabile nel modo seguente.

Si consideri una quintica gobba $\gamma$ di genere $p=2$ tale che la quadrica $\Omega$ in cui essa giace non sia un cono, e due superficie cubiche irriducibili passanti per essa; queste determinano un fascio $\Phi$. Una qualunque superficie di $\Phi$ passa per una (sola) trisecante di $\gamma$, e viceversa questa retta appartiene ad una (sola) superficie di $\Phi$. Si ottiene in tal modo fra le trisecanti di $\gamma$ e le superficie di questo fascio una corrispondenza biunivoca; ebbene: i piani passanti per le trisecanti di $\gamma$, secano ulteriormente le rispettive superficie corrispondenti nelle coniche della congruenza $\Gamma_{2,2}$ di 1ª specie richiesta.

La curva base del fascio $\Phi$ è costituita da $\gamma$ e da una quartica gobba $\gamma'$ la quale, avendo in comune con $\gamma$ otto punti ([35]), è di genere $p=1$. Ogni conica $k$ di $\Gamma_{2,2}$ si appoggia in 2 punti a $\gamma$ e in 4 a $\gamma'$.

Viceversa si vuole ora dimostrare che

*date, con 8 punti comuni, una quintica gobba* $\gamma$ *di genere* $p=2$, *tale che la quadrica in cui essa giace non sia un cono, e una quartica gobba ellittica* $\gamma'$, *le co-*

---

([34]) Per $r=3$ i piani delle curve $k$ sono i piani tangenti di una rigata quadrica $\Omega$ la quale non è un cono, quadrica che, in particolare, può essere generata dalle tangenti di una conica irriducibile.

([35]) Sono gli 8 punti nei quali $\gamma'$ è secata dalla quadrica $\Omega$ delle trisecanti di $\gamma$.

*niche bisecanti $\gamma$ e 4-secanti $\gamma'$ generano una congruenza $\Gamma_{2,2}$ di $1^a$ specie.*

Infatti le superficie cubiche soggette a contenere le due curve $\gamma$ e $\gamma'$ soddisfano a 18 condizioni lineari, onde esse superficie costituiscono un fascio $\Phi$. Inoltre una conica $c$ bisecante $\gamma$ e 4-secante $\gamma'$, giacchè incontra la base di $\Phi$ in 6 punti, appartiene ad una (sola) superficie cubica di questo fascio; anzi poichè il piano di $c$ seca la base ora detta in 9 punti dei quali 6 appartengono alla conica $c$, i rimanenti 3 apparterranno ad una stessa retta la quale è quindi una trisecante della quintica $\gamma$. Il teorema è dunque dimostrato.

Questa congruenza di coniche, già incontrata (n° 26), corrispondente all'ipotesi che $\Omega$ sia una quadrica non degenere, sarà detta del *1° tipo.*

*b*) Supponiamo ora che la rigata quadrica $\Omega$ degeneri nell' inviluppo delle tangenti di una conica irriducibile.

Si osservi che in tal caso siccome un punto generico del piano $\pi$ di $\Omega$ non è singolare, le coniche di $\Gamma$ complanari con una generatrice $g$ di $\Omega$, incontrano $g$ in due punti fissi e precisamente generano una quadrica. Si ottiene così un fascio di quadriche, di base $\gamma'$, riferite biunivocamente alle generatrici di $\Omega$. Il luogo dei due punti comuni ad una di queste rette e alla quadrica corrispondente, è quindi una quintica $\gamma$, di genere $p=2$, dotata di quattro punti doppi nei quattro punti $\pi\gamma'$; la curva $\gamma$, inoltre, è tale che è irriducibile la conica inviluppata dalle rette contenenti le (singole) coppie della $g_2^1$ di essa curva. Anche in questo caso, dunque, le coniche di $\Gamma$ sono bisecanti $\gamma$ e 4-secanti $\gamma'$.

Viceversa è facile dimostrare che

*data una quintica $\gamma$ (di genere $p=2$) con 4 punti doppi, tale che sia irriducibile la conica inviluppata dalle rette contenenti le coppie della $g_2^1$ di essa curva $\gamma$, e data una quartica gobba di $1^a$ specie $\gamma'$ passante pei quattro punti doppi di $\gamma$, le coniche bisecanti $\gamma$ e 4-secanti $\gamma'$ generano una congruenza $\Gamma_{2,2}$ di $1^a$ specie.*

Questa congruenza di coniche, già incontrata (n. 26), corrispondente all'ipotesi che $\Omega$ degeneri nell' inviluppo delle tangenti di una conica irriducibile, sarà detta del *2° tipo.*

41. Riprendiamo le considerazioni del n° 39. L' $S_{r-4}$-cono $\Omega$ ha due sistemi di $S_{r-2}$: in un sistema questi spazi secano $\gamma\equiv V_{r-2}^{2m+1}$ in varietà $V_{r-3}^{m+1}$, nell' altro sistema in varietà $V_{r-3}^{m}$. Scelto uno qualunque $S'$ degli $S_{r-2}$ di questo secondo sistema, tutte le $k\equiv V_{r-2}^{m}$, della congruenza $\Gamma$, i cui iperpiani passano per $S'$, contengono tutte la $V_{r-3}^{m}$ che $\gamma$ ha in $S'$. Queste varietà $k$ generano dunque un' ipersuperficie d' ordine $m$ passante per la detta $V_{r-3}^{m}$ e per la varietà $\gamma'\equiv V_{r-2}^{m^2}$ che [36] insieme con $\gamma$ costituisce la totale base del fascio $\Phi$ (n° 39). Viceversa questa ipersuperficie ha in comune con $\gamma$, come parte variabile, soltanto la sopradetta $V_{r-3}^{m}$; ne segue una proiettività fra le ipersuperficie d'ordine $m$, del fascio $\Phi'$ di base $\gamma'$, e gli $S_{r-2}$ di uno (determinato) dei due sistemi di siffatti spazî di $\Omega$, e ogni $k\equiv V_{r-2}^{m}$ della congruenza $\Gamma$ trovasi sopra un'ipersuperficie del fascio $\Phi'$ e inoltre passa per la $V_{r-3}^{m}$ che questa ipersuperficie ha nell'$S_{r-2}$ ad essa omologo nella detta proiettività.

Questa nuova costruzione di $\Gamma$ era nota per $r=3$ e $m=2$ [37].

42. Sia $r=3$ ed $m=3$.

---

[36] La $\gamma'$ è dunque la base di un fascio $\Phi'$ d' ipersuperficie d' ordine $m$.

[37] MONTESANO, l. c. in [10], Nota I, n° 4, ove si ponga $\mu=2$. Tutti i tipi di congruenze lineari di coniche furono assegnati dal MONTESANO negl' importanti lavori citati.

*a*) La congruenza $\Gamma_{3,6}$ di 1ª specie, in $S_3$, nell'ipotesi che la quadrica $\Omega$ non sia degenere, è dunque (nº 39) generabile come segue.

Si consideri una curva gobba $\gamma$ d'ordine *7* e genere $p=6$, e due superficie d'ordine *4* irriducibili passanti per essa; queste superficie determinano un fascio $\Phi$. Una superficie di questo fascio passa per una (sola) *4*-secante di $\gamma$, e viceversa una retta siffatta appartiene ad una (sola) superficie di $\Phi$. Si ottiene così, fra le *4*-secanti di $\gamma$ e le superficie di questo fascio, una proiettività tale che i piani passanti per le *4*-secanti di $\gamma$ secano ulteriormente le superficie, rispettivamente corrispondenti a queste rette, nelle cubiche della congruenza $\Gamma$. La base di $\Phi$ è costituita da $\gamma$ e da una curva $\gamma'$, d'ordine *9*, la quale è (nº 41) la base di un fascio $\Phi'$ di superficie cubiche; $\gamma'$ ha 18 punti comuni con $\gamma$, ed è di genere $p=10$ [38]. Le cubiche $k$, di $\Gamma$, si appoggiano, dunque, in 9 punti a $\gamma'$ e in 3 punti a $\gamma$.

Viceversa è facile dimostrare che

*date, con 18 punti comuni, una curva gobba $\gamma$ d'ordine 7 e genere* $p=6$ *tale che la quadrica in cui essa giace non sia un cono, e una curva $\gamma'$, base di un fascio di superficie cubiche, le cubiche piane ognuna delle quali si appoggi in 3 punti a $\gamma$ e in 9 punti a $\gamma'$ generano una congruenza* $\Gamma_{3,6}$ *di 1ª specie.*

Questa congruenza $\Gamma_{3,6}$ si può anche costruire (nº 41) in altro modo, come segue.

Si stabilisca una proiettività fra le superficie cubiche di un fascio $\Phi'$ e le generatrici di una rigata quadrica gobba $\Omega$. Le cubiche (piane) ognuna situata sopra una superficie di $\Phi'$ e passante pei 3 punti nei quali questa superficie è secata dalla generatrice di $\Omega$ ad essa omologa, generano la congruenza $\Gamma_{3,6}$ di 1ª specie richiesta.

Questa congruenza di cubiche, corrispondente all'ipotesi che $\Omega$ sia gobba, sarà detta del *1º tipo.*

*b*) Supponiamo ora che $\Omega$ degeneri nell'inviluppo delle tangenti di una conica irriducibile.

In tal caso ragionando in modo analogo a come si fece nº 40 *b*), si ottiene un fascio di superficie cubiche, di base $\gamma'$, riferite biunivocamente alle generatrici di $\Omega$. Il luogo dei 3 punti comuni ad una di queste rette e alla superficie cubica corrispondente, è quindi una curva $\gamma$ d'ordine *7*, di genere $p=6$, dotata di 9 punti doppi nei punti $\pi\gamma'$, e tale che sia irriducibile l'inviluppo, di 2ª classe, delle rette [39] contenenti i gruppi della [40] $g_3^1$ di essa curva $\gamma$. Anche in questo caso, dunque, le cubiche di $\Gamma$ sono trisecanti $\gamma$ e 9-secanti $\gamma'$.

Viceversa è facile dimostrare che

*data una curva $\gamma$ d'ordine 7 (di genere* $p=6$) *con 9 punti doppi, base di un fascio di cubiche, e tale che sia irriducibile la conica inviluppata dalle rette contenenti i gruppi della* $g_3^1$ *di essa curva $\gamma$, e data una curva $\gamma'$, base di un fascio di superficie cubiche, passante pei 9 punti doppi di $\gamma$, le cubiche piane trisecanti $\gamma$ e 9-secanti $\gamma'$ generano una congruenza* $\Gamma_{3,6}$ *di* 1ª *specie.*

---

[38] Di curve gobbe d'ordine *9* e genere $p=10$ esistono due famiglie; cfr. HALPHEN, l. c. in [30].

[39] BERTINI, *La Geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* [Annali di Matematica, serie 2ª, tomo XXII], nº 44 *a*);

AMODEO, *Curve k-gonali* [Annali di Matematica, serie 2ª, tomo 21º (1893)], § 4, *c*).

[40] Cfr. BERTINI, l. c. in [39] nº 44 *h*), e AMODEO, *Curve k-gonali di* $s^{ma}$ *specie* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, serie 2ª, tomo 9º (1899)].

Questa congruenza, corrispondente all' ipotesi che la rigata quadrica $\Omega$ degeneri nell' inviluppo delle tangenti di una conica irriducibile, sarà detta del *2° tipo*.

43. Sia $r = 4$ e $m = 2$.

*a*) La congruenza $\Gamma_{2,2}$ di 1ª specie, dell' $S_4$, nell' ipotesi che l' $S_0$-cono quadrico $\Omega$ non sia ulteriormente specializzato, è dunque (n° 39) costruibile come segue.

Si consideri un $S_0$-cono quadrico $\Omega$ e un' ipersuperficie cubica passante per un piano $\pi$ di esso. L' ulteriore intersezione sarà una superficie $\gamma$, d' ordine $5$, secata secondo cubiche dai piani di $\Omega$ dello stesso sistema di $\pi$, e secondo coniche dai piani dell' altro sistema; due ipersuperficie cubiche passanti per $\gamma$ individuano un fascio $\Phi$. Una qualunque ipersuperficie di $\Phi$ seca ulteriormente $\Omega$ in un piano del primo dei due sistemi ora detti, e viceversa per uno qualunque dei piani di questo sistema passa una (sola) ipersuperficie di $\Phi$. Le quadriche ognuna appartenente ad una ipersuperficie di $\Phi$ e cospaziale col piano di $\Omega$ in essa ipersuperficie contenuto, generano la congruenza $\Gamma_{2,2}$ di 1ª specie richiesta.

Questa congruenza è anche costruibile (n° 41) nel seguente modo.

Si stabilisca una proiettività fra i piani, di uno stesso sistema, di un $S_0$-cono quadrico $\Omega$ e le iperquadriche di un fascio $\Phi$. Le quadriche di queste, ognuna cospaziale col piano di $\Omega$ omologo all' iperquadrica di $\Phi$ alla quale essa quadrica appartiene, generano la congruenza $\Gamma_{2,2}$ di 1ª specie richiesta.

*b*) In modo analogo a come si fece nei nⁱ 40 *b*) e 42 *b*), si potrebbe esaminare l' ipotesi nella quale $\Omega$ degeneri nell' inviluppo dei piani tangenti di un ordinario cono quadrico. In tale ipotesi la superficie $\gamma$ appartiene all' $S_3$ di questo cono, ed ha come doppia la traccia, in questo spazio, di una superficie di Segre $\gamma'$. Le iperquadriche del fascio avente questa superficie per base, sono in corrispondenza proiettiva coi piani di $\Omega$; le quadriche ognuna appartenente ad un' iperquadrica di questo fascio e cospaziale col piano di $\Omega$ ad essa iperquadrica omologo, generano una $\Gamma_{2,2}$ di 1ª specie.

44. Sia ora $\Gamma$ una congruenza $\Gamma_{m,2}(\frac{m}{2})$ di 2ª specie (n° 38); le sue varietà $k$ giacciono dunque, a coppie, negl' iperpiani passanti per un $S_{r-3}$ fisso che indicheremo con $\omega$.

Fissato un $S_{r-2}$ passante per $\omega$, le infinite coppie di varietà $k$ esistenti negl' iperpiani passanti per esso, generano un' ipersuperficie, d' ordine $2m+1$, la quale al variare dell' $S_{r-2}$ in un dato iperpiano $\Sigma$ (condotto per $\omega$) descrive un fascio $\Phi$, la cui traccia in $\Sigma$ è costituita dalle due varietà $k$ esistenti in questo iperpiano (fisse) e dal fascio, di $S_{r-2}$, di centro $\omega$.

Se $P$ è uno dei punti comuni alle due $k$ esistenti in uno stesso iperpiano, esso è doppio per l' ipersuperficie $\varphi$, di $\Phi$, che contiene le dette due varietà $k$; è punto singolare per $\Gamma$ e, quindi, appartiene alla base di $\Phi$. Ne segue che le $V_{r-2}$ doppie delle ipersuperficie di $\Phi$, coincidono tutte in una sola. Concludiamo dunque che le ipersuperficie di $\Phi$ sono d' ordine $2m+1$, ed hanno tutte come doppia una stessa $V^{m^2}_{r-2} \equiv \gamma$ che è la base [41] di un fascio $\Phi'$ d' ipersuperficie d' ordine $m$. Rimane quindi della base di $\Phi$, a pre-

---

[41] Infatti le varietà $k$ giacenti negl' iperpiani passanti per un dato $S_{r-2}$ (per $\omega$), secano questo in un fascio $\sigma$ di $V'''_{r-3}$. Ma fissato un $\Sigma'$ di questi iperpiani, le $V'''_{r-2}$ passanti per $\Sigma'\gamma$ secano $S_{r-2}$ in un fascio che coincide con $\sigma$, perchè con questo ha in comune le $k'S_{r-2}$ e $k''S_{r-2}$ essendo $k'$ e $k''$ le due varietà $k$ esistenti in $\Sigma'$; dunque tutte le $V_{r-2}$, ognuna passante per un dato punto $B$ di $S_{r-2}$ e per una sezione qualunque di $\gamma$ ottenuta con un iperpiano condotto per $S_{r-2}$, secano questo spazio tutte in una stessa $V'''_{r-3}$, e quindi generano un' ipersuperficie d' ordine $m$. Ne segue senz' altro che $\gamma$ è la base di un fascio d' ipersuperficie (d' ordine $m$).

scindere dalle due $k$ esistenti in $\Sigma$, una varietà $\gamma'$ (ad $r-2$ dimensioni) d'ordine $2m+1$.

Viceversa è chiaro che dato un fascio $\Phi$ d'ipersuperficie d'ordine $2m+1$, della cui base facciano parte: come doppia una $V_{r-2}^{m^2} \equiv \gamma$ secata da ogni iperpiano passante per un certo $S_{r-3} \equiv \omega$ nella base di un fascio di $V_{r-2}^{m}$ generalmente irriducibili, e (come semplici) due di queste varietà appartenenti ad un iperpiano $\Sigma$ passante per $\omega$, ogni ipersuperficie $\varphi$ di $\Phi$ avrà un $S_{r-2}$ in $\Sigma$, e ogni iperpiano condotto per quest'$S_{r-2}$ seca ulteriormente $\varphi$ in due varietà $k$, d'ordine $m$, le quali al variare di $\varphi$, in $\Phi$, generano una congruenza $\Gamma$ come quella che sopra abbiamo esaminata.

Concludiamo dunque

*di avere assegnato, in questo n°, una costruzione della più generale congruenza* $\Gamma_{m,2}\binom{m}{2}$ *di $2^a$ specie.*

45. Per $r=3$ e $m=2$ si ha la congruenza, di coniche, $\Gamma_{2,2}$ d'ordine $1$, classe $2$, e di $2^a$ specie; essa dunque si costruisce come segue.

Data una quartica gobba di $1^a$ specie $\gamma$, si considerino due coniche $c$ e $c'$ $4$-secanti $\gamma$ e poste in uno stesso piano $\Sigma$. Due superficie d'ordine $5$, ognuna passante per queste due coniche e avente $\gamma$ come doppia, determinano un fascio $\Phi$. Le coniche delle superficie di $\Phi$, ognuna complanare con la retta che ha in $\Sigma$ la superficie di $\Phi$ nella quale essa conica giace, generano la congruenza $\Gamma_{2,2}$ di $2^a$ specie richiesta.

La base di $\Phi$ è completata da una quintica $\gamma'$ la quale insieme con $\gamma$ costituisce la base di un fascio $\Phi''$ di superficie cubiche ([42]), onde $\gamma'$ è di genere $p=2$ ed ha 8 punti comuni con $\gamma$, come del resto si può dimostrare direttamente.

Le coniche della congruenza $\Gamma_{2,2}$ si appoggiano in 4 punti a $\gamma$ e in 2 a $\gamma'$ ([43]).

Si noti, infine, che un piano condotto ad arbitrio per il punto $\omega$ centro del fascio di rette che $\Phi$ ha in $\Sigma$, seca $\gamma'$ in 5 punti dei quali uno è $\omega$, e i rimanenti sono divisi in due coppie una per ognuna delle due coniche $k$ esistenti nel detto piano.

Ne segue che ciascuna di dette coppie è collineare con $\omega$, cioè la rigata quadrica $\Omega$ cui appartiene $\gamma'$ è un cono (irriducibile di vertice $\omega$).

Viceversa vogliamo dimostrare che

*date, con 8 punti comuni, una quartica gobba di $1^a$ specie $\gamma$ e una quintica gobba $\gamma'$ di genere $p=2$ appartenente ad un cono quadrico, tutte le coniche $4$-secanti $\gamma$ e bisecanti $\gamma'$ generano una congruenza $\Gamma_{2,2}$ di $2^a$ specie.*

Infatti per il vertice $\omega$ del cono quadrico su cui giace $\gamma'$, si conduca un piano arbitrario $\pi$; in esso i quattro punti $\pi\gamma$ e i cinque $\pi\gamma'$ costituiscono (n° 40, *a*) la base di un fascio di cubiche. Inoltre, siccome uno dei punti $\pi\gamma'$ è il punto $\omega$ e gli altri quattro sono divisi in due coppie ognuna collineare con $\omega$, segue che ciascuna di queste coppie giace in una conica coi quattro punti $\pi\gamma$. Si ottengono in tal modo due coniche $c$ *e* $c'$, ognuna delle quali non ha punti variabili comuni con le quadriche passanti per $\gamma$, nè con le superficie cubiche passanti per $\gamma$ e $\gamma'$. Ciò posto siano $\theta$ e $\theta'$ quelle, delle quadriche ora

---

([42]) Sia, infatti, $\theta$ la quadrica passante per $\gamma$ e $c$; delle superficie di $\Phi$ ne esiste una spezzata nella $\theta$ e in una superficie cubica $\psi$ passante per $\gamma$ e $\gamma'$ (oltre che per $c'$). Analogamente sia $\theta'$ la quadrica passante per $\gamma$ e $c'$; delle superficie di $\Phi$ ne esiste una spezzata nella $\theta'$ e in una superficie cubica $\psi'$ passante per $\gamma$ e $\gamma'$ (oltre che per $c$). Ne segue senz' altro che $\gamma$ e $\gamma'$ costituiscono la totale intersezione delle due superficie cubiche $\psi$ e $\psi'$, e da ciò segue quanto volevasi dimostrare.

([43]) Infatti un qualunque piano $\pi$ contenente (due) coniche di $\Gamma$, seca $\gamma'$ in 5 punti, uno dei quali è il punto $\omega$ centro del fascio di rette che $\Phi$ ha in $\Sigma$.

-dette, contenenti rispettivamente $c$ e $c'$, e siano $\psi$ e $\psi'$ quelle, delle dette superficie cubiche, contenenti rispettivamente queste stesse coniche. Evidentemente il fascio $\Phi$ determinato dalla superficie composta $\theta + \psi'$ e dalla $\theta' + \psi$, ha la base costituita da $\gamma$ (come doppia), $\gamma'$, $c$, $c'$. Se, infine, si osserva che ogni conica *4*-secante $\gamma$ e bisecante $\gamma'$ appartiene ad una (sola) superficie di $\Phi$, possiamo concludere (n° 44) che il teorema propostoci è stato dimostrato.

Questa congruenza, corrispondente all' ipotesi che $\Omega$ sia un cono quadrico non degenerato in un fascio di rette doppie, sarà detta del *1° tipo.*

46. Una qualunque quadrica del fascio $\Phi'$ di base $\gamma$ (n° 45), seca ulteriormente $\gamma'$ in due punti collineari col punto $\omega$; assumeremo la retta di questi punti come corrispondente della detta quadrica. Evidentemente rimane così stabilita una proiettività fra le quadriche di $\Phi'$ e le generatrici del cono quadrico (di vertice $\omega$) su cui giace la quintica $\gamma'$. Le coniche della congruenza $\Gamma_{2,2}$ (del 1° tipo) sono quelle ognuna delle quali giace in una quadrica di $\Phi'$ e passa per la coppia di punti che questa superficie ha in comune con la generatrice, del cono, ad essa stessa quadrica omologa.

Si ritrova così una nota [44] costruzione della congruenza $\Gamma_{2,2}$ di 2ª specie e del 1° tipo.

Confrontando questo risultato con quello del n° 41 (per $r=3$ e $m=2$), si può concludere che le due congruenze di coniche $\Gamma_{2,2}$ del 1° tipo (e di 1ª o di 2ª specie), ammettono una stessa costruzione, con la sola differenza che nella $\Gamma_{2,2}$ di 1ª specie la rigata quadrica $\Omega$ cui appartiene la quintica gobba (di genere $p=2$) bisecata dalle coniche della congruenza è gobba, mentre nella $\Gamma_{2,2}$ di 2ª specie la rigata quadrica $\Omega$ è un cono.

47. Ragionando analogamente a come si fece nel n° 40 *b*), è facile dimostrare che se la rigata quadrica $\Omega$ degenera in un fascio di rette doppie, le coniche di $\Gamma_{2,2}$ sono 4-secanti una quartica gobba di 1ª specie $\gamma'$, e bisecanti una quintica $\gamma$ (di genere $p=2$) avente come doppi 4 punti (complanari) di $\gamma'$; inoltre l' inviluppo, di 2ª classe, generato dalle rette e contenenti le coppie della $g_2^1$ di $\gamma$, degenera in un fascio di rette doppie.

Viceversa

*data una quintica $\gamma$ (di genere $p=2$) con 4 punti doppi, tale che l'inviluppo, di classe 2, generato dalle rette contenenti i gruppi della $g_2^1$ di essa curva degeneri in un fascio doppio, e data una quartica gobba di 1ª specie $\gamma'$ passante pei quattro punti doppi di $\gamma$, le coniche bisecanti $\gamma$ e 4-secanti $\gamma'$ generano una congruenza $\Gamma_{2,2}$ di 2ª specie.*

Questa congruenza, corripondente all' ipotesi che la rigata quadrica $\Omega$ degeneri in un fascio di rette doppie, sarà detta del *2° tipo.*

48. Per $r=3$ e $m=3$ si ha (n° 44) che la congruenza $\Gamma_{3,6}$ (d' ordine 1, classe 6 e di 2ª specie) di cubiche piane si costruisce come segue.

Data una curva $\gamma$ base di un fascio di superficie cubiche, si considerino due cubiche $c$ e $c'$ *9*-secanti $\gamma$ e poste in uno stesso piano $\Sigma$. Due superficie d' ordine *7*, ognuna passante per queste due cubiche e avente $\gamma$ come doppia, determinano un fascio $\Phi$. Le cubiche delle superficie di $\Phi$ ognuna complanare con la retta che ha in $\Sigma$ la superficie di $\Phi$ nella quale essa cubica giace, generano la congruenza $\Gamma_{3,6}$ di 2ª specie richiesta.

La base di $\Phi$ è completata da una curva $\gamma'$ d' ordine *7* la quale insieme con $\gamma$ co-

---

(44) MONTESANO, l. c. in (31), Nota I, n° 4 ultime righe per $\mu=2$.

stituisce la base di un fascio $\Phi''$ di superficie d'ordine *4* ([45]), onde $\gamma'$ è di genere $p=6$ ed ha 18 punti comuni con $\gamma$, come del resto si può dimostrare direttamente.

Le cubiche della congruenza $\Gamma_{3,6}$ si appoggiano in 9 punti a $\gamma$ e in 3 punti a $\gamma'$. Si noti infine che, ragionando analogamente a come si fece nel n° 45, si conclude che la rigata quadrica $\Omega$ cui appartiene $\gamma'$ è un cono (irriducibile di vertice $\omega$).

Viceversa

*date, con 18 punti comuni, la base $\gamma$ di un fascio di superficie cubiche e una curva gobba $\gamma'$ d' ordine 7 e genere* $p=6$ *appartenente ad un cono quadrico, tutte le cubiche piane 9-secanti $\gamma$ e trisecanti $\gamma'$ generano una congruenza* $\Gamma_{8,6}$ *di 2ª specie.*

La dimostrazione è analoga a quella del n° 45.

Questa congruenza, corrispondente all' ipotesi che $\Omega$ sia un cono quadrico non degenerato in un fascio di rette doppie, sarà detta del *1° tipo.*

49. La congruenza, di cubiche piane, $\Gamma_{3,6}$ di 2ª specie e del 1° tipo, si può anche costruire stabilendo una proiettività fra le superficie cubiche di un fascio $\Phi'$ e le generatrici di un cono quadrico; le cubiche ognuna appartenente ad una superficie di $\Phi'$ e complanare con la sua omologa generatrice del cono, generano la richiesta congruenza. Tutto ciò si dimostra come al n° 46.

È facile infine dimostrare che

*data una curva $\gamma$ d'ordine 7 (di genere* $p=6$*) con 9 punti doppi costituenti la base di un fascio di cubiche, tale che l' inviluppo, di classe 2, generato dalle rette contenenti i gruppi della $g'_8$ di essa curva $\gamma$ degeneri in un fascio doppio, e data una curva $\gamma'$, base di un fascio di superficie cubiche, passante pei 9 punti doppi di $\gamma$, le cubiche piane trisecanti $\gamma$ e 9-secanti $\gamma'$ generano una congruenza* $\Gamma_{3,6}$ *di 2ª specie.*

Questa congruenza, corrispondente all' ipotesi che la rigata quadrica $\Omega$ degneri in un fascio di rette doppie, è da chiamarsi del *2° tipo.*

*Catania, novembre 1917.*

([45]) Si ragioni in modo analogo a come si fece nella ([42]).

# Sopra una formola notevole di Algebra, relativa ad alcuni tipi speciali di permutazioni.

SEBASTIANO VELLA

## RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI

PROFF. M. CIPOLLA ED E. DANIELE (*Relatore*).

Si può inserire negli Atti la breve nota del D.r Sebastiano Vella, contenente una dimostrazione chiara e semplice della formola delle permutazioni discordanti di un sistema di $n$ elementi.

---

Poste le prime definizioni di Analisi combinatoria, si presenta naturale in Algebra il problema di ricercare le permutazioni di $n$ elementi nelle quali ogni elemento ha un posto diverso da quello che aveva nella permutazione fondamentale. (*)

Detto $I_n$ il numero di queste permutazioni, si ha : (**)

(1) $$I_n = n. I_{n-1} + (-1)^n.$$

In questa Nota ho dimostrato la formola precedente col metodo dell' induzione completa ed ho poi eseguito su di essa alcune trasformazioni che permettono di dare ad $I_n$ un' espressione molto semplice.

* * *

1. Dati $m$ oggetti distinti : $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ e formate le permutazioni di questi oggetti, chiameremo " *permutazioni del tipo* $I_n$ " $(n \leqq m)$ quelle permutazioni nelle quali $n$ oggetti hanno posti diversi da quelli occupati nella permutazione fondamentale.

Per $n = m$, il numero di queste permutazioni è $I_m$, dato dalla formola (1).

2. — Per $n = 2$ ed $n = 3$ la (1) si dimostra subito.

(*) Cfr. MINETOLA « *Sopra alcune classi notevoli di permutazioni* » Giornale di Battaglini, tomo XLIII.

(**) Cfr. CAPELLI « *Istituzioni di Analisi algebrica* » ed. 1909, pag. 74.

Ammettiamola vera allora per un numero qualunque $n$ di elementi distinti e dimostriamola tale per $n+1$ elementi:

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ldots\,,\ a_n\,,\ a_{n+1}$$

3. Immaginiamo scritte le $n!$ permutazioni dei primi $n$ elementi e consideriamo, in ognuna di esse, l'elemento $a_{n+1}$ all' $(n+1)^{mo}$ posto.

Oltre alla fondamentale, vi saranno permutazioni dei tipi:

$$I_2\,,\ I_3\,,\ \ldots\ldots\,,\ I_{n-1}\,,\ I_n$$

Sia $P$ una permutazione qualunque del tipo $I_{n-h}$ $(h \leqq n-2)$. Essa può porsi sotto la forma:

$$D_1\ a_{i_1}\ D_2\ \ldots\ldots\ D_h\ a_{i_h}\ D_{h+1}\ a_{n+1}$$

essendo: $a_{i_1}\,,\ \ldots\ldots\,,\ a_{i_h}\,,\ a_{n-1}$ gli elementi che non hanno cambiato posto, e: $D_1\,,\ D_2\,,\ \ldots\ldots\,,\ D_{h+1}$ certe disposizioni dei rimanenti $n-h$ elementi, rispettivamente delle classi $k_1\,,\ k_2\,,\ \ldots\ldots\,,\ k_{h+1}$ con:

$$k_1+k_2+\ldots\ldots+k_{h+1}=n-h$$

Nella permutazione $P$ scambiamo ora l'elemento $a_{n+1}$ coi precedenti. Delle permutazioni che così si ottengono, quelle che provengono dallo scambio di $a_{n+1}$ con ciascun elemento delle disposizioni $D_1\,,\ \ldots\ldots\ D_{h+1}$, non possono presentare, oltre ad $a_{i_1}\,,\ \ldots\,,\ a_{i_h}$, nessun altro elemento al posto corrispondente al proprio indice, perchè lo scambio avviene sempre tra $a_{n+1}$ ed un elemento di indice più piccolo; esse sono quindi del tipo $I_{n-h+1}$.

Le altre permutazioni che si deducono dalla $P$ scambiando $a_{n+1}$ con ciascun elemento $a_{i_1}\,,\ \ldots\ldots\,,\ a_{i_h}$, sono del tipo $I_{n-h+2}$.

Se si vuole quindi che da una permutazione del tipo $I_{n-h}$ si abbiano delle permutazioni del tipo $I_{n+1}$, è necessario che $h$ non prenda altri valori che 0, 1; in altri termini, *le permutazioni del tipo* $\mathrm{I}_{n+1}$, *si hanno solo da quelle del tipo* $\mathrm{I}_n$ *e da quelle del tipo* $\mathrm{I}_{n-1}$; e noi ci proponiamo di fissarne il numero.

4. — Le permutazioni del tipo $I_{n-1}$ sono caratterizzate dall' avere, oltre ad $a_{n+1}$, uno solo dei primi $n$ elementi al posto occupato nella permutazione fondamentale, mentre gli altri $n-1$ elementi hanno cambiato posto.

Essendo allora $I_{n-1}$ il numero delle permutazioni di $n-1$ elementi del tipo $I_{n-1}$, dal n° precedente risulta che vi sono $nI_{n-1}$ permutazioni nelle quali uno solo degli elementi $a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ldots\,,\ a_n$ non ha cambiato posto.

Da una qualsivoglia di queste, scambiando l' elemento $a_{n+1}$ coi precedenti si ottiene, come risulta dal ragionamento tenuto nel n° precedente, una sola permutazione del tipo $I_{n+1}$, e però in tutto $n.I_{n-1}$.

Per quanto riguarda le permutazioni del tipo $I_n$ è chiaro che, da esse, se ne ottengono $nI_n$ che sono tutte del tipo $I_{n+1}$.

In definitiva, si ha che il numero totale delle permutazioni del tipo $I_{n+1}$ è dato da:

$$I_{n+1} = nI_{n-1} + nI_n \tag{2}$$

5. — Dalla formola (1) si ricava:

$$nI_{n-1} = I_n - (-1)^n$$

e, con ciò, la (2) diviene:

$$I_{n+1} = (n+1)\, I_n + (-1)^{n+1} \tag{3}$$

c. v. d.

6. — Riprendiamo la formola (1). Essa può scriversi in quest' altro modo:

$$\frac{I_n}{n\,!} = \frac{I_{n-1}}{(n-1)\,!} + \frac{(-1)^n}{n\,!} \tag{4}$$

Diminuendo successivamente di una unità l' indice $n$ ed osservando che $I_1 = 0$, si ottengono le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{I_{n-1}}{(n-1)\,!} &= \frac{I_{n-2}}{(n-2)\,!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!} \\
\frac{I_{n-2}}{(n-2)\,!} &= \frac{I_{n-3}}{(n-3)\,!} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)\,!} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{I_3}{3\,!} &= \frac{I_2}{2\,!} - \frac{1}{3\,!} \\
\frac{I_2}{2\,!} &= \frac{1}{2\,!}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sommando membro a membro le relazioni (4), (5) si ha per $I_n$ l' espressione:

$$I_n = \sum_{r=2}^{n} (-1)^r \frac{n\,!}{r\,!}$$

*Palermo, 10 febbraio 1918.*

# Delle superficie d'ordine 6 o 7 con infinite cubiche piane razionali

Nota di ALFREDO CATALIOTTI

## RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI

PROFF. C. SEVERINI E G. SCORZA (*Relatore*).

Questa Memoria del Dott. A. CATALIOTTI è dedicata alla classificazione delle superficie delle $S_3$ di ordine 6 e 7, con infinite cubiche piane razionali poste nei piani di un inviluppo di classe superiore ad 1.

Dato l'interesse del problema che la Memoria risolve compiutamente, essa merita di esser pubblicata negli Atti della nostra Accademia.

---

Scopo di questo lavoro è di classificare le superficie razionali dell'$S_3$ d'ordine $n=6$ o $n=7$ con infinite cubiche piane razionali, poste in piani che costituiscono un inviluppo di classe $\mu > 1$.

## § I.

1. Sia $\gamma$ una superficie razionale dell'$S_3$ algebrica, irriducibile, d'ordine $n \geq 6$ con infinite cubiche piane razionali. Escludendo a priori essere $\gamma$ rigata, nè potendo essere proiezione della superficie di Veronese, si deduce che le cubiche di essa formano un fascio $(k)$ i cui piani costituiscono un inviluppo $(\pi)$ di classe $\mu$.

Supporremo sempre $\mu > 1$.

2. Detto $\omega$ un piano generico dell'$S_3$ ambiente, si osservi che le cubiche di $(k)$ segnano sulla curva $c \equiv \gamma\omega$ un'involuzione $I_3^1$. Indichiamo con $p_i$ il genere di questa, cioè di $(k)$.

Osservando che su una superficie razionale, non esistono fasci irrazionali, si deduce $p_i = 0$ e quindi $I_3^1$ è razionale, cioè è una $g_3^1$.

Proiettando da un punto generico $P$ di $\omega$, le terne di punti coniugati di $g_3^1$, si ottiene nel fascio $(P, \omega)$ una corrispondenza involutoria $(2n, 2n)$ della quale le $4n$ coincidenze sono:

Le traccie in $\omega$ dei $\mu$ piani di $(\pi)$ passanti per $P$, ognuna contata $6s$ volte, ove $s$ è il numero delle cubiche di $(k)$ poste in un piano generico di $(\pi)$; le $\delta$ rette che da $P$ proiettano i $\delta$ punti doppi di $g_3^1$; le $\delta'$ rette, contate due volte, che da $P$ proiettano i $\delta'$ punti (distinti o no) della curva $c$, su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della $g_3^1$; le $\delta''$ rette, contate sei volte, che da $P$ proiettano i $\delta''$ punti (distinti o no)

di $c$, su ognuno dei quali cadono (su tre rami) tre punti coniugati della $g_3^1$ ed infine le $x$ rette; contate due volte, che da $P$ proiettano i punti $c_x\,\omega$; ove $c_x$ è la curva luogo dei punti doppi delle cubiche di $(k)$.

Si ha dunque:

$$4n = 6\mu s + \delta + 2\delta' + 6\delta'' + 2x \tag{1}$$

ove è:

$$\delta = 2(p_c + 2) \tag{2}$$

indicando con $p_c$ il genere della curva $c$.

Da queste due eguaglianze eliminando $\delta$ si ha:

$$p_c = 2(n-1) - 3\mu s - \delta' - 3\delta'' - x \tag{3}$$

3. Da quanto al n. 1 è stato detto, segue che si ha sempre: $p_c > o$.

Allora, in virtù della (2) sarà $\delta \geq 6$ e quindi per la (1) $4n - 6\mu s \geq 6$ da cui:

$$\mu \leq \frac{2n-3}{3s}. \tag{4}$$

4. È noto (*) che se l' inviluppo $(\pi)$ è stellare, detto $V$ il suo punto base,

*a*) Se $V$ non appartiene alla superficie $\gamma$, allora è $\mu = \frac{n}{3s}$;

*b*) Se $V$ è $l$-plo per $\gamma$, ma non punto base per $(k)$ allora è $\mu = \frac{n-l}{3s}$;

*c*) Se $V$ è $l$-plo per $\gamma$, e punto base semplice per $(k)$, allora è $\mu = \frac{n-l}{2s}$;

*d*) Se $V$ è $l$-plo per $\gamma$ e punto base doppio per $(k)$, allora è $\mu = \frac{n-l}{s}$.

5. Superficie con un fascio di cubiche piane razionali, e d' ordine $n$ qualunque, si costruiscono col seguente procedimento geometrico:

Siano $(\pi)$ e $(\chi)$ due sistemi algebrici irriducibili di piani il primo e di superficie cubiche rigate il secondo e se le $(\chi)$ sono coni, siano esse razionali. Dicansi $\mu$ e $\nu$ i loro indici, rispettivamente e supponiamo che sia stabilita fra i loro elementi una corrispondenza $(p, s)$;

Il luogo della cubica comune a due elementi omologhi, è una superficie $\gamma$ d' ordine $n = 3\mu s + \nu p$, con un fascio di cubiche (evidentemente) razionali. Queste sono tali che in ogni piano di $(\pi)$ ne esistono $s$ e ad ogni superficie di $(\chi)$ ne appartengono $p$. Generalmente la multiplicità per $\gamma$ di un punto base soltanto per $(\chi)$ è $\mu s$; la multiplicità di un punto base soltanto per $(\pi)$ è $\nu p$; la multiplicità, infine, di un punto base per ambedue i sistemi $(\pi)$ e $(\chi)$ è $\mu s + \nu p$.

6. Se nel n° precedente si pone, per es. $\mu = 2$, $s = \nu = p = 1$ supponendo inoltre che le $(\chi)$ siano superficie cubiche generali dotate di un punto doppio comune, punto che

---

(*) Cfr. G. MARLETTA « *Delle superficie algebriche d' ordine 6 o 7 con un fascio di cubiche ellittiche* » [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI anno 1916].

sia base per l' inviluppo $(\pi)$, si ottiene una superficie d' ordine 7 dotata di un fascio $(k)$ di cubiche piane razionali, aventi in comune il punto doppio.

Infatti la curva base di $(\chi)$ è doppia per $\gamma$ e d' ordine 9, onde $\gamma$ è a curve sezioni di genere : $\binom{6}{2} - 9 = 6$.

7. Un' altra costruzione è la seguente :

Fissati i due sistemi $(\pi)$ e $(\chi)$ di piani il primo e di superficie cubiche (generali) il secondo, si chiamino corrispondenti un piano di $(\pi)$ ed una superficie di $(\chi)$ ogni qualvolta si tocchino :

Il luogo della cubica comune a due elementi omologhi, è una superficie con un fascio di cubiche piane (evidentemente) razionali.

Si noti però che i numeri $p$, $s$, non possono ora scegliersi in maniera arbitraria.

Per $\mu = \nu = 1$, per es., si avrà $p = s = 12$, e quindi la superficie generata in tal modo sarà d' ordine $n = 48$.

Detto infatti $\rho$ un piano generico di $(\pi)$, le $\chi$ segnano su $\rho$ un fascio di cubiche ellittiche, e poichè in un fascio di curve d' ordine $m$ esistono in generale $3(m-1)^2$ curve a punti doppi, deduciamo che è $s = 12$. Analogamente, poichè una superficie d' ordine $m$ è in generale di classe $m(m-1)^2$, ad una superficie di $\chi$ corrispondono 12 piani di $(\pi)$, cioè è $p = 12$.

8. Sia ora $\gamma$ d' ordine $n = 6$ (e non rigata).

Dalla (4) si deduce $\mu < 4$.

Per $\mu = 3$, la (3) (tenendo presente che per la (4) è $s = 1$) diviene :

$$p_c = 1 - \delta' - 3\delta'' - x \ ,$$

e dall' osservazione fatta al n⁰ 3, segue che l' ipotesi $\mu = 3$ è solo possibile nel caso che sia $x = 0$ (oltre che $\delta' = \delta'' = o$), cioè che esista un punto $V$ che sia doppio per tutte le cubiche di $(k)$. In tal caso $V$ è (n⁰ 4, *d*) triplo per $\gamma$.

Sia dunque $\delta' = \delta'' = x = o$, $p_c = 1$, $(\pi)$ evidentemente conico.

Dai noti (*) tipi di sistemi lineari di curve piane ellittiche, si deduce che $\gamma$ non può essere che proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_6$, rappresentata nel piano del sistema lineare di cubiche $|\lambda^3_{123}|$ ove i punti 1, 2, 3, sono collineari.

In fine di questo numero diremo la ragione di questa collinearità.

Scelto un punto arbitrario $P$ del piano rappresentativo $\rho$, al fascio di rette avente il centro in esso, corrispondono $\infty^1$ cubiche di $\gamma_1$ appartenenti ad un fascio $(k_1)$. Proiettando nello spazio ordinario la $\gamma_1$ da un piano $\omega$ che abbia un punto comune con lo spazio di ogni cubica del fascio $(k_1)$, si ha la $\gamma$ contenente un fascio $(k)$ di cubiche piane razionali. Si scelga per $\omega$ uno generico dei piani incidenti la retta $r = O_1 P_1$, comune a tutti gli $S_3$ delle cubiche di $(k_1)$; ove con $O_1$ si è indicato il punto (doppio) di $\gamma_1$ la cui immagine è la retta $\lambda^1_{123}$, e con $P_1$ il punto la cui immagine è $P$. La traccia dello spa-

(*) Per questi tipi, dati la prima volta da G. GUCCIA, cfr. p. es. G. FERRETTI « *Sulla riduzione all' ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere* p, *in particolare pei valori* 0,1,2, *del genere* » [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo tomo XVI (1902) pp. 236—279 e precisamente teorema X].

zio ordinario $\Sigma \equiv \omega r$ nell' $S_3$ di $\gamma$, sarà un punto $V$ triplo per $\gamma$ (perchè 3 sono i punti $\Sigma\gamma_1$ ) e base doppio per $(k)$, perchè in $V$ si proiettano i punti $P_1$ ed $O_1$ punti ambidue comuni a tutte le cubiche di $(k_1)$.

Dimostriamo ora che la $V_4$ generata dagli $\infty^1$ spazi delle cubiche di $(k_1)$, è d'ordine *3*. Indicheremo da ora in poi con $\Phi$ la varietà generata come sopra.

Sia infatti $\omega_1$ uno generico dei piani trisecanti $\gamma_1$, ed indichiamo con $A, B, C$, le immagini dei tre punti $\omega_1 \gamma_1$.

Osserviamo che affinchè $\omega_1$ incontri lo spazio di una cubica del fascio $(k_1)$, occorre e basta che questa cubica, e i tre punti $\omega_1 \gamma_1$ appartengano ad uno stesso iperpiano cioè i tre punti $A, B, C$, e la retta uscente dal punto $P$, immagine di detta cubica, appartengano ad una stessa $\lambda^3_{123}$. Ora, ciò è impossibile se questa retta non passa per alcuno dei punti $A, B, C$, perchè questi e i punti 1, 2, 3, non giacciono in una stessa conica. Dunque le immagini delle sezioni iperpiane ognuna passante per una cubica del fascio $(k_1)$ e pei tre punti $\omega_1 \gamma_1$ sono:

$$\lambda^1_{PA}\,\lambda^1_{123}\,\lambda^1_{BC}\,,\quad \lambda^1_{PB}\,\lambda^1_{123}\,\lambda^1_{CA}\,,\quad \lambda^1_{PC}\,\lambda^1_{123}\,\lambda^1_{AB}\,.$$

Ne segue che $\Phi$ è d' ordine *3*.

Facciamo ora vedere che è $\mu = 3$.

Consideriamo a tal fine, lo spazio ordinario $\Sigma_1$ individuato dal piano $\omega$, centro di proiezione, e da un punto $A$ dello spazio di $\gamma$.

Esso seca $\Phi$ in una curva $c$ d' ordine *3* la quale come è facile vedere (considerando un $S_3$ della $V^3_4$ passante per un punto generico di $c$) si spezza in tre rette tracce in $\Sigma_1$ di tre spazi delle cubiche di $(k_1)$.

Ora i tre $S_5$ individuati da $\Sigma_1$ e rispettivamente dai tre spazi ora detti, secano l' $S_3$ di $\gamma$ in tre piani che evidentemente passano per $A$, epperò $\mu = 3$.

Diamo infine ragione della collinearità dei punti 1, 2, 3.

Invero se i punti 1, 2, 3, sono generici, è impossibile scegliere $\omega$ in modo che abbia comune con $\Phi$ un solo punto $O_1$. Infatti per questo dovrebbero passare tutti gli $S_3$ delle $(k_1)$, ma allora due qualunque di questi spazi avendo comuni due punti distinti $O_1$ e $P_1$ apparterrebbero ad uno stesso iperpiano, e ciò è assurdo se i punti 1, 2, 3, non sono collineari. Vedremo in seguito (n° 10) che se $\omega$ ha comune con $\Phi$ non un punto, ma una retta, l' inviluppo $(\pi)$ è di classe $\mu = 2$.

9. Sia $\mu = 2$, e quindi per la (4) $s = 1$. (*)

Il punto base $V$ di $(\pi)$ dunque (n° 4) o non appartiene a $\gamma$, o è doppio per $\gamma$ e punto base semplice per $(k)$, ovvero è quadruplo per $\gamma$ e base doppio per $(k)$.

La ulteriore intersezione di $\gamma$ con un piano di $(\pi)$ è una cubica irriducibile, la quale (come facilmente si verifica considerando i due piani di $(\pi)$ passanti per un punto generico di $\gamma$) appartiene ad un fascio $(k')$.

Ora, poichè per $x = o$ $V$ è quadruplo per $\gamma$ e doppio per $(k)$, sarà anche doppio per

---

(*) Giacchè per $\mu = 3$ e $\mu = 2$ è $s = 1$, $(\pi)$ ha il genere eguale a quello di $(k)$ ; quindi se si volesse togliere la restrizione della razionalità di $(k)$, e quindi di $\gamma$, non rimarrebbe che considerare l' ipotesi che $(\pi)$ sia, con $\mu = 3$, (stellare ed) ellittico.

$(k')$, cioè la superficie $\gamma$ è dotata di due fasci $(k)$ e $(k')$ di cubiche piane razionali, aventi $V$ come punto base doppio comune.

Per $\mu = 2$ ed $s = 1$ la (3) diviene:

$$p_c = 4 - \delta' - 3\delta'' - x .$$

Esaminiamo ora tutti i casi possibili perchè essa sia verificata.

10. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = o$, $x = 3$, $p_c = 1$.

La superficie $\gamma$ è ancora proiezione della $\gamma_1$ dell' $S_6$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di cubiche $|\lambda^3_{123}|$ (ove però i punti 1, 2, 3, non sono più collineari).

Come piano $\omega$ centro di proiezione si sceglierà un generico piano condotto per la direttrice $d$ della rigata cubica normale $\varphi$ totale intersezione della varietà $\Phi$ con un $S_4$ generico.

Facciamo ora vedere che è $\mu = 2$.

A tal fine basta ripetere il ragionamento fatto al n° 8, osservando soltanto che delle tre rette in cui si spezza la curva $c \equiv \Sigma_1 \Phi$ una è la $d$, mentre le altre due rette sono anche in questo caso le tracce in $\Sigma_1$ di due spazi delle cubiche di $(k_1)$.

I due $S_5$ individuati da $\Sigma_1$ e rispettivamente dai due spazi ora detti, secano l'$S_3$ di $\lambda$ in due piani passanti per $A$, epperò $\mu = 2$.

Che sia $x = 3$ segue dal fatto che essendo generico l' $S_4$ con il quale sechiamo $\Phi$, la direttrice $d$ di $\varphi$ non incontra i piani delle coniche delle tre cubiche degeneri di $(k_1)$ onde è $\delta' = 0$. Infatti, poichè come rilevasi dalla rappresentazione, ognuno di questi tre piani non giace nell' $S_4$ degli altri due, così una generica retta incidente questi non incontra il primo piano, onde i punti nei quali $S_4$ seca i detti tre piani non sono collineari. Se poi fosse $\delta'' = 1$, $\omega$ dovrebbe avere una retta comune con lo spazio di una cubica di $(k_1)$ contro la supposta genericità di $\omega$.

11. Sia $\delta' = 1$, $\delta'' = o$, $x = 2$, $p_c = 1$.

Per il presente caso c' è da ripetere quanto al n° precedente è stato detto.

Osserviamo soltanto che la direttrice $d$ di $\varphi$ deve incontrare lo spazio di una cubica degenere di $(k_1)$ in un punto del piano $\sigma_1$ della conica che di essa cubica fa parte.

A tal uopo basta secare $\varphi$ con un $S_4$ passante genericamente per una generica retta di $\sigma_1$.

12. Sia $\delta' = 2$, $\delta'' = o$, $x = 1$, $p_c = 1$.

Questo caso si esclude. Cominciando dall' osservare che i piani $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ delle coniche delle tre cubiche degeneri di $(k_1)$ appartengono ad uno stesso $S_5$, poniamo, per esempio, $\sigma_1 \sigma_2 \equiv S_4$, $S_4 \sigma_3 \equiv r_3$. Siano $r_1$ ed $r_2$ due generiche rette di $\sigma_1$ e $\sigma_2$ e sia $S_3 \equiv r_1 r_2$. Quest' $S_3$ seca $\sigma_3$ solo nel punto $O_3 \equiv S_3 r_3$. Infatti se l' $S_3$ ora detto incontrasse $\sigma_3$ in un altro punto $M$ non appartenente ad $r_3$, l' $S_4 \equiv \sigma_1 \sigma_2$ avendo in comune con $\sigma_3$ la retta $r_3$ ed il punto $M$, conterrebbe $\sigma_3$ ciò che non è. (*) Se ora conduciamo per l' $S_3 \equiv r_1 r_2$ un $S_4$ generico, e sechiamo con questo la $\Phi$, la direttrice $d$ di $\varphi \equiv S_4 \Phi$, dovendosi appoggiare ad $r_1$ ed $r_2$ apparterrà all' $S_3$ di queste 2 rette, onde incontrerà lo spazio della terza cubica degenere nel punto $O_3$ di $\sigma_3$.

(*) È poi ovvio che l' $S_3 \equiv r_1 r_2$ non possa contenere $r_3$. Infatti questa retta passa per $P_1$ onde $P_1$ apparterrebbe a quest' $S_3$ il che è assurdo perchè a questo apparterrebbero i piani $\sigma_1 \equiv P_1 r_1$ e $\sigma_2 \equiv P_1 r_2$.

Concludiamo che se $d$ incontra $\sigma_1$ e $\sigma_2$, incontra anche $\sigma_3$; onde il presente caso si esclude.

13. Sia $\delta' = 3$, $\delta'' = o$, $x = o$, $p_c = 1$.

Questo caso si esclude. Infatti, essendo $x = o$, il fascio $(k)$ ha un punto base doppio $V$; questo è proiezione non soltanto del punto di $\gamma_1$ avente $P$ per immagine, ma anche di un altro punto di una $(k_1)$ qualunque. Se quest' altro punto fosse variabile esso descriverebbe una curva dell' $S_3 \equiv \omega V$ ciò che è assurdo perchè $\omega$ incontrerebbe $\gamma_1$. Dunque detto punto è fisso e la sua immagine deve essere la retta $\lambda^1_{123}$, cioè i punti 1,2,3, sono collineari. Detto $O_1$ questo punto sia $r_1 \equiv O_1 P_1$.

Un piano incidente $r_1$ incontra tutti gli $S_3$ di $(k_1)$, ma perchè risulti $\delta' = 3$ è necessario che assunto tale piano quale centro di proiezione, esso incontri gli spazi delle tre cubiche degeneri di $(k_1)$ in tre punti dei piani $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$. Ora, nel caso in questione $r_1$ incontra $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, in tre punti coincidenti nel punto $P_1$ e poichè questo appartiene a $\gamma_1$, il piano $\omega$, centro di proiezione, non può incontrare in esso $r_1$.

Se poi $\omega$ incontrasse $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, oltre che la retta $r_1$ in $M_1$, essendo $M_1$ un punto generico di $r_1$, ne verrebbe evidentemente $\delta'' = 3$ e non $\delta' = 3$.

14. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = 1$, $x = o$, $p_c = 1$.

Essendo $x = o$, i punti 1, 2, 3, saranno (n° prec.) collineari.

Il piano $\omega$, oltre che incontrare $r_1 \equiv O_1 P_1$ in $M_1$ deve avere un altro punto $N_1$ comune con lo spazio di una cubica $c$ di $(k_1)$. Al n° 8 è stato dimostrato che è $\Phi$ d' ordine, $3$, e poichè in questo caso $\omega$ contiene la retta $s_1 \equiv M_1 N_1$ di $\Phi$, l' inviluppo $(\pi)$ sarà di classe $\mu = 3 - 1 = 2$.

Il punto $V$ risulterà quadruplo per $\gamma$ perchè proiezione del punto (doppio) $O_1$, del punto $P_1$ e del terzo punto ulteriore intersezione del piano $r_1 s_1$ con la cubica $c$.

15. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = o$, $x = 2$, $p_c = 2$.

Allora $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_5$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di quartiche $\left| \lambda^4_{1^2 234567} \right|$.

Al fascio di rette avente il centro in uno dei punti base semplici del sistema, per es. nel punto 2, corrispondono $\infty^1$ cubiche razionali di $\gamma_1$ appartenenti ad un fascio $(k_1)$. Proiettando nello spazio ordinario la $\gamma_1$ da una retta $o$ che abbia un punto comune con lo spazio di ogni cubica del fascio $(k_1)$, si ha la $\gamma$ contenente un fascio $(k)$ di cubiche piane razionali.

Considerando una generica corda di $\gamma_1$ e ragionando in modo analogo al n° 8 si prova che $\Phi$ è d' ordine $2$, e precisamente un $S_1$-cono quadrico.

Infatti, detto $\Sigma$ un generico $S_3$ di $\Phi$; un $S_4$ passante per $\Sigma$ seca $\Phi$ in un altro spazio $\Sigma'$ avente in comune con $\Sigma$ un piano. Al variare dell' $S_4$ intorno a $\Sigma$ si ottengono in questo $\infty^1$ piani, tracce degli $S_3$ di $\Phi$. Evidentemente per un punto generico di $\Sigma$ di questi $\infty^1$ piani ne passa uno solo, onde essi appartengono ad un fascio il cui asse $s$ è comune a tutti gli $S_3$ di $\Phi$. Rimane così provato che $\Phi$ è un $S_1$-cono quadrico. Facciamo ora vedere che $s$ non appartiene a $\gamma_1$.

È noto che nell' $S_5$ un $S_1$-cono quadrico ammette due sistemi distinti di $S_3$ generatori, dei quali uno è quello degli spazi delle cubiche di $(k_1)$. Consideriamo ora la totale intersezione dell' $S_4 \equiv \Sigma\Sigma'$ con $\gamma_1$: la $\lambda^4_{1^2 234567}$ corrispondente, si spezzerà in una retta

passante pel punto 2 ed in una cubica passante pei punti $1^2, 3, 4, 5, 6, 7$ e questa rappresenta una cubica razionale che evidentemente appartiene a $\Sigma$.

Ed ora, poichè l' $S_4$ considerato, non può secare la $\gamma_1$ in più che una curva d' ordine $6$, e già la seca in due cubiche, segue che $s$ non può appartenere a $\gamma_1$.

Una generica retta incidente $s$ è allora il richiesto centro di proiezione $o$.

Poichè $o$ non appartiene a $\Phi$, sarà l' ordine di questa eguale alla classe di $(\pi)$, sarà cioè $\mu = 2$. Il punto base $V$ di $(\pi)$ non appartiene a $\gamma$.

Perchè vi appartenga e sia doppio per questa basta considerare la $\gamma_1$ di cui sopra ove sia $\lambda^1_{167}$.

16. Sia $\delta' = 1, \quad \delta'' = 0, \quad x = 1, \quad p_c = 2.$

Per il presente caso ci riferiamo al n° precedente osservando solamente che la retta $o$ deve incontrare $s$ nel punto che questa ha comune con il piano della conica di una cubica degenere del fascio $(k_1)$. È bene notare che tale punto non può appartenere alla detta conica e quindi a $\gamma_1$. Infatti se ciò si verificasse per una conica e quindi per tutte e 6, se ne dedurrebbe che $s$ incontra $\gamma_1$ in sei punti i quali sono distinti perchè due qualunque di queste coniche non hanno alcun punto comune; ciò che è assurdo, perchè $s$ apparterrebbe a $\gamma_1$.

17. Sia $\delta' = 2, \quad \delta'' = o, \quad x = o. \quad p_c = 2.$

Si consideri la $\gamma_1$ del n° 15 ove sia $\lambda^2_{1^2 3456}$. Le $\lambda^1_{134}$, $\lambda^1_{156}$ in cui questa si spezza, sono immagini di due punti $V_1$ e $V_1'$ comuni a tutte le $k_1$ e doppi per $\gamma_1$.

Le coniche rappresentate dal punto $1^2$ e da $\lambda^1_{27}$ passano per $V_1$ e $V_1'$ onde i loro piani passano per la retta congiungente questi due punti. Se la retta $o$, centro di proiezione, incontra tale retta, sarà evidentemente $\delta' = 2$ ed il punto $V$ risulterà base doppio per $(k)$ e quadruplo per $\gamma$, perchè in esso si proiettano i due punti $V_1$ e $V_1'$ doppi per $\gamma_1$ e comuni a tutte le $k_1$. Notiamo infine che per il fatto che $o$ non appartiene a $\Phi$, l' inviluppo $(\pi)$ sarà di classe $\mu = 2$.

18. Sia $\delta' = o, \quad \delta'' = o, \quad x = 1, \quad p_c = 3.$

Allora $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_4$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di quartiche $\left| \lambda^4_{1^2 3456789} \right|$, (*) ove i punti $2, 3, \ldots, 10$ sono punti base di un fascio $(k')$ di cubiche. Al fascio di rette avente il centro nel punto 1 corrispondono $\infty^1$ cubiche razionali di $\gamma_1$ appartenenti ad un fascio $(k_1)$.

Osserviamo che le cubiche del fascio $(k_1)$ sono piane. Consideriamo infatti una retta generica del fascio di centro 1, immagine di una $c_1$ delle cubiche di $(k_1)$.

Essa, insieme con una delle $\infty^1$ cubiche di $(k')$ appartiene ad una $\lambda^4_{1\ldots10}$, immagine di una sezione iperpiana di $\gamma_1$: $c_1$ cioè appartiene ad $\infty^1$ $S_3$ onde essa è piana.

Proiettando nello spazio ordinario la $\gamma_1$ da un punto generico $o$ dell' ambiente si ha la $\gamma$ con un fascio $(k)$ di cubiche piane razionali. Considerando una generica corda di $\gamma_1$ con ragionamento analogo a quello tenuto nel n° 8 si prova che la varietà a tre dimensioni generata dai piani delle cubiche di $(k_1)$ è un $S_0$-cono quadrico e ciò d' accordo con l' ipotesi $\mu = 2$. Il punto base $V$ di $(\pi)$, proiezione di $S_0$, non appartiene a $\gamma$.

19. Sia $x = o, \quad \delta' = 1, \quad \delta'' = o, \quad p_c = 3.$

(*) Cfr. CASTELNUOVO « *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* » [Atti della R. Acc. di Scienze di Torino, Vol. XXV, (1890) pp. 695-715.] SCORZA « *Le superficie a curve sezioni di genere 3* » [Ann. di Mat., serie III, tomo XVI (1909) pp. 255-326].

Si consideri la $\gamma_1$ del n° prec., ove sia $\lambda^2_{345678910}$, conica questa che rappresenta un punto $V_1$ quadruplo per $\gamma_1$ e doppio per tutte le cubiche del fascio $(k_1)$.

È facile vedere che la conica rappresentata da $\lambda^1_{12}$ appartiene ad $\infty^2$ sezioni iperpiane ond' essa si riduce ad una retta doppia, passante pel punto $V_1$. Proiettando nello spazio ordinario la $\gamma_1$ da un punto generico $O$ dell' ambiente si ha una superficie come si richiede.

20. Sia $\delta' = \delta'' = x = o, \ p_c = 4$.

Si ottiene una siffatta superficie se, ferme restando tutte le condizioni di cui al n° 6°, si supponga che esista un piano $\rho$ di $(\pi)$ che faccia parte (semplicemente) della sua superficie cubica omologa in $(\chi)$.

## § 2.

21. Sia ora $\gamma$ d' ordine $n = 7$.

Dalla (4) si deduce $\mu < 4$.

Sia dunque $\mu = 3$ e quindi per la (4) $s = 1$.

L' inviluppo $(\pi)$ può essere gobbo o conico. In quest' ultimo caso, detto $V$ il suo punto base esso è (n° 4) semplice per $\gamma$ e punto base (semplice) per $(k)$, ovvero è quadruplo per $\gamma$ e base doppio per $(k)$. Per $\mu = 3$ ed $s = 1$ la (3) diviene :

$$p_c = 3 - \delta' - 3\delta'' - x \ ,$$

e siccome non può essere $\delta'' > o$, esamineremo soltanto l' ipotesi $p_c = 3 - \delta' - x$.

22. Sia $\delta' = o, \ x = 2, \ p_c = 1$.

La $\gamma$ è allora proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_7$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di cubiche $|\lambda^3_{12}|$. Scelto un punto arbitrario $P$ del piano rappresentativo $\rho$, al fascio di rette avente il centro in esso, corrispondono $\infty^1$ cubiche di $\gamma_1$ appartenenti ad un fascio $(k_1)$. Ne segue che per $p_c = 1$, anche per $x > o$, $(\pi)$ è sempre conico.

Proiettando nello spazio ordinario la $\gamma_1$ da un $S_3$ che abbia un punto comune con lo spazio di ogni cubica del fascio $(k_1)$, si ha la $\gamma$ contenente un fascio $(k)$ di cubiche piane razionali. Detto $\Omega$ lo spazio centro di proiezione, la sua effettiva esistenza si prova come segue :

Indicando con $\Omega_4$ lo spazio (ordinario) passante per 4 punti generici di $\gamma_1$ e ragionando in modo analogo al n. 8 si prova che la varietà $\Phi$ è d' ordine $4$.

La sezione di $\Phi$ con un $S_5$ generico è una rigata del $4^o$ ordine la quale ammetterà una retta od una conica direttrice; un $S_3$ genericamente condotto per questa direttrice è il richiesto spazio $\Omega$.

Dalla genericità di $\Omega$ segue $\delta' = o$, e qnindi $x = 2$.

Ammettendo per un momento che la direttrice $d$ della $V^4_2 \equiv \Phi \, S_5$ sia una retta , ne segue subito $\mu = 3$, come si prova con ragionamento analogo a quello tenuto nel n° 10.

Un $S_5$ infine che sodisfi alla sola condizione di secare in un piano l' $S_3$ di una cubica di $(k_1)$, seca ulteriormente $\Phi$ in una rigata cubica $\varphi$, la cui direttrice è la retta richiesta.

23. Sia $\delta' = x = p_c = 1$.

Per il presente caso c' è da ripetere quanto è stato detto nel n° precedente, osservando soltanto che la direttrice $d$ di $\varphi$ deve incontrare lo spazio di una cubica degenere

di $(k_1)$ in un punto del piano $\sigma_1$ della conica che di essa cubica fa parte. A tal uopo basta secare $\Phi$ con un $S_5$ passante per una generica retta di $\sigma_1$, e secante in un piano lo spazio di una cubica di $(k_1)$.

24. Sia $\delta' = 2$, $x = o$, $p_c = 1$.

Essendo $x = o$, il fascio $(k)$ è dotato di un punto base doppio $V$. Questo deve essere non soltanto proiezione del punto $P_1$, avente $P$ per immagine, ma di un altro punto $P_1'$ di una $k_1$ qualunque. Al n° 8 si è visto che $P_1'$ non può essere variabile, e poichè dalla rappresentazione si vede che esso non esiste, a prescindere da qualsiasi altra ragione concludiamo che il caso in questione si esclude.

25. Sia $\delta' = o$, $x = 1$, $p_c = 2$.

L' inviluppo $(\pi)$ può essere gobbo o conico, ma nell' uno e nell' altro caso, la superficie non esiste.

*a*) Supponiamo $(\pi)$ gobbo.

Allora $\gamma$ sarebbe proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_6$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di quartiche $|\lambda^4_{1^2 23456}|$. Al fascio di rette avente il centro in uno dei punti base semplici del sistema, per es. nel punto 6, corrispondono $\infty^1$ cubiche di $\gamma_1$ appartenenti ad un fascio $(k_1)$.

Proiettando nello spazio ordinario la $\gamma_1$ da un piano $\omega$ che abbia un punto comune con lo spazio di ogni cubica di $(k_1)$ si avrebbe la $\gamma$ con un fascio $(k)$ di cubiche piane razionali. Considerando un generico piano trisecante $\gamma_1$ e ragionando come al n° 8; si prova che $\Phi$ è d' ordine $3$. Ora, se esistesse una retta, non di $\gamma_1$, comune a tutti gli $S_3$ delle $k_1$, un piano incidente tale retta sarebbe il piano $\omega$ richiesto, ma è da notare che in tal caso $(\pi)$ sarebbe conico, mentre per ipotesi esso è gobbo; ne segue che non possiamo servîrci di una retta, come si è detto, comune a tutti gli spazi delle $k_1$. Sechiamo allora $\Phi$ con un $S_4$; si ottiene una rigata cubica normale ed un piano passante per la direttrice di questa sarebbe il richiesto piano $\omega$. Ma considerando lo spazio individuato da $\omega$ e da un punto generico $A$ dell' $S_3$ di $\gamma$, ragionando come al n° 10 si prova essere $\mu = 3 - 1 = 2$. Infine, poichè non è possibile sottoporre i punti fondamentali del sistema a condizioni tali da avere le $(k_1)$ piane, concludiamo che il caso in questione è da escludere.

*b*) Supponiamo $(\pi)$ conico.

Facciamo anzitutto vedere chè è da escludere l' ipotesi sopra accennata che esista cioè una retta, non di $\gamma_1$, comune a tutti gli $S_3$ delle $k_1$.

Infatti se gli $S_3$ delle $k_1$ hanno una retta comune, due di essi appartengono ad uno stesso iperpiano, onde la ulteriore intersezione di questo con $\gamma_1$ dovrebbe essere una retta. Evidentemente questa retta dovrebbe essere rappresentata da $\lambda^2_{1^2 2345}$, la quale anche se i punti fondamentali si sottopongono alle condizioni necessarie per la sua esistenza, rappresenta un punto e non una retta.

Concludiamo che una retta non di $\gamma_1$, comune a tutti gli $S_3$ delle $k_1$ non esiste.

Si consideri ancora la $\gamma_1$ di cui sopra ove sia $\lambda^1_{123}$. Questa retta è immagine di un punto $O_1$ di $\gamma_1$, per cui passano tutte le cubiche di $k_1$; ma $O_1$ non sarebbe (n° 21) semplice per $\gamma_1$, ma doppio. $O_1$ infine sarebbe triplo per $\gamma_1$ ove si consideri una $\lambda^1_{2345}$.

Poichè in nessun modo è possibile che la $\gamma_1$ sia dotata di un punto base semplice per $(k_1)$ e pure semplice per $\gamma_1$, concludiamo che il caso in questione si esclude.

26. Sia $\delta' = 1$, $x = o$, $p_c = 2$.

Si consideri la $\gamma_1$ del n° prec. ove sia $\lambda^2_{1^2 2345}$ spezzata in $\lambda^1_{123}$ e $\lambda^1_{145}$.

Essendo questo caso perfettamente analogo a quello considerato nel n° 17 riteniamo inutile insistervi.

27. Sia $\delta' = x = o$, $p_c = 3$.

Allora $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_5$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di quartiche $| \lambda^4_{12...9} |$ ove sia $\lambda^2_{1,...8}$.

Al fascio di rette avente il centro nel punto 9 corrispondono $\infty^1$ cubiche piane di $\gamma_1$ appartenenti ad un fascio $(k_1)$. Proiettando nello spazio ordinario la $\gamma_1$ da una retta generica $o$ dell' ambiente si ha la $\gamma$, con un fascio $(k)$ di cubiche piane razionali aventi a comune il punto doppio il quale è proiezione del punto di $\gamma_1$ avente per immagine la $\lambda^2_{1...8}$. Tale punto è poi quadruplo per $\gamma$. La $V_3$ generata dagli $\infty^1$ piani delle cubiche di $k_1$, come si verifica ragionando come al n° 8, è d' ordine $3$, d' accordo con l' ipotesi $\mu = 3$.

28. Sia $\mu = 2$; segue dalla (4) $s = 1$, $(\pi)$ sempre conico, e detto $V$ il suo punto base esso (n° 4) o è semplice per $\gamma$ ma non base per $(k)$, o è triplo per $\gamma$ e base semplice per $(k)$, o quintuplo per $\gamma$ e base doppio per $(k)$.

Per $\mu = 2$ ed $s = 1$, la (3) diviene:

$$p_c = 6 - \delta' - 3\delta'' - x.$$

Esaminiamo ora i casi possibili perchè essa sia verificata.

29. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = o$, $x = 5$, $p_c = 1$.

Per questo caso ci riferiamo al n° 22 osservando che come centro di proiezione deve scegliersi un $S_3$ passante per una conica e non per la retta $d$ direttrice di $\varphi$.

30. Sia $\delta' = 1$, $\delta'' = o$, $x = 5$, $p_c = 1$.

Anche per questo caso ci riferiamo al n° 22, osservando solamente che detto $\sigma_1$ il piano di una conica di una cubica degenere di $(k_1)$, l' $S_3$ centro di proiezione, dovrà passare per una delle $\infty^1$ coniche passanti pel punto $M \equiv S_5 \sigma_1$.

31. Sia $\delta' = 2$, $\delta'' = o$, $x = 3$, $p_c = 1$.

Riferendoci sempre al n° 22, osserviamo che detti $\sigma_1$ e $\sigma_2$ i piani delle coniche delle due cubiche degeneri di $(k_1)$, l' $S_3$ centro di proiezione dovrà passare per l' unica conica passante pei punti: $M \equiv S_5 \sigma_1$ ed $N \equiv S_5 \sigma_2$.

32. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = 1$, $x = 2$, $p_c = 1$.

Ripetendo quanto al n° 22 è stato detto, osserviamo che l' $S_3$ centro di proiezione oltre che passare per la retta $d$, direttrice di $\varphi$, deve avere un altro punto (e quindi una retta) comune con lo spazio di una $c_1$ delle cubiche del fascio $(k_1)$.

33. Sia $\delta' = \delta'' = x = p_c = 1$.

Si procederà come al n° prec. ripetendo l' osservazione fatta al n° 23.

34. $\delta' = 2$, $\delta'' = 1$, $x = o$, $p_c = 1$.

Il presente caso (n° 24) si esclude.

35. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = o$, $x = 4$, $p_e = 2$.

Come al n° 28 si è osservato, il punto base $V$ di $(\pi)$ o è semplice per $\gamma$ ma non base per $(k)$, o è triplo per $\gamma$ e base per $(k)$.

Per il primo caso ci riferiamo al n° 25, $a$; osservando soltanto che essendo generico l' $S_4$ col quale sechiamo $\Phi$, la direttrice $d$ di $\varphi \equiv \Phi S_4$ non incontrerà i piani delle

coniche delle cubiche degeneri di $(k_1)$, onde è $\delta' = o$, e poichè il piano $\omega$, centro di proiezione, si conduce in modo perfettamente generico per $d$, esso non incontrerà ulteriormente gli spazi delle $k_1$, onde è pure $\delta'' = o$, e quindi $x = 4$.

Per il secondo caso, come nello stesso n° 25, $b$ è stato detto, basterà porre la condizione che i punti 2, 3, 4, 5, siano collineari.

36. Sia $\delta' = 1$, $\delta'' = o$, $x = 3$, $p_c = 2$.

Ci riferiamo al n° prec., ripetendo la osservazione fatta al n° 11.

37. Sia $\delta' = 2$, $\delta'' = o$, $x = 2$, $p_c = 2$.

Anche per questo caso ci riferiamo al n° 35, badando solo di secare $\Phi$, con un $S_4$ che sodisfi alla sola condizione di secare rispettivamente lungo una retta i piani $\sigma_1$ e $\sigma_2$ delle coniche di due delle cubiche degeneri di $(k_1)$.

38. Sia $\delta' = 3$, $\delta'' = o$, $x = 1$, $p_c = 2$.

Si ripetono ancora le considerazioni fatte al n° 35. Perchè poi risulti $\delta' = 3$, si consideri l' $S_5 \equiv \sigma_1 \sigma_2$ e sia $r_3 \equiv S_5 \sigma_3$. Secando $\Phi$ con un $S_4$, di quest' $S_5$, passante per $r_3$ si ha evidentemente $\delta' = 3$.

39. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = 1$, $x = 1$, $p_c = 2$.

Tenendo presente il n° 25; si vede che l'ipotesi $\delta'' = 1$ è solo compatibile con $\mu = 1$, onde il presente caso si esclude.

40. Sia $\delta' = 4$, $\delta'' = o$, $x = 0$, $p_c = 2$.

Si vede dalla rappresentazione piana che essendo $\mu = 2$, $p_c = 2$, l' ipotesi che si abbia simultaneamente $x = o$ e $\delta'' = o$ è inammissibile e quindi questo caso si esclude.

41. Sia $\delta' = 1$, $\delta'' = 1$, $x = o$, $p_c = 2$.

Basta considerare la $\gamma_1$ del n° 35 ove sia $\lambda^1_{123}$, $\lambda^1_{145}$, rette queste che sono immagini di due punti $V_1$ e $V_1'$ doppi per $\gamma_1$. Si scelga quindi per centro di proiezione un piano che incontri la retta $r_1 \equiv V_1 V_1'$ ed abbia un altro punto (e quindi una retta) comune con lo spazio di una cubica $c_1$ di $(k_1)$.

42. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = o$, $x = 3$, $p_c = 3$.

La $\gamma$ è allora proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_5$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di quartiche $| \lambda^4_{12....9} |$.

Ragionando come al n° 15 si prova cbe $\Phi$ è d' ordine due e precisamente un $S_1$-cono quadrico il cui vertice $s$ non appartiene a $\gamma_1$. Basta allora proiettare questa da una generica retta $o$ incidente $s$ per avere la $\gamma$ come si richiede.

Il punto base $V$ di $(\pi)$ risulterà semplice per $\gamma$ e non base per $(k)$; perchè poi risulti $V$ triplo per $\gamma$ e base per $(k)$, basta considerare la $\gamma_1$ di cui sopra ove sia $\lambda^1_{2345}$.

43. Sia $\delta' = 1$, $\delta'' = o$, $x = 2$, $p_e = 3$.

Si ripeta quanto è stato detto nel n° precedente e si tenga presente il n° 16.

44. Sia $\delta' = 2$ $\delta'' = o$, $x = 1$, $p_c = 3$.

Questo caso si esclude.

Facciamo infatti vedere che i piani $\sigma_1$ e $\sigma_2$ di due coniche (parti di cubiche $k_1$) non incontrano la retta $s$ in uno stesso punto. Se ciò si verificasse, $\sigma_1$ e $\sigma_2$ apparterrebbero ad uno stesso iperpiano. La sezione di $\gamma_1$ con quest' iperpiano sarebbe rappresentata da una $\lambda^4$ così spezzata $\lambda^1_{12}$ $\lambda^1_{13}$ $\lambda^2_{456789}$, il che è assurdo.

È poi evidente che se $o$ incontra $s$ ed ulteriormente qualche altro spazio delle $k_1$ risulterà $\delta'' > o$ contro l' ipotesi. Ricordando ancora che $\Phi$ è d' ordine $2$, e quindi $o$ non può appartenere ad essa perchè ne seguirebbe $\mu < 2$, concludiamo che la superficie $\gamma$ non

può ottenersi come proiezione di una superficie $\gamma_1$ dell' $S_5$ con un fascio $(k_1)$ di cubiche gobbe. Se poi i punti 1 .... 8 del sistema appartengono ad una conica, le $k_1$ sono piane epperò (n° 27) è $x = o$ contro l' ipotesi. Nessun' altra condizione a cui si sottopongano i punti fondamentali è tale che da essa possa dedursi che le $k_1$ sono piane, onde il caso in questione si esclude.

45. Sia $\delta' = 3$, $\delta'' = o$, $x = o$, $p_c = 3$.

Anche questo caso si esclude.

Considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n° prec. ci inducono alla conclusione che la $\gamma$ non può ottenersi come proiezione di una superficie $\gamma_1$ dall' $S_5$ con un fascio $(k_1)$ di cubiche gobbe.

Se infine facciamo l' ipotesi che otto punti fondamentali appartengano ad una conica, la rappresentazione ci mostra che nessuna delle 8 coniche (parti di cubiche $k_1$ ) si riduce ad una retta doppia, onde si conclude che il presente caso è da escludere.

46. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = 1$, $x = o$, $p_c = 3$.

Riferendoci al n° 27 osserviamo solamente che la retta $o$, centro di proiezione, deve scegliersi in modo che incontri in un punto il piano di una cubica di $(k_1)$.

47. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = o$, $x = 2$, $p_c = 4$.

Allora $\gamma$ è, per esempio, proiezione della superficie $\gamma_1$ dell' $S_4$ rappresentata nel piano dal sistema lineare di quintiche $\left| \lambda^5_{1^2 2^2 3 \dots 12} \right|$, ove i punti $1, 2^2, 3, \dots, 12$ sono base di un fascio $(k')$ di quartiche. (*) Il presente caso è perfettamente analogo a quello considerato nel n° 18, quindi ci limitiamo a notare che perchè $V$ sia triplo per $\gamma$ e base (semplice) per $(k)$, basta considerare la $\gamma_1$ di cui sopra ove sia $\lambda^1_{2345}$ ed inoltre i punti 1,2,6,7....12 siano base di un fascio $(k')$ di cubiche.

48. Sia $\delta' = 1$, $\delta'' = o$, $x = 1$, $p_c = 4$.

Nell' $S_4$ si consideri la $\gamma_1$ ulteriore intersezione di una ipersuperficie $\Sigma$ d'ordine 4 dotata di piano semplice $\omega$ retta tripla e retta doppia $d$ a questa incidente, con un $S_0$-cono quadrico passante per $\omega$ e per $d$ (e col vertice non appartenente alla retta tripla). Proiettando genericamente $\gamma_1$ si ottiene una superficie $\gamma$ come si richiede.

49. $\delta' = 2$, $\delta'' = o$, $x = o$, $p_c = 4$.

Allora $\gamma$ è proiezione della $\gamma_1$ del n° 46 ove sia $\lambda^2_{234\dots,10}$ ed inoltre i punti 1, 2, 11, 12, siano base di un fascio $k'$ di coniche. Le $k_1$ sono ancora piane appartenendo una generica di esse ad $\infty^1 S_3$. La $\lambda^2_{2\dots10}$ rappresenta un punto quintuplo per $\gamma_1$ e base doppio per $(k_1)$. Infine le 2 coniche rappresentate da $\lambda^1_{111}$ e $\lambda^1_{112}$ si riducono a rette doppie perchè comuni ad $\infty^2 S_3$, sicchè $\delta' = 2$.

50. Sia $\delta' = 1$, $\delta'' = o$, $x = o$, $p_c = 5$.

Si ottiene una siffatta superficie se nel n° 5 si pone $\mu = 2$, $s = \nu = p = 1$, supponendo inoltre che le $\gamma$ siano superficie cubiche generali dotate di un punto doppio comune, punto che sia base per $(\pi)$; ed infine che una di esse (superficie) ammetta una retta doppia $d$ per la quale passi il piano corrispondente di $(\pi)$.

51. Sia $\delta' = o$, $\delta'' = o$, $x = 1$, $p_c = 5$.

---

(*) Osserviamo che i punti fondamentali del sistema non possono essere generici, perchè se così fossero le cubiche di $(k_1)$ sarebbero gobbe e i loro spazi apparterebbero ad un fascio onde $\mu = 1$.

Per il presente caso basta ripetere la costruzione del n° 48 sopprimendo la retta doppia *d*.

52. Sia $\delta' = \delta'' = x = o$, $p_c = 6$.

Una superficie siffatta è stata ottenuta al n° 6.

53. Indicando con

$$(\mu, p_i, s, \delta', \delta''. x), \qquad (\mu, p_i, s, \delta', \delta'', x)_1, \qquad (\mu, p_i, s, \delta', \delta'' x)'$$

la superficie $\gamma$ secondo che $\pi$ è gobbo, ovvero $(\pi)$ inviluppa un cono il cui vertice non è punto base di $(k)$, o infine $(k)$ ha un (solo) punto base, possiamo concludere che: le superficie dell' $S_3$, d'ordine $n = 6$ o $n = 7$ con un fascio di cubiche piane razionali i cui piani non costituiscono un fascio sono;

per $n = 6$:

$(3,0,1,0,0,0)'$; $(2,0,1,0,0,3)'$; $(2,0,1,1,0,2)'$; $(2,0,1,0,1,0)'$; $(2,0,1,0,0,2)_1$; $(2,0,1,0,0,2)'$; $(2,0,1,1,0,1)_1$; $(2,0,1,1,0,1)'$; $(2,0,1,2,0,0)'$; $(2,0,1,0,0,1)_1$; $(2,0,1,1,0,0)'$; $(2,0,1,0,0,0)'$.

per $n = 7$:

$(3,0,1,0,0,2)'$; $(3,0,1,1,0,1)'$; $(3,0,1,1,0,0)'$; $(3,0,1,0,0,0)'$; $(2,0,1,0,0,5)'$; $(2,0,1,1,0,4)'$; $(2,0,1,2,0,3)'$; $(2,0,1,0,1,2)'$; $(2,0,1,1,1,1)'$; $(2,0,1,0,0,4)_1$; $(2,0,1,0,0,4)'$; $(2,0,1,1,0,3)_1$; $(2,0,1,1,0,3)'$; $(2,0,1,2,0,2)_1$; $(2,0,1,2,0,2)'$; $(2,0,1,3,0,1)_1$; $(2,0,1,3,0,1)'$; $(2,0,1,1,1,0)'$; $(2,0,1,0,0,3)_1$; $(2,0,1,0,0,3)'$; $(2,0,1,1,0,2)_1$; $(2,0,1,1,0,2)'$; $(2,0,1,0,1,0)'$; $(2,0,1,0,0,2)_1$; $(2,0,1,0,0,2)'$; $(2,0,1,1,0,1)_1$; $(2,0,1,2,0,0)'$; $(2,0,1,1,0,0)'$; $(2,0,1,0,0,1)_1$; $(2,0,1,0,0,0)'$.

*Catania, luglio 1917.*

# Delle congruenze di rette generate da infinite coniche-inviluppo

## Memoria di GELSOMINA GRIMALDI

## RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI
PROFF. C. SEVERINI E G. SCORZA (*Relatore*).

In questo lavoro la Dott.$^{\text{a}}$ G. GRIMALDI considera una superficie con un fascio di coniche e studia la congruenza generata dalle tangenti alle coniche del fascio.

Dopo alcune osservazioni di indole generale, riflettenti in ispecie la superficie focale della congruenza, l' Autrice enumera i vari tipi che questa può presentare sotto opportune ipotesi particolari.

Il lavoro, condotto con cura, è riuscito un interessante contributo allo studio delle congruenze contenenti le tangenti di $\infty^1$ coniche inviluppo e quindi è pienamente meritevole di essere accolto negli Atti Accademici.

---

E certamente interessante lo studio delle congruenze di rette generate da $\infty^1$ coni quadrici.

Ne ho quindi intrapreso lo studio dal punto di vista duale, cioè delle congruenze generate da $\infty^1$ coniche inviluppo. Le coniche $k$ inviluppate da queste generano una superficie $\gamma$ dotata di $\varepsilon \geq 0$ rette ognuna semplice per $\gamma$ e contata due volte conica $k$.

Dopo lo studio dei caratteri generali, riferentisi alla superficie focale della congruenza, mi sono in particolare occupata delle congruenze di classe $q = 1$, $q = 2$ (*), e di quelle razionali (**) di classe $q = 4$ con $\varepsilon = 0$.

## § 1.

1. Sia $\gamma$ una superficie algebrica, irriducibile d' ordine $n$ dotata di un fascio $(k)$ di coniche generalmente irriducibili. [1])

(*) Le congruenze d' ordine 2, generate da $\infty^1$ coni quadrici, sono note da tempo; cfr. D. MONTESANO, *Su una congruenza di rette di 2° ordine e di 4ª classe* [Atti della R. Accademia di Torino, vol. XXVII (1892)], *Su due congruenze di rette di 2° ordine e di 6ª classe* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. I (1892)],

(**) Per $q = 1$ e $q = 2$ la congruenza è sempre razionale.

[1]) É noto che ogni sistema irriducibile $\infty^1$ di coniche di $\gamma$, per $n > 4$, è un fascio, Cfr. G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* [Annali di Matematica, serie III, vol. VI (1901), pp. 165-225], n° 17; e M. DE FRANCHIS, *Le superficie irrazionali di 5° ordine con infinite coniche.* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XV, 2° semestre 1906, pp. 284-286], n. 1.

Sia $(\pi)$ l' inviluppo costituito dai piani di $(k)$, $p_\pi$, e $\mu$ rispettivamente il genere e la classe di $(\pi)$, $s$ il numero delle coniche di $(k)$ esistenti in un piano generico di $(\pi)$, $p_i$ il genere di $(k)$, e, infine, $p_c$ il genere della sezione piana di $\gamma$.

È nota la relazione [2]:

$$1)\qquad 2n = 2\mu s + \delta + 2\delta'$$

ove

$$2)\qquad \delta = 2(p_c + 1) - 4p_i$$

è il numero dei punti doppi dell' involuzione secata dalle coniche di $(k)$ sopra una sezione piana generica $c$ di $\gamma$; e $\delta'$ è il numero di quei punti di $C$, su ognuno dei quali cadono (su due rami) due punti coniugati della detta involuzione.

2. Le tangenti alle coniche del fascio $(k)$ generano una congruenza $\Gamma$; questa è d'ordine

$$3)\qquad \nu = 2\,\mu s.$$

Infatti detto $P$ un punto generico dello spazio per questo passano $\mu$ piani di $(\pi)$ e quindi $2\mu s$ tangenti alle coniche di $(k)$ poste in essi.

Osserviamo che vi è un caso eccezionale in cui la 3) non è verificata. Esso si ha quando $(\pi)$ è gobbo e della 3ª classe e $\gamma$ coincide con la sviluppabile (di quarto ordine) da esso generata.

Infatti consideriamo la congruenza $\Gamma$ generata dalla retta comune a due piani di un inviluppo $(\pi)$ gobbo e di classe $\mu = 3$. La duale di $\Gamma$ è una congruenza $\Gamma_1$ costituita dalle corde di una cubica gobba $l$.

Siccome ognuna di queste corde è generatrice comune a due degli $\infty^1$ coni quadriche da un punto di $l$ proiettano la $l$ stessa, si ha che ogni retta di $\Gamma$ appartiene a due degli inviluppi di seconda classe che sono sezioni di $(\pi)$ con un piano di questo stesso inviluppo.

Evidentemente la congruenza $\Gamma_1$ è di classe $3$.

Dualmente si ha che $\Gamma$ è del 3° ordine, e precisamente per un punto generico $O$ dello spazio passano tre piani di $(\pi)$ e le $2\mu s = 2.3.1 = 6$ tangenti condotte da $O$ alle tre coniche giacenti nei detti piani si riducono alle tre rette secondo cui questi si intersecano, perchè ognuna delle dette rette è comune a due delle $\infty^1$ coniche-inviluppo di $\Gamma$.

Resta, ora, a dimostrare che la $\Gamma$ è unica, cioè che ogni congruenza, con $\infty^1$ coniche-inviluppo, tale che ciascun suo raggio appartenga a due di queste è la $\Gamma$ detta sopra.

Infatti sia $\Gamma_1$ una congruenza generata da $\infty^1$ coni quadrici, e tale che ogni sua retta sia generatrice comune a due coni quadrici.

Vediamo qual' è l' ordine della curva $\lambda$, luogo dei vertici di questi. Siccome ogni retta deve appartenere a due coni, essa sarà una corda di $\lambda$, la quale è una cubica gobba perchè è proiettata da ogni suo punto secondo un cono quadrico.

Si ritrova così la congruenza $\Gamma_1$ della quale è duale la $\Gamma$.

3. La classe della congruenza $\Gamma$ è data dalla formula $q = \delta - \varepsilon$, ove $\varepsilon$ è il numero delle

[2] G. MARLETTA — *Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle d' ordine 5* [Atti dell' Accademia Gioenia, serie 5ª, vol. VIII (1915)], n° 2.

rette semplici per $\gamma$, tali che ciascuna di esse contata due volte, dia una conica di $(k)$. E invero il numero delle rette di $\Gamma$ poste in un piano generico $\omega$ è dato dalle coniche di $(k)$ tangenti questo piano onde è $\delta$ il numero di tali rette. Però è da notare che le rette del piano di ognuna delle $\varepsilon$ coniche degeneri sono tangenti di dette coniche, ma non appartengono a $\Gamma$, se continuamo a indicare con $\Gamma$ la congruenza che rimane tolti gli $\varepsilon$ piani rigati delle dette $\varepsilon$ coniche degeneri.

Da quanto s' è detto segue che le rette di $\Gamma$ che appartengono ad $\omega$, sono $\delta-\varepsilon$.

Per il caso di eccezione, citato nel n° 2, anche la classe di $\Gamma$ non è data da $q=\delta-\varepsilon$, ma da $q=\frac{1}{2}(\delta-\varepsilon)$, ed essendo $\varepsilon=0$ si ha $q=\frac{1}{2}\delta$.

Riassumendo:

*Escluso il caso che $\gamma$ sia la rigata sviluppabile di quarto ordine, l' ordine $\nu$ della congruenza è dato da $\nu=2\mu s$, e la classe è data da $q=\delta-\varepsilon$.*

Dalla 1) e dalla [3]):

$$4)\qquad \mu<\frac{3_{n+1}}{4s}-\frac{\delta'}{s}-\frac{\varepsilon}{2s}$$

si deduce

$$5)\qquad \delta>\frac{n-1}{2}+\varepsilon$$

per modo che, escluso il solito caso, si ha

$$6)\qquad q>\frac{n-1}{2}.$$

4. Si noti che le rette di $\Gamma$ sono in corrispondenza algebrica biunivoca coi punti di $\gamma$.

Infatti preso un punto $A$ della superficie $\gamma$, per questo passa una conica del fascio $(k)$ che ammette ivi una tangente, quindi ad $A$ si può far corrispondere una retta di $\Gamma$. Viceversa data una retta $f$ di $\Gamma$, essa è tangente ad una certa conica di $(k)$ e in un punto che appartiene a $\gamma$.

Segue da ciò che $\gamma$ è o no razionale secondo che è o no $p_i=0$.

Questo ragionamento non può essere applicato al caso eccezionale di cui nei n^i^ precedenti, ma anche in questo caso $\Gamma$ e $\gamma$ sono entrambe razionali. La prima perchè le sue rette possono mettersi in corrispondenza biunivoca coi piani di una stella; la seconda perchè è la sviluppabile di quarto ordine.

5. Cerchiamo l' ordine $m$ della superficie focale della congruenza $\Gamma$. A tal fine consideriamo le rette di questa che tagliano una retta generica $t$ dello spazio. Dette rette costituiscono (com' è noto) una rigata $\sigma$, d' ordine $\nu+\delta$, di cui la $t$ è direttrice $\nu$-pla.

Gli $\infty^1$ gruppi, ciascuno di $\nu$ rette passanti per uno stesso punto di $t$, costituiscono una $g^1_\nu$.

Si sa che un punto generico $P$ di $t$ è un fuoco, quando delle $\nu$ rette di $\Gamma$ passanti per esso due coincidono; ne segue che per trovare $m$ basta calcolare il numero delle rette doppie della $g^1_\nu$. Si ha quindi

$$7)\qquad m=2\,(2\mu s+p-1)$$

[3]) G. MARLETTA — *Delle superficie con infinite coniche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XL (1915)], n° 8.

indicando con $p$ il genere di $\sigma$.

Per calcolare $p$ consideriamo la $I_l^2$ costituita dalle coppie di rette tangenti a una stessa conica di $(k)$ e passanti per uno stesso punto $P$ di $t$.

Il genere di questa involuzione è evidentemente $p_i$, e il numero $\delta_1$ delle rette doppie è dato dalla formula

$$\delta_1 = 2\,(p + 1) - 4p_i$$

Osserviamo adesso che quando due rette della $I_l^2$ sono infinitamente vicine il punto $P$ cade sulla conica a cui quelle rette sono tangenti, se essa non è degenere. Ne segue che tutti i punti delle coniche di $(k)$ sono fuochi quindi la superficie $\gamma$ è parte della superficie focale.

Se la conica è degenere in due rette distinte, ogni punto del suo piano è un fuoco, ma tali coniche [4]) sono in numero di

$$3n - 4\mu s - 4\,\delta' - 2\,\varepsilon$$

onde altrettanti sono i piani di $(\pi)$ che fanno parte della superficie focale. Si conclude che è

$$\delta_1 = (n + 3n - 4\,\mu s - 4\,\delta' - 2\,\varepsilon),$$

Sostituendo questo valore di $\delta_1$ nella precedente formula si ha

$$n + (3n - 4\,\mu s - 4\delta' - 2\,\varepsilon) = 2\,(p + 1) - 4p_i$$

cioè

$$2\,(n - \mu s - \delta') - \varepsilon = p + 1 - 2p_i$$

da cui

$$p = 2\,(n - \mu s - \delta' + p_i) - 1.$$

Dalla 7) si ha che l' *ordine della superficie focale della congruenza* $\Gamma$ *è*

$$m = 4\,(n - \delta' + p_i - 1) - 2\,\varepsilon.$$

La superficie focale, come vedremo, non è irriducibile.

6. Precedentemente abbiamo detto che un punto $P$ di $t$ è un fuoco quando due delle tangenti sono infinitamente vicine.

Dobbiamo distinguere due ipotesi secondo che due siffatte rette sono tangenti a una stessa conica ovvero a due coniche di $(k)$.

Considerando la prima ipotesi abbiamo che quando le due tangenti sono infinitamente vicine, e la conica è irriducibile, il punto $P$ ad esse comune, cade su questa conica. Segue da ciò che, come s'è già detto, la superficie $\gamma$ è parte della superficie focale.

Se la conica considerata è degenere il suo piano evidentemente appartiene alla superficie focale, onde (n° 3) abbiamo

$$3n - 4\mu s - 4\,\delta' - 2\,\varepsilon$$

piani che appartengono alla superficie focale.

---

[4]) Cfr. Marletta, l. c. in [3]), n° 19.

Passiamo, ora, a considerare la seconda ipotesi, cioè che le due rette di $\Gamma$, dette in principio di questo numero, siano tangenti a due differenti coniche di $(k)$.

Dobbiamo esaminare due casi secondo che le due coniche in discorso appartengono ad uno ovvero a due diversi piani di $(\pi)$.

Per lo studio del primo caso occorre la considerazione della $I_s^1$ costituita degli $\infty^1$ gruppi, ciascuno di $s$ coniche, esistenti in uno stesso piano di $(\pi)$. Il genere di detta involuzione è $p_\pi$ e il numero dei suoi elementi doppi è quindi dato dalla formula

$$\delta_2 = 2\,(p_i - 1) - 2s\,(p_\pi - 1).$$

Ogni piano contenente un elemento doppio della $I_s^1$ appartiene alla superficie focale, anzi è da contarsi 2 volte, perchè per ogni punto di esso passano quattro rette della congruenza formanti due coppie ognuna costituita da due rette infinitamente vicine. Dunque esistono

$$2\,[\,2(p_i - 1) - 2s\,(p_\pi - 1)\,]$$

piani [5]) appartenenti alla superficie focale.

Infine esaminiamo il secondo caso.

La sviluppabile $\rho$ generata dalle rette di contatto dell' inviluppo $(\pi)$, è evidentemente di ordine

$$\nu = 2\,(\mu + p_\pi - 1).$$

Ogni punto della rigata $\rho$ è un fuoco, anzi va contato $2s$ volte, perchè appartiene a due piani infinitamente vicini di $(\pi)$ e perciò per esso passano $4s$ rette di $\Gamma$ divise in $2s$ coppie, ognuna costituita da due rette infinitamente vicine. Concludiamo che $\rho$, contata $2s$ volte, appartiene alla superficie focale, onde l' ultima parte di cui si compone detta superficie è d' ordine

$$2s\,[\,2\,(\mu + p_\pi - 1)\,].$$

Come verifica si può osservare che si ha identicamente

$$4\,(n - \delta' + p_i - 1) - 2\,\varepsilon = n + (3n - 4\mu s - 4\,\delta' - 2\,\varepsilon) +$$
$$+ 2\,[\,2\,(p_i - 1) - 2\,s\,(p_\pi - 1)\,] + 2s\,[\,2\,(\mu + p_\pi - 1)\,].$$

7. Osserviamo che quando l' inviluppo $(\pi)$ è conico il suo punto base $V$ è un *punto singolare* per $\Gamma$. Il cono relativo a detto punto è d' ordine $\delta - \varepsilon$ in tutti i tre casi cui può dar luogo la posizione del punto $V$.

Conduciamo infatti per $V$ un piano generico $\tau$, ad esso appartengono $\delta - \varepsilon$ rette della congruenza tutte passanti per $V$; e, invero, se una di esse, $t$ per es., non passasse per $V$, il piano della conica a cui essa è tangente dovendo contenere $t$ e $V$ coinciderebbe con $\tau$ contro la supposta genericità di $\tau$.

Si può concludere dunque che il cono relativo a $V$ è d'ordine $\delta - \varepsilon$, cioè $V$ è un punto singolare di grado $\delta - \varepsilon$.

Quando $(\pi)$ è un fascio, ogni punto della retta $r$ asse di $(\pi)$ è un punto singolare di grado $\delta - \varepsilon$ per la congruenza. Si conclude che la retta $r$ è singolare di grado $\delta - \varepsilon$; la

---

[5]) Questi formano dunque $2\,(p_i - 1) - 2s\,(p_\pi - 1)$ coppie di piani coincidenti.

multiplicità di $r$ per il cono relativo a ciascuno dei suoi punti è $\delta - 2s - \varepsilon$ nel caso che le coniche di $(k)$ non siano tangenti ad $r$.

Notiamo, infine, che i punti delle coniche (degeneri) ognuna costituite da due rette distinte sono punti singolari di grado due per la congruenza, perchè le rette di questa passanti per ognuno di essi costituiscono, (a prescindere da un certo numero finito) un fascio da contare due volte.

§ 2.

8. Osserviamo che per $\varepsilon = 0$ $q$ è necessariamente pari. Ciò posto ci proponiamo di classificare le congruenze razionali nell' ipotesi $q = 1$, $q = 2$ con $\varepsilon \geq 0$, e per $\varepsilon = 0$ quelle di classe $q = 4$, giacchè, come a momenti abbiamo osservato, l' ipotesi $q = 3$. per $\varepsilon = 0$, è da escludere [6]).

9. Sia $q = 1$.

Escluso il solito caso di eccezione di cui nei numeri 2 e 3, la 6) dà $n = 2$.

Poi da $q = 1$ segue $\delta = 1 + \varepsilon$. Ma $\delta$ è necessariamente pari, dunque $\varepsilon \geq 1$ e $\delta \geq 2$.

Segue per la 1)

$$\mu = s = 1,\ \delta' = 0,\ \delta = 2,\ \varepsilon = 1.$$

La superficie $\gamma$ è cono quadrico. Un fascio di piani avente per asse una tangente generica $t$ del cono, seca $\gamma$ in un fascio di coniche.

Il piano individuato dalla $t$ e dalla genatrice del cono passante per il punto di contatto di $t$ seca $\gamma$ lungo la detta generatrice che contata due volte è conica di $(k)$.

Le tangenti alle coniche di questo generano una congruenza di classe $q = 1$ e d' ordine $\nu = 2$ [7])

Si osservi che il fascio $(k)$ ha due punti base infinitamente vicini.

10. Sia $q = 2$. Allora siamo certamente fuori del caso di eccezione e la 4) dà $n \leq 4$.

Sia $n = 2$. La 1) posto $\delta = q + \varepsilon = 2 + \varepsilon$ diventa

$$4 = 2\mu s + \varepsilon + 2\delta' + 2$$

dunque

$$\mu = s = 1,\ \varepsilon = \delta' = 0.$$

La superficie $\gamma$ è una quadrica. Un fascio di piani avente per asse una retta generica dello spazio, seca $\gamma$ in un fascio di coniche, le cui tangenti costituiscono una congruenza di classe $q = 2$ e d' ordine $\nu = 2$.

Se la quadrica è un cono bisogna che l' asse del fascio di piani contenenti le coniche non sia una tangente del cono. Il fascio $(k)$ ha due punti base distinti.

11. Sia $n = 3$.

La 1) dà

$$6 = 2\mu s + \varepsilon + 2\delta' + 2$$

---

[6]) Non ci occupiamo dell'ipotesi $\varepsilon > 0$ o con $q = 3$ ovvero $q = 4$ per ragioni di brevità; infatti nel primo di questi due casi si presentano ben 26 congruenze da esaminare.

[7]) La duale di questa congruenza è quella generata dalle generatrici di un fascio di coni quadrici non aventi lo stesso vertice.

è d' altronde, necessariamente, $s = 1$, dunque

I) $\mu = 2$, $\varepsilon = \delta' = 0$; oppure
II) $\mu = 1$, $\varepsilon = 2$, $\delta' = 0$; oppure
III) $\mu = 1$, $\varepsilon = 0$, $\delta' = 1$.

Nel caso I) la superficie $\gamma$ è rigata, onde essa è proiezione della rigata cubica normale $\gamma_1$. Consideriamo un fascio di coniche $(k_1)$ di $\gamma_1$ avente per immagine nel piano rappresentativo un fascio di rette $|\lambda^1_A|$, ove $A$ è un punto generico.

I piani delle coniche di $(k_1)$ generano un $S_0$-cono quadrico. Proiettando $\gamma_1$, da un punto generico, in uno spazio ordinario otteniamo la superficie $\gamma$ richiesta.

I piani delle coniche del fascio $(k)$, proiezione di $(k_1)$ inviluppano un cono quadrico e il vertice $V$ di questo è semplice per $\gamma$ e punto base per $(k)$.

Le tangenti alle coniche del fascio $(k)$ generano una congruenza $\Gamma$ d' ordine $\nu = 4$ e di classe $q = 2$.

Nel caso II) la superficie $\gamma$ che è del terzo ordine non può essere rigata. D' altro canto è noto (per un' esservazione del Klein) che se due delle $27$ rette di una superficie cubica non rigata sono infinitamente vicine e complanari, la superficie ha sulla retta con la quale vengono a coincidere due punti doppi (generalmente distinti), quindi si vede che per realizzare l' alternativa II) nel modo più generale bisogna prendere per $\gamma$ una superficie con quattro punti doppi. Per questa superficie i lati del tetraedro avente per vertici i punti doppi assorbono in tutto $24$ delle sue rette. Ne restano altre tre situate in un piano, e delle quali ognuna si appoggia a una coppia di lati opposti del tetraedro.

Tagliando questa superficie col fascio di piani avente per asse una di queste ultime rette resta realizzato il caso in discorso.

Le tangenti alle coniche del fascio $(k)$ esistente in $\gamma$, formano una congruenza $\Gamma$ d'ordine $\nu = 2$ e classe $q = 2$.

In questo caso $(k)$ ha due punti base.

Resta a discudere l' alternativa III). Qui la superficie $\gamma$ è una rigata cubica. Consideriamo il fascio di piani avente per sostegno una generatrice generica della superficie, esso seca questa ulteriormente in un fascio di coniche $(k)$.

La direttrice doppia di $\gamma$ è, contata due volte, conica di $(k)$.

Le tangenti alle coniche del fascio $(k)$ costituiscono una congruenza d' ordine $\nu = 2$ e di classe $\delta = 2$.

12. Sia $n = 4$. Allora la 1) dà

$$6 = 2\mu s + \delta + 2\delta'$$

ed è $s \leq 2$, quindi sono possibili le alternative

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I) | $\mu = 3$ | $s = 1$ | $\delta' = \varepsilon = 0$; | |
| II) | $\mu = 2$ | $s = 1$ | $\delta' = 0$ | $\varepsilon = 2$; |
| III) | $\mu = 2$ | $s = 1$ | $\delta' = 1$ | $\varepsilon = 0$; |
| IV) | $\mu = 1$ | $s = 2$ | $\delta' = 0$ | $\varepsilon = 2$; |
| V) | $\mu = 1$ | $s = 2$ | $\delta' = 1$ | $\varepsilon = 0$; |
| VI) | $\mu = s = 1$ | | $\delta' = 0$ | $\varepsilon = 4$; |
| VII) | $\mu = s = 1$ | | $\delta' = 1$ | $\varepsilon = 2$; |
| VIII) | $\mu = s = 1$ | | $\delta' = 2$ | $\varepsilon = 0$. |

Il caso I) può realizzarsi con ($\pi$) gobbo o conico.

*a*) Se ($\pi$) è gobbo la superficie $\gamma$ è rigata.

Consideriamo la superficie $\gamma_1$ dell' $S_5$ rappresentata nel pianò dal sistema lineare $|\lambda^3 1^2 2|$.

Questa possiede un fascio di coniche ($k_1$), rappresentato da $|\lambda_1^2|$, i cui piani costituiscono una varietà del 3° ordine. Proiettando $\gamma_1$ da una retta generica $t$ dell' $S_5$, otteniamo la superficie $\gamma$ richiesta.

I piani delle coniche del fascio ($k$), proiezione di ($k_1$) costituiscono un inviluppo ($\pi$) gobbo e di classe $\mu = 3$.

Che ($\pi$) sia gobbo si dimostra osservando che se fosse conico il suo punto-base $V$ lo sarebbe anche per ($k$); e il piano $t\ V$ dovrebbe contenere o una curva incontrata di tutte le coniche di ($k_1$), ovvero un punto comune a tutte queste coniche.

Nella prima ipotesi la retta $t$ avrebbe un certo numero di punti comuni con la superficie $\gamma_1$ ma ciò è assurdo perchè la retta centro di proiezione è generica e quindi non incontra $\gamma_1$.

La seconda ipotesi si esclude osservando la rappresentazione piana.

*b*) Se ($\pi$) è conico $\gamma$ è una superficie di STEINER. Consideriamo la superficie di VERONESE e su di essa un fascio di coniche ($k_1$) avente per immagine, nel piano rappresentativo, un fascio di rette $|\lambda_A^1|$.

La varietà dei piani delle coniche di ($k_1$) è del terzo ordine. Proiettando da una retta generica si ottiene, com' è noto, la superficie di STEINER.

I piani delle coniche del fascio ($k$), proiezione di ($k_1$), costituiscono un inviluppo conico di classe $\mu = 3$.

Sia in *a*) che in *b*), la congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 6$ e di classe $\delta = 2$.

Nel caso II), essendo $\delta = q + \varepsilon = 4$ e $p_i = 0$ (dato che è $\mu = 2$ ed $s = 1$), si trae $p_c = 1$; dunque $\gamma$ è proiezione di una superficie $\gamma_1$ di SEGRE, dell' $S_4$, sulla quale uno dei dieci fasci di coniche, che essa contiene, possiede due coniche ridotte ciascuna a una retta contata due volte.

Cosicchè per realizzare $\gamma_1$ (e poi $\gamma$) basta considerare nell'$S_4$ una schiera di piani diun $S_0$-cono quadrico e tagliarla con una iperquadrica che tocchi due dei suoi piani lungo rette.

Il caso III) può realizzarsi in due modi *a*) Consideriamo la superficie $\gamma_1$ di VERONESE e un fascio ($k_1$) di coniche su di essa. I piani delle coniche di ($k_1$) costituiscono una $V_3^3$; ne segue che proiettando $\gamma_1$ da una generica retta $t$ incidente uno (solo) dei piani della detta varietà si ottiene la richiesta superficie $\gamma$.

La traccia, nello spazio di $\gamma$, dell' $S_3$ individuato da $t$ e dall' accennato piano è una retta doppia per $\gamma$ e, contata due volte, conica di ($k$); si noti che questo fascio ha un punto-base.

La congruenza generata dalle tangenti alle coniche del fascio ($k$) è d' ordine $\nu = 4$ e di classe $q = 2$.

*b*) Si consideri la rigata razionale normale $\gamma_1$ di $S_5$ con $\infty^1$ coniche direttrici, proiettandola da una retta appoggiata in un punto alla $V_3^3$ dei piani di quelle coniche resta determinata la superficie $\gamma$.

Il caso IV) si verifica con una superficie $\gamma$ del 4° ordine a conica doppia $c$ e dotata di due punti doppi staccati infinitamente vicini.

Secando $\gamma$ con il fascio ($\pi$) di piani avente per asse la congiungente i detti punti doppi, ognuno di questi piani secherà $\gamma$ in due coniche.

Supponendo, com' è sempre possibile [8]), che le congiungenti i detti punti doppi con i punti di contatto dei due piani di $(\pi)$ tangenti $c$ coincidano ciascuna con una delle due coniche sezioni di questi piani con $\gamma$, resta realizzata l' alternativa in esame.

Le due congiungenti di cui sopra, sono rette semplici per $\gamma$ e, contate due volte, coniche di $(k)$.

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 4$ e di classe $q = 2$.

Per realizzare il caso $V$) basta tagliare una superficie $\gamma$ di Steiner col fascio di piani determinato da due dei suoi 4 piani tangenti doppi. A tal fine si consideri la superficie di Veronese $\gamma_1$; la $V_3^3$ costituita dai piani di un fascio $(k_1)$ di coniche di $\gamma_1$, è conica ed ha un piano direttore (il piano tangente alla superficie di Veronese nel vertice della $V_3^3$); quindi basta proiettare $\gamma_1$ da una retta appoggiata al piano direttore.

Allora la retta si appoggia anche ad un piano generatore (e quindi $\delta'=1$) e da essa la $V_3^3$ risulta proiettata in un fascio di piani doppio (e quindi $\mu = 1$, $s = 2$). Il fascio $(k)$ ha due punti-base.

Le tangenti alle coniche del fascio $(k)$ esistente in $\gamma$ generano una congruenza d' ordine $\nu = 4$ e classe $q = 2$.

Il caso VI), che corrisponde a $\mu = s = 1$, $\varepsilon = 4$, $\delta' = o$, si realizza con una superficie $\gamma$ del quarto ordine con retta doppia e il massimo numero, cioè 8, di punti doppi; questi sono divisi in quattro coppie, ognuna complanare con la retta doppia.

La congiungente i due punti di una qualunque coppia è retta semplice per $\gamma$, e, contata due volte è conica del fascio $(k)$.

Le tangenti alle coniche di detto fascio costituiscono una congruenza $\Gamma$ d' ordine $\nu = 2$ e classe $q = 2$.

L' alternativa VII) resta realizzata proiettando la superficie $\gamma_1$ di cui nel caso II), da un punto appartenente ad un piano dell' $S_0$-cono. La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 2$ e classe $q = 2$.

Resta a discutere il caso VIII). Qui essendo $p_c = 0$, *a*) $\gamma$ è la rigata del quarto ordine di *5ª specie* di Cremona, di *2ª specie* di Cayley.

Le sue direttrici doppie $d_1$ e $d_2$ sono sghembe; considerando un fascio di piani avente per asse la genatrice doppia $g$ della superficie, otteniamo un fascio $(k)$ di coniche.

Le sezioni di $\gamma$ con i piani $d_1 g$ e $d_2 g$ sono le rette $d_1$ e $d_2$ che, contate due volte, sono coniche di $(k)$.

*b*) $\gamma$ è la superficie di Steiner. I piani passanti per una delle tre rette doppie di essa la secano in un fascio di coniche passanti per il punto triplo di $\gamma$. Le altre due rette doppie della superficie, contate due volte, sono coniche di $(k)$.

Sia in *a*) che in *b*) la congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 2$ e di classe $q = 2$.

## § 3.

13. Sia $q = 4$ ed $\varepsilon = 0$. Siccome (nº 8) vogliamo assegnare le congruenze razionali ammetteremo una volta per tutte $p_i = 0$.

La 6) dà $n \leq 8$.

[8]) Infatti basta considerare la superficie intersezione di due iperquadriche, dell'$S_4$, in posizione conveniente.

Escludendo il valore $n = 2$ che non verifica la 1) si può passare a considerare il caso di $n = 3$.

Per $n = 3$ la 1) posto $\delta = q = 4$ diventa

$$6 = 2\,\mu s + 4 + 2\delta'$$

dunque $\mu = s = 1$, $\delta' = 0$.

La superficie $\gamma$ è cubica. Considerando gli $\infty^1$ piani passanti per una generica retta della superficie otteniamo un fascio $(k)$ di coniche, le cui tangenti formano una congruenza $\Gamma$ di classe $q = 4$ e d'ordine $\nu = 2$.

Si osservi che $(k)$ può avere *1*, *2*, ovvero nessun punto-base.

14. Sia $n = 4$.

La 1) dà

$$8 = 2\mu s + 4 + 2\delta';$$

ed è $s \leq 2$, dunque

| | | | |
|---|---|---|---|
| I) | $\mu = 2$ | $s = 1$ | $\delta' = 0.$ |
| II) | $\mu = 1$ | $s = 2$ | $\delta' = 0$ |
| III) | $\mu = s = 1$ | | $\delta' = 1$ |

Nel caso I) si osservi che il vertice $V$ del cono quadrico inviluppato da $(\pi)$ o non appartiene a $\gamma$ ovvero è doppio per questa e punto base per $(k)$.

*a*) Si consideri la superficie $\gamma_1$, dell' $S_4$, rappresentata nel piano del sistema lineare $|\lambda^3_{12345}|$ coi punti 1, 2, 3, 4, 5 in posizione generica tra loro.

I piani delle coniche del fascio $(k_1)$, esistente in $\gamma_1$ e rappresentato da $|\lambda^1_1|$ costituiscono un $S_0$-cono quadrico. Proiettando $\gamma_1$ da un punto generico otteniamo una superficie $\gamma$ del quarto ordine dotata di un fascio $(k)$ di coniche i cui piani inviluppano un cono quadrico; il vertice $V$ di questo non appartiene a $\gamma$.

*b*) In particolare se i punti 2, 3, 4 sono collineari la loro retta rappresenta un punto $V_1$, doppio per $\gamma_1$, per cui passano tutte le coniche di $(k_1)$.

La proiezione di $\gamma_1$ da un punto generico dell' $S_4$ è la superficie $\gamma$ richiesta la quale possiede un punto doppio $V$ base del fascio $(k)$ proiezione di $(k_1)$.

In ambidue i casi *a*) e *b*) la congruenza $\Gamma$ è d'ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Il caso II) può realizzarsi con una superficie $\gamma$ del quarto ordine a conica doppia e dotata di punti doppi staccati.

Il fascio di piani avente per asse una retta, passante per due detti punti doppi, seca $\gamma$ in un fascio di coniche.

Le tangenti alle coniche di $(k)$ generano una congruenza d'ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Per realizzare il caso III) basta considerare la superficie $\gamma$ del quarto ordine a conica doppia degenere. Il fascio di piani avente per asse una delle rette costituenti la detta conica, seca $\gamma$ in un fascio di coniche. Le tangenti a queste generano evidentemente una congruenza d'ordine $\nu = 2$ e di classe $q = 4$.

15. Sia $n = 5$.

La 1) dà

$$10 = 2\,\mu\, s + 4 + 2\,\delta'$$

ed $s \leq 2$, dunque

| | | | |
|---|---|---|---|
| I) | $\mu = 3$ | $s = 1$ | $\delta' = 0$ |
| II) | $\mu = 2$ | $s = 1$ | $\delta' = 1$ |
| III) | $\mu = 1$ | $s = 2$ | $\delta' = 1$ |
| IV) | $\mu = s = 1$ | | $\delta' = 2$ |

Il caso I) può realizzarsi in due modi con $(\pi)$ gobbo o conico.

*a*) Se $(\pi)$ è gobbo la superficie $\gamma$ esiste [9])

*b*) Se $(\pi)$ è conico il suo punto-base $V$ sarà doppio per $\gamma$ e punto-base per $(k)$; anche in questa ipotesi la superficie $\gamma$ esiste [10])

In ambidue i casi *a*) e *b*) la congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 6$ e di classe $q = 4$.

Nel caso II) si noti che il vertice $V$ del cono quadrico inviluppato da $(\pi)$ è o semplice o triplo per $\gamma$ e soltanto in questo secondo caso è punto-base per $(k)$.

La superficie $\gamma$ esiste ed è nota [11])

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Quanto al caso III) si osservi che il fascio $(k)$ deve avere un punto-base o due infinitamente vicini.

Infatti la retta $r$ asse del fascio $(\pi)$ seca la retta doppia della superficie in un punto $P$ che sarà, almeno, doppio per $\gamma$. Segue da ciò che delle due coniche giacenti in ogni piano di $(\pi)$ una passerà costantemente per $P$ onde anche l' altra passerà per detto punto il quale sarà, perciò, base di $(k)$.

La superficie $\gamma$ esiste ed è nota [12]); esiste una retta semplice di $\gamma$, tale che i piani per essa secano ulteriormente la superficie in coppie di coniche. La congruenza delle tangenti a queste, è evidentemente d'ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Resta a discutere l'alternativa IV); anche adesso, la superficie $\gamma$ esiste; essa è dotata di una retta tripla e due rette doppie a questa incidenti. Le tangenti alle coniche di $\gamma$ complanari con la retta tripla, generano evidentemente una congruenza d' ordine $\nu = 2$ e classe $q = 4$.

16. Sia $n = 6$.

La 1) dà

$$12 = 2\mu s + 4 + 2\delta'$$

ed è $s \leq 3$, quindi sono possibili le alternative

| | | | |
|---|---|---|---|
| I) | $\mu = 4$ | $s = 1$ | $\delta' = 0$ |
| II) | $\mu = 3$ | $s = 1$ | $\delta' = 1$ |
| III) | $\mu = 2$ | $s = 2$ | $\delta' = 0$ |
| IV) | $\mu = 2$ | $s = 1$ | $\delta' = 2$ |
| V) | $\mu = 1$ | $s = 3$ | $\delta' = 1$ |
| VI) | $\mu = 1$ | $s = 2$ | $\delta' = 2$ |
| VII) | $\mu = s = 1$ | | $\delta' = 3$ |

Il caso I) si realizza in due modi con $(\pi)$ gobbo o conico.

---

[9]) l. c. in [2]), n° 28.

[10]) l. c. in [2]), n° 35.

[11]) l. c. in [2]), n° 38, *b*).

[12]) l. c. in [2]), n$^{i}$ 41, *b*) e 42, *b*)

*a*) Nella prima ipotesi la superficie $\gamma$ esiste [13]; la congruenza $\Gamma$ è d'ordine $\nu = 8$ e di classe $q = 4$.

*b*) Quando $(\pi)$ è conico il suo punto-base è doppio per $\gamma$ e base per $(k)$.

La superficie $\gamma$ è nota [14]; anche qui $\Gamma$ è d'ordine $\nu = 8$ e classe $q = 4$.

Anche il caso II) può realizzarsi in due modi

*a*) Supponendo $(\pi)$ gobbo la superficie $\gamma$ esiste [15]; le tangenti alle coniche del fascio $(k)$ generano una congruenza d' ordine $\nu = 6$ e classe $q = 4$.

*b*) Supponendo $(\pi)$ conico la superficie $\gamma$ esiste [16].

Le congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 6$ e di classe $q = 4$.

Nel caso III) la superficie $\gamma$ esiste [17]. Il vertice $V$ del cono quadrico inviluppato da $(\pi)$ è doppio per $\gamma$ e punto-base per $(k)$.

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 8$ e classe $q = 4$.

Consideriamo il caso IV). Qui il vertice $V$ del cono quadrico inviluppato da $(\pi)$ è per $\gamma$ o doppio o quadruplo e in quest' ultima ipotesi è punto-base per $(k)$.

La superficie $\gamma$ esiste [18])

Le tangenti alle coniche di $(k)$ generano una congruenza $\Gamma$ d' ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Il caso V) si realizza con una superficie $\gamma$ [19]) del sesto ordine, esiste una retta, non di $\gamma$, tale che i piani passanti per essa secano questa superficie in terne di coniche. Le tangenti di queste generano una congruenza $\Gamma$ d' ordine $\nu = 6$ e classe $q = 4$.

Nel caso VI) la superficie $\gamma$ è nota [20]; essa possiede una retta doppia tale che i piani passanti per questa la secano ulteriormente in coppie di coniche. Le tangenti di queste generano una congruenza che evidentemente è d' ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Anche nel caso VII) la superficie $\gamma$ è nota; essa è una superficie del sesto ordine con retta quadrupla. La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 2$ e classe $q = 4$.

17. Sia $n = 7$. La 1) dà

$$14 = 2\mu s + 4 + 2\delta'$$

ed è $s \leq 3$, quindi sono possibili le alternative

| | | | |
|---|---|---|---|
| I) | $\mu = 5$ | $s = 1$ | $\delta' = 0$; |
| II) | $\mu = 4$ | $s = 1$ | $\delta' = 1$; |
| III) | $\mu = 3$ | $s = 1$ | $\delta' = 2$; |
| IV) | $\mu = 2$ | $s = 2$ | $\delta' = 1$; |
| V) | $\mu = 2$ | $s = 1$ | $\delta' = 3$ |
| VI) | $\mu = 1$ | $s = 3$ | $\delta' = 2$ |
| VII) | $\mu = 1$ | $s = 2$ | $\delta' = 3$ |
| VIII) | $\mu = s = 1$ | | $\delta' = 4$. |

---

[13]) Cfr. MARLETTA, *Sulle superficie algebriche d' ordine 6 con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, serie 5ª 2º semestre, fasc. 3º (1915), nº 3.

[14]) l. c. in [13]) nº 6.

[15]) Cfr. G. MARLETTA, *Sulle superficie algebriche d' ordine 6 con infinite coniche* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, serie 5ª (1915), sem. 2º, fasc. 8], n. 4.

[16]) l. c. in [15]), nº 7 *a*) *b*).

[17]) l. c. in [15]), n. 14.

[18]) l. c. in [15]). nº 11 *a*) *b*).

[19]) Cfr. MARLETTA, *Delle superficie algebriche d' ordine 6 con infinite coniche.* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XL (2º semestre 1915)], nº 81.

[20]) l. c. in [15]), nⁱ 37, 47. 62.

L' alternativa I) può realizzarsi con $(\pi)$ gobbo o conico.

*a*) Se $(\pi)$ è gobbo la superficie $\gamma$ esiste [21]).

*b*) Se $(\pi)$ è conico il suo punto base sarà doppio per $\gamma$ e base per $(k)$.

Anche adesso la superficie esiste [22]).

In ambidue i casi *a*) e *b*) la congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 10$ e classe $q = 4$.

L' alternativa II) che corrisponde a $\mu = 4$, $s = 1$, $\delta' = 1$ si realizza con una superficie $\gamma$ del settimo ordine.

*a*) Se $(\pi)$ è gobbo $\gamma$ esiste [23]).

*b*) Supponendo $(\pi)$ conico il suo punto base sarà triplo per $\gamma$ e base per $(k)$ Anche nel presente caso la superficie $\gamma$ esiste [24]),

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 8$ e classe $q = 4$, sia in *a*) che in *b*).

La III) alternativa può ottenersi anch' essa con $(\pi)$ gobbo o conico.

*a*) Se $(\pi)$ è gobbo la superficie $\gamma$ esiste [25]).

*b*) Supponendo $(\pi)$ conico il suo punto-base sarà o semplice o quintuplo, e solo in quest' ultima ipotesi sarà punto-base per $(k)$.

La superficie $\gamma$ esiste [26]). La congruenza $\Gamma$ è in ambidue i casi *a*) e *b*) d'ordine $\nu = 6$ e classe $q = 4$.

L' alternativa IV) conduce ad una superficie $\gamma$ nota [27]). La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 8$ e classe $q = 4$.

L' alternativa V) è realizzabile con una nota superficie $\gamma$ [28]) del settimo ordine. La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

In ambedue le alternative IV) e V) si osservi, che il vertice $V$ del cono quadrico inviluppato dai piani di $(\pi)$ o è triplo per $\gamma$ e non punto-base per $(k)$, ovverò è quintuplo per $\gamma$ e punto base per $(k)$.

L' alternativa VI) si ottiene con una nota superficie $\gamma$ del settimo ordine [29]). La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 6$ e classe $q = 4$.

Nell' alternativa VII) la superficie $\gamma$ è nota [30]).

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

L' alternativa VIII) si realizza con una nota superficie $\gamma$ d' ordine sette con retta quintupla. La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 2$ e classe $q = 4$.

18. Sia $n = 8$.

Allora la 1) dà

$$16 = 2\mu s + 4 + 2\delta'$$

---

[21]) Cfr. il mio lavoro. *Le superficie algebriche razionali d' ordine 7 con infinite coniche* [Giornale di Matematiche vol. LIV (1916) ] n° 2.

[22]) l. c. in [21]), n° 3.

[23]) l. c. in [21]), n° 5.

[24]) l. c. in [21]), n° 7.

[25]) l. c. in [21]), n° 10.

[26]) l. c. in [21]), n° 13 *a*), *b*).

[27]) l. c. in [21]), n° 19.

[28]) l. c. in [21]), n° 19.

[29]) l. c. in [21]), n° 87.

[30]) l. c. in [21]) n$^i$ 52, 56.

ed è $s \leq 4$, quindi sono possibili i casi [31])

| | | | |
|---|---|---|---|
| I) | $\mu = 6$ | $s = 1$ | $\delta' = 0$ |
| II) | $\mu = 5$ | $s = 1$ | $\delta' = 1$ |
| III) | $\mu = 4$ | $s = 1$ | $\delta' = 2$ |
| IV) | $\mu = 3$ | $s = 2$ | $\delta' = 0$ |
| V) | $\mu = 3$ | $s = 1$ | $\delta' = 3$ |
| VI) | $\mu = 2$ | $s = 3$ | $\delta' = 0$ |
| VII) | $\mu = 2$ | $s = 2$ | $\delta' = 2$ |
| VIII) | $\mu = 2$ | $s = 1$ | $\delta' = 4$ |
| IX) | $\mu = 1$ | $s = 4$ | $\delta' = 2$ |
| X) | $\mu = 1$ | $s = 3$ | $\delta' = 3$ |
| XI) | $\mu = 1$ | $s = 2$ | $\delta' = 4$ |
| XII) | $\mu = 1$ | $s = 1$ | $\delta' = 5$ |

Il caso I) può realizzarsi in due modi con $(\pi)$ gobbo o conico.

*a*) Supponiamo, in primo luogo, $(\pi)$ gobbo.

La superficie $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$, dell' $S_8$, rappresentata o da $|\lambda_1^3|$ o da $|\lambda^4{}_1{}^2{}_2{}^2|$; la proiezione, però, deve farsi da un $S_4$ generico dell' $S_8$ ambiente.

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 12$ e classe $q = 4$.

*b*) Sia $(\pi)$ conico.

In questo caso non esiste la superficie $\gamma$, rappresentata da $|\lambda_1^3|$. Infatti dovrebbe esistere un $S_5$ passante per l' $S_4$ centro di proiezione che dovrebbe incontrare tutti i piani delle coniche del fascio $(k_1)$ e quindi l' $S_4$ incontrerebbe alcuni piani e risulterebbe $\delta' > 0$ contro l' ipotesi.

Se invece $\gamma_1$ si suppone rappresentato dal sistema $|\lambda^4{}_1{}^2{}_2{}^2|$ con i punti 1 e 2 infinitamente vicini tra loro, essa acquista un punto doppio base per $(k)$. Proiettando da un $S_4$ generico si ottiene la superficie $\gamma$ richiesta. Anche ora $\Gamma$ è d'ordine $\nu = 12$ e classe $q = 4$.

L' alternativa II) si realizza con $(\pi)$ gobbo o con $(\pi)$ conico.

*a*) Sia $(\pi)$ gobbo. La superficie $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$, dell'$S_8$, rappresentata da $|\lambda_1^8|$ o da $|\lambda^4{}_1{}^2{}_2{}^2|$.

La proiezione deve farsi da un $S_4$ che incontri il piano di una conica del fascio $(k_1)$ esistente sulla superficie $\gamma_1$ e rappresentata da $|\lambda_1^1|$.

*b*) Sia $(\pi)$ conico. Il suo vertice sarà triplo per $\gamma$ e punto base per $(k)$.

Se la superficie $\gamma_1$ è rappresentata da $|\lambda_1^3|$ essa non può avere un punto doppio, base per $(k_1)$ e quindi la $\gamma$ dotata di punto triplo e base per $(k)$ non può esistere come proiezione di tale superficie.

Se invece $\gamma_1$ si suppone rappresentata dal sistema lineare $|\lambda^4{}_1{}^2{}_2{}^2|$ con i punti 1 e 2 infinitamente vicini tra loro, essa avrà un punto doppio base per $(k)$. Proiettando come s' è detto nel caso di $(\pi)$ gobbo si ottiene la richiesta superficie $\gamma$ che ha un punto $V$ triplo e base per $(k)$.

Sia in *a*) che in *b*) le tangenti alle coniche di $(k)$ generano una congruenza $\Gamma$ d'ordine $\nu = 10$ e classe $q = 4$.

---

[31]) Dette superficie razionali d' ordine 8 con un fascio di coniche i cui piani non formano fascio, si occupò il Dott. MICHELANGELO BARTOLO nella sua tesi di laurea ancora inedita.

L' alternativa III) si realizza anch' essa in due modi con $(\pi)$ gobbo o conico.

*a*) Supponiamo che $(\pi)$ sia gobbo.

La superficie $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$, dell' $S_8$ rappresentata dal sistema $|\lambda_1^3|$ o dal sistema $|\lambda^4 1^2 2^2|$.

Proiettando, in ambidue i casi, la superficie $\gamma_1$ da un $S_4$ incidente i piani di due coniche di $(k_1)$ si ottiene la superficie $\gamma$ richiesta.

*b*) Supponiamo che $(\pi)$ sia conico, il suo punto base o non apparterrà a $\gamma$ ovvero sarà quadruplo per questa e punto-base per $(k)$.

Considerando la superficie $\gamma_1$ rappresentata dal sistema $|\lambda_1^3|$ essa non può avere un punto doppio base per $(k_1)$, e quindi la superficie $\gamma$ dotata di punto quadruplo base per $(k)$ non può esistere come proiezione di $\gamma_1$ rappresentata da $|\lambda_1^3|$.

Se invece si considera la superficie $\gamma_1$ rappresentata da $|\lambda^4 1^2 2^2|$ con i punti 1 e 2 infinitamente vicini tra loro, essa avrà un punto doppio base per $(k_1)$. Proiettandola come si disse nel caso *a*) si ottiene la superficie $\gamma$ richiesta, cioè tale che $(\pi)$ sia conico, e il vertice $V$ di questo è quadruplo per $\gamma$ e base per $(k)$.

Supponiamo $\gamma_1$ rappresentata da $|\lambda_1^3|$.

Consideriamo tre piani $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, essi si appoggiano alla retta $t_1$, che ha per immagine il punto *1*, e però stanno in un $S_7$ che seca ulteriormente la varietà $V_3^6$, in una rigata cubica normale.

Basterà, ora, proiettare $\gamma_1$, da un $S_4$ che incontri in due punti una conica di tale rigata per avere la richiesta superficie $\gamma$. Il punto base $V$ di $(\pi)$ è quello in cui lo spazio ordinario su cui si proietta, è incontrato dall' $S_5$ determinato dall' $S_4$ centro di proiezione e dal piano della detta conica. Il punto $V$ non appartiene a $\gamma$.

Supponiamo che $\gamma_1$ sia rappresentata dal sistema $|\lambda^4 1^2 2^2|$ con i punti 1 e 2 in posizione generica tra loro.

Si consideri un $S_7$ generico passante per due, $\pi'_1$ e $\pi'_2$ dei piani delle coniche rappresentate dal fascio $|\lambda_1^1|$; esso secherà ulteriormente la $V_3$ dei detti piani in una rigata del quarto ordine immersa in un $S_5$, perchè se fosse immersa in un $S_4$ e in un $S_3$ essa avrebbe un numero finito o infinito di punti doppi per ciascuno dei quali passerebbero due piani di $(\pi_1)$, il che è assurdo giacchè, come si vede dalla rappresentazione, due qualunque di questi piani non appartengono ad uno stesso $S_4$.

Un $S_4$ di tale $S_5$ passante per due rette della rigata la seca ulteriormente in una conica per ogni punto della quale passa una retta della rigata e quindi uno $(\pi)$ dei sopradetti piani.

Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ che incontri in due punti tale conica si ottiene la superficie $\gamma$ richiesta, cioè tale che $(\pi)$ sia conico. Il punto-base di questo non appartiene a $\gamma$.

Nei casi considerati la congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 8$ e classe $q = 4$.

In quanto all' alternativa IV) si trova che essa deve essere esclusa. Infatti in questa ipotesi la superficie $\gamma$ non esiste sia come proiezione della superficie $\gamma_1$ rappresentata da $|\lambda_1^3|$, sia come proiezione di quella rappresentata da $|\lambda^4 1^2 2^2|$.

Nel primo caso si osservi che essendo $s = 2$, le coppie di coniche di $(k)$ esistenti nei piani di $(\pi)$ genererebbero una $g_2^1$. Ora, dalla rappresentazione si vede che la retta di $\gamma$ rappresentata dal punto *1*, dovrebbe appartenere ad ogni piano di $(\pi)$, ciò che è assurdo essendo $\mu = 3$.

Nel secondo caso l' ulteriore intersezione di $\gamma$ con un piano qualunque di $(\pi)$, sareb-

be costituita da due coniche del fascio $(k')$ avente per immagine $| \lambda_2^1 |$. Ne verrebbe di conseguenza, appunto perchè $(k')$ è un fascio, di avere $\mu = 2$ ciò ch' è assurdo.

L' alternativa V) si realizza in due modi con $(\pi)$ gobbo e con $(\pi)$ conico.

*a)* Supponiamo dapprima che $(\pi)$ sia gobbo. La superficie $\gamma$ è proiezione $\gamma_1$, dell'$S_8$, rappresentata o da $| \lambda_1^3 |$ o da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$.

In ambedue le ipotesi la varietà dei piani delle coniche del fascio $(k_1)$ esistente sulla superficie $\gamma_1$ e rappresentato da $| \lambda_1^1 |$, è del sesto ordine.

Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ incidente tre piani della $V_3$ si ottiene la richiesta superficie $\gamma$.

*b)* Sia $(\pi)$ conico.

Se consideriamo la superficie $\gamma_1$ rappresentata da $| \lambda_1^3 |$ essa non può avere un punto doppio e quindi $\gamma$ non può avere un punto quintuplo.

Andiamo a vedere, ora, se $\gamma$ può avere un punto doppio non base per $(k)$.

Un $S_7$ passante per due piani $\pi_1$, $\pi_1'$ seca la varietà dei piani di $(\pi_1)$ in una rigata del quarto ordine dell' $S_5$. Un $S_4$, di questa $S_5$, passante per una retta della rigata la seca ancora in una cubica $c$ per ogni punto della quale passa una retta della rigata e quindi un piano di $(\pi_1)$. Un $S_4$ avente un piano comune con l' $S_3$ contenente la cubica $c$ seca questa in tre punti e perciò incontra tre piani di $(\pi_1)$. Proiettando da tale $S_4$ la $\gamma_1$, tutti i piani $(\pi)$ contenenti coniche di $\gamma$ passeranno per il punto $V$ in cui lo spazio ordinario è incontrato dall' $S_5$ determinato dall' $S_4$ centro di proiezione e dallo $S_3$ che contiene la cubica. Tale punto $V$ non è base per $(k)$; che esso è doppio per $\gamma$ si deduce da una nota formula [32]).

Quanto ora s' è detto può ripetersi se si considera la superficie $\gamma_1$ rappresentata da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$, e però possiamo affermare, anche nel presente caso, l' esistenza della superficie $\gamma$; il vertice di $(\pi)$ è doppio per $\gamma$ e non punto base per $(k)$.

Se si considera la superficie $\gamma_1$, rappresentata da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$ con i punti 1 e 2 infinitamente vicini tra loro, essa ha un punto doppio base per $(k_1)$.

Proiettandola da un $S_4$ che incontri tre piani di $(\pi_1)$ si ha la superficie $\gamma$ con un punto quintuplo, punto che è base per il fascio $(k)$.

Sia in *a)* che in *b)* la congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 6$ e classe $q = 4$.

L' alternativa VI) è da escludere. Infatti la superficie $\gamma_1$, di cui è proiezione $\gamma$, dovrebbe essere rappresentata o da $| \lambda_1^3 |$ o da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$.

Nel primo caso per potere un piano $\pi$ contenere tre coniche di $(k_1)$ bisognerebbe che l' iperpiano, determinato da $\pi$ e dall'$S_4$ centro di proiezione, contenesse tre coniche di $(k_1)$. Esso allora conterrebbe anche la retta $t_1$ di $\gamma_1$ che ha per immagine il punto *1*.

Allora il suddetto piano $\pi$ conterrebbe la retta $t$ di $\gamma$, proiezione della $t_1$ di $\gamma_1$, e quindi $(\pi)$ sarebbe un fascio contro l' ipotesi.

Si conclude che in tal caso $\gamma$ come proiezione della superficie $\gamma_1$ non esiste.

Anche l' ipotesi che $\gamma_1$ sia rappresentata da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$ è da escludere perchè verrebbe $s = 4$, come si vede dalla rappresentazione piana.

Esaminiamo l' alternativa VII), Qui il vertice $V$ del cono inviluppato da $(\pi)$ o non appartiene a $\gamma$, ovvero è quadruplo per $\gamma$ e punto-base per $(k)$.

La superficie $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$ rappresentata dal sistema $| \lambda_1^3 |$ o da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$.

---

[32]) l. c. in [2]), n° 3.

*a)* La prima ipotesi è da escludere perchè tutti i piani di $(\pi)$ conterrebbero la retta $l$, rappresentata dal punto fondamentale $1$, onde formerebbero un fascio contro l'ipotesi di $\mu = 2$.

*b)* Nell' ipotesi che $\gamma_1$ sia rappresentata da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$ assegnamo un' omografia fra le coppie di una $g_2^1$ del fascio $| \lambda_1^1 |$ e le coppie di una $g_2'^1$ del fascio $| \lambda_2^1 |$. Due coppie omologhe costituiscono l' immagine di una sezione iperpiana; si ottengono così, $\infty^1$ iperpiani formanti un sistema irriducibile d' ordine $2$ e perciò appartenenti ad un $S_5$.

Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ generico del detto $S_5$, passante per due punti, traccia in questo, della varietà dei piani delle coniche di $(k_1)$, si ottiene la richiesta superficie $\gamma$.

Il vertice $V$ del cono inviluppato da $(\pi)$ non appartiene a $\gamma$.

*c)* Considerando la superficie $\gamma_1$ rappresentata da $| \lambda_1^3 |$ si vede che il fascio di coniche $(k_1)$, rappresentata da $| \lambda_1^1 |$, non ammette alcun punto-base e però la superficie $\gamma$ sua proiezione, non può avere un punto quadruplo base per $(k)$.

*d)* Se $\gamma_1$ è rappresentata dal sistema $| \lambda^4 1^2 2^2 |$, per ottenere la richiesta superficie $\gamma$, basta suppore, nel caso *b)* che i punti 1 e 2 siano infinitamente vicini tra loro.

Nei casi *b), c), d)* la congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 8$ e classe $q = 4$.

Quanto all' alternativa VIII) si osservi che il vertice $V$ del cono quadruplo inviluppato da $(\pi)$ o è quadruplo per $\gamma$ e non punto-base per $(k)$, ovvero è sestuplo e punto-base.

La superficie $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$, dell' $S_8$, rappresentata da $| \lambda_1^3 |$ o da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$, ma bisogna che l' $S_4$ centro di proiezione incontri quattro piani delle coniche del fascio $(k_1)$, esistente su $\gamma_1$. e rappresentata da $| \lambda_1^1 |$.

Il vertice $V$ di cui sopra è quadruplo per $\gamma$ e punto-base per $(k)$.

Se $\gamma_1$ è rappresentata dal sistema $| \lambda^4 1^2 2^2 |$ coi punti 1 e 2 infinitamente vicini tra loro essa avrà un punto doppio $V_1$ base per $(k_1)$; proiettandola, come ora s' è detto, si ottiene la richiesta superficie $\gamma$ che ha un punto $V$ sestuplo e punto-base per $(k)$.

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Discutiamo l' alternativa IX). Qui è da escludere la rappresentazione nel piano mediante il sistema delle cubiche passanti per un punto fisso.

Si consideri la superficie $\gamma_1$, rappresentata nel piano dal sistema $| \lambda 1^2 2^2 |$ coi punti $1$ e $2$ infinitamente vicini tra loro. Si fissi nel fascio $| \lambda_1^1 |$ una $g_4^1$; un gruppo di questa costituisce l' immagine di una sezione iperpiana di $\gamma_1$. Si ottengono, così, $\infty^1$ iperpiani formanti fascio e perciò passanti per un $S_6$. Un iperpiano generico seca la varietà dei piani di $(k_1)$ in una superficie del sesto ordine che si spezza nei piani di quattro coniche di $(k_1)$ e in una rigata quadrica.

Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ generico dell' $S_6$ base del detto fascio d' iperpiani, si ottiene la richiesta superficie $\gamma$; infatti questo $S_4$ incontra in due punti la detta rigata, le coniche complanari con questi punti hanno per proiezione rette doppie di $\gamma$ e, contate due volte coniche del fascio $(k)$.

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 8$ e classe $q = 4$.

Nell' alternativa X) le superficie $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$, dell' $S_8$, rappresentata nel piano da $| \lambda_1^3 |$ o da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$.

Supponiamo che $\gamma_1$ sia rappresentata da $| \lambda_1^3 |$; fissiamo una $g_3^1$ nel fascio $(k_1)$.

Un gruppo della $g_3^1$ insieme con la retta rappresentata dal punto fondamentale $1$, contata due volte, costituisce una sezione iperpiana di $\gamma_1$; si ottengono così $\infty^1$; iperpiani che formano un fascio e perciò appartengono ad un $S_6$.

Un iperpiano generico del fascio seca la varietà dei piani delle coniche di $(k_1)$ in una

superficie del sesto ordine spezzata nei piani di tre coniche di $(k_1)$ e in una rigata cubica.

Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ generico dell' $S_6$ base del sopradetto fascio si ottiene la richiesta superficie $\gamma$. Infatti quest' $S_4$ incontra in tre punti la detta rigata; le coniche complanari con questi tre punti hanno per proiezione rette doppie per la superficie e, contate due volte, coniche del fascio $(k)$.

Sia $\gamma_1$ rappresentata dal sistema $|\lambda^4{}_{1^2 2^2}|$ con i punti *1* e *2* infinitamente vicini tra loro.

Nel fascio $|\lambda_1^1|$ si fissi una $g_3^1$. Un gruppo di questa insieme con una $\lambda_1^1$ generica, fissata ad arbitrio, costituiscono l' immagine di una sezione iperpiana di $\gamma_1$. Si ottengono così $\infty^1$ iperpiani formanti fascio e quindi appartenenti ad un $S_6$. Un iperpiano generico del detto fascio seca la varietà dei piani di $(k_1)$ in una superficie del sesto ordine di cui fanno parte i tre piani delle coniche del gruppo della $g_3^1$ considerata.

Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ generico dell' $S_6$ base del fascio di iperpiani si ottiene la superficie $\gamma$ come si richiedeva.

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 6$ e classe $q = 4$.

Discutiamo l' alternativa XI). Qui $\gamma$ è proiezione della superficie $\gamma_1$, dell' $S_8$, rappresentata nel piano da $|\lambda_1^3|$ o da $|\lambda^4{}_{1^2 2^2}|$.

Nel primo caso il fascio $|\lambda_1^1|$ rappresenta un fascio $(k_1)$ di coniche incidenti la retta $t_1$ e la cubica gobba $c_1$ di $\gamma_1$ aventi per immagini rispettivamente il punto fondamentale *1* e una retta generica del piano.

Ne segue che ogni conica di $(k_1)$ e l' $S_5$ di $t_1$ e $c_1$ giacciono in un $S_6$.

Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ $\Omega$ avente in comune con l' $S_5$ sopradetto uno spazio ordinario, si ottiene la superficie $\gamma$ richiesta.

Siccome le coniche di $(k_1)$ punteggiano omograficamente la $t_1$ e la $c_1$, così $\Omega$ sarà incidente ai piani di quattro coniche che avranno per proiezione rette doppie di $\gamma$ e contate due volte, coniche di $(k)$.

Nel secondo caso fissiamo una $g_2^1$ nel fascio $|\lambda_1^1|$ immagine del fascio di coniche $(k_1)$ esistente sulla superficie, ed inoltre due rette generiche del fascio $|\lambda_1^2|$, rette cui corrispondono due coniche $k_2$, $\overline{k}_2$ del fascio $(k_2)$. Una coppia della $g_2^1$ insieme con le due coniche $k_2$, $\overline{k}_2$ costituiscono l'immagine di una sezione iperpiana di $\gamma_1$.

Si ottengono così $\infty^1$ iperpiani che formano un fascio e che secano $\gamma_1$ nelle due coniche fisse del fascio $(k_2)$ e in una coppia del fascio $(k_1)$. Proiettando $\gamma_1$ da un $S_4$ generico $\Omega$ dell' $S_6$ base del detto fascio di iperpiani, si ottiene la richiesta superficie $\gamma$.

Siccome le coniche di $(k_1)$ punteggiano omograficamente le coniche $k_2$, $\overline{k}_2$, così $\Omega$ sarà incidente ai piani di quattro coniche di $(k_1)$ che avranno per proiezione rette doppie di $\gamma$ e, contate due volte coniche di $(k)$.

La congruenza $\Gamma$ è di ordine $\nu = 4$ e classe $q = 4$.

Esaminiamo infine l' alternativa XII). La superficie $\gamma_1$ è, al solito, proiezione della superficie $\gamma_1$, dell' $S_8$, rappresentata da $|\lambda_1^3|$ o da $|\lambda^4{}_{1^2 2^2}|$.

Quando $\gamma_1$ è rappresentata da $|\lambda_3^1|$ ammette un fascio di coniche $(k_1)$, rappresentato da $|\lambda_1^1|$ le quali segnano una $g_2^1$ su ciascuna delle $\infty^5$ sestiche $(t)$ razionali normali rappresentate da $\lambda^2$.

Osserviamo che è una retta la traccia, nell' $S_6$ di una $t$, di uno $\pi$ dei piani delle coniche di $(k_1)$; al variare di $\pi$ la retta genera una rigata $\rho$ del quinto ordine.

Assumendo come centro di proiezione uno generico $\Omega$ degli $S_4$ dell' $S_6$ di una delle sopradette sestiche si ottiene la superficie $\gamma$ come si richiedeva.

Lo spazio $\Omega$ incontra cinque generatrici di $\rho$, le quali sono complanari con altrettante coniche di $(k_1)$ ognuna delle quali ha per proiezione una retta doppia per $\gamma$ e, contata due volte, conica di $(k)$.

Se $\gamma$ è rappresentata da $| \lambda^4 1^2 2^2 |$ ammette due fasci di coniche $(k_1)$ e $(k_2)$, rappresentati da $| \lambda_1^1 |$ o da $| \lambda_2^1 |$. Le coniche di $(k_1)$ segnano una $g_2^1$ su ciascuna delle $\infty^5$ sestiche razionali normali rappresentate da $\lambda^4\, 1, 2^2$. Essendo una retta la traccia, nell' $S_6$ di una sestica, di uno $\pi$ dei piani di $(k_1)$, si ottiene al variare di $\pi$ una rigata $\rho$ del quinto ordine. Proiettanto $\gamma_1$ da un $S_4$ generico dell' $S_6$ di una delle sopradette sestiche, si ottiene la richiesta superficie $\gamma$.

La congruenza $\Gamma$ è d' ordine $\nu = 2$ e classe $q = 4$.

## § 4.

Dallo studio fatto nei numeri precedenti concludiamo: *le conguenze razionali generate da infinite coniche-inviluppo, e di classe* $q = 1$, $q = 2$, *e* $q = 4$, *con* $\varepsilon = 0$, ***sono quelle e soltanto quelle*** *ognuna delle quali è tale che la superficie generata dalle coniche-luogo così inviluppate sia una delle seguenti* [33]).

$n = 2$ — $(1, 0, 1, 0, 1)''$, $(1, 0, 1, 0, 0)''$.

$n = 3$ —
$(2, 0, 1, 0, 0)'$;
$(1, 0, 1, 0, 2)''$; $(1, 0, 1, 1, 0)$; $(1, 0, 1, 0, 0)$;
$(1, 0, 1, 0, 0)'$; $(1, 0, 1, 0, 0)''$.

$n = 4$ —
$(3, 0, 1, 0, 0)$; $(3, 0, 1, 0, 0)'$,
$(3, 0, 1, 0, 2)$; $(2, 0, 1, 1, 0)$; $(2, 0, 1, 1, 0)'$,
$(2, 0, 1, 0, 0)_1$; $(2, 0, 1, 0, 0)'$;
$(1, 0, 2, 0, 2)''$; $(1, 0, 2, 1, 0)''$;
$(1, 0, 1, 0, 4)$; $(1, 0, 1, 1, 2)$;
$(1, 0, 1, 2, 0)$; $(1, 0, 1, 2, 0)'$;
$(1, 0, 1, 1, 0)$; $(1, 0, 2, 0, 0)''$.

$n = 5$ —
$(3, 0, 1, 0, 0)$; $(3, 0, 1, 0, 0)'$;
$(2, 0, 1, 1, 0)_1$; $(2, 0, 1, 1, 0)'$;
$(1, 0, 2, 1, 0)$; $(1, 0, 2, 1, 0)''$;
$(1, 0, 1, 2, 0)$

$n = 6$ —
$(4, 0, 1, 0, 0)$; $(4, 0, 1, 0, 0)'$
$(3, 0, 1, 1, 0)$; $(3, 0, 1, 1, 0)_1$; $(3, 0, 1, 1, 0)'$
$(2, 0, 1, 2, 0)_1$; $(2, 0, 1, 2, 0)'$;
$(1, 0, 3, 1, 0)''$;
$(1, 0, 2, 2, 0)$; $(1, 0, 2, 2, 0)'$; $(1, 0, 2, 2, 0)''$;
$(1, 0, 1, 3, 0)$; $(1, 0, 1, 3, 0)'$;

---

[33]) Indicheremo con

$$(\mu,\ p_i,\ s,\ \delta',\ \varepsilon)\,;\ (\mu,\ p_i,\ s,\ \delta',\ \varepsilon)_1\,;\ (\mu,\ p_i,\ s,\ \delta'\ \varepsilon)'\,;\ (\mu,\ p_i,\ s,\ \delta',\ \varepsilon)''$$

la superficie $\gamma$ secondo che

$(\pi)$ è gobbo,

$(\pi)$ inviluppa un cono il cui vertice non è punto-base per $(k)$,

$(k)$ ha un sol punto-base

$(k)$ ha due punti-base.

$n = 7$

(5, 0, 1, 0, 0) ; (5, 0, 1, 0, 0)'
(4, 0, 1, 1, 0) ; (4, 0, 1, 1, 0)' ;
(3, 0, 1, 2, 0) ; $(3, 0, 1, 2, 0)_1$ ; (3, 0, 1, 2, 0)' ;
$(2, 0, 1, 3, 0)_1$ ; (2, 0, 1, 3, 0)' ;
(1, 0, 3, 2, 0)'' ;
(1, 0, 2, 3, 0) ; (1, 2, 3, 0)' ;
(1, 0, 1, 4, 0) ; (1, 0, 1, 4, 0)' .

$n = 8$

(6, 0, 1, 0, 0) ; (6, 0, 1, 0, 0)' ;
(5, 0, 1, 1, 0) ; (5, 0, 1, 1, 0)' ;
(4, 0, 1, 2, 0) ; (4, 0, 1, 2, 0)' ;
(3, 0, 1, 3 0) ; $(3, 0, 1, 3, 0)_1$ ; (3, 0, 1, 3, 0)' ;
$(2, 0, 2, 2, 0)_1$ ; (2, 0, 2, 2, 0)' ;
$(2, 0, 1, 4, 0)_1$ ; (2, 0, 1, 4 0)' ;
(1, 0, 4, 2, 0) ;
(1, 0, 3, 3, 0) ;
(1, 0, 2, 4, 0) ;
(1, 0, 1, 5, 0) ; (1, 0, 1, 5, 0)' ; (1, 0, 1, 5, 0)'' .

*Catania, dicembre 1917.*

# Osservazioni meteorologiche fatte al R. Osservatorio di Catania nel 1916

## Nota di V. BALBI e T. FATTOROSI - BARNABA

Il luogo, gli strumenti meteorici, le ore di osservazione ed il modo di fare le medie degli elementi osservati, sono quelli adoperati nei ventiquattro anni precedenti e se ne trova la descrizione nella nota pubblicata nel 1898 (1); ricordiamo qui soltanto che le coordinate geografiche dell' Osservatorio sono :

Latitudine boreale . . . . . . . $37° 30' 13''$
Longitudine Est da Greenwich $1^h 0^m 21^s$

e che il pozzetto del barometro è elevato 65 m. sul livello medio del mare, e 19 m. sul suolo; gli altri strumenti meteorici circa altrettanto.

I quadri N. 1, 2 e 3 contengono i risultati delle osservazioni dell' anno meteorico 1916 (dicembre 1915 al 30 novembre 1916); nei primi due quadri si aggiungono anche i valori del dicembre successivo, allo scopo di trovare nello stesso quadro i dati di tutto l' anno civile, e si riportano in basso anche le medie relative a questo intervallo; come nei precedenti riassunti in questi quadri la temperatura e la pressione barometrica non sono ridotti al livello del mare, nè queste ultime: al valore normale della gravità.

La media della trasparenza dell' aria, stimata in 6 gradi, (0 a 5) è dedotta dalle osservazioni delle ore 8, (2) 9 e 15.

Confrontando i valori delle stagioni e dell' anno 1916, con i corrispondenti dell' anno 1915, si hanno le differenze che si riportano nel seguente specchietto :

### Confronto del 1916 coll' anno precedente

| | Temperatura dell' aria | Pressione atmosferica | Tensione del vapore | Umidità relativa | Evaporazione all' ombra | Pioggia totale | Nebulosità |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | o | mm | mm | % | mm | mm | % |
| Inverno . . . . . . . | +1.0 | +3.6 | +0.55 | +1.9 | −0.56 | +133.0 | −12.3 |
| Primavera. . . . , . . | +1.2 | −1.6 | −0.05 | −2.7 | +0.06 | − 15.6 | + 0.3 |
| Estate. , . . . . . . | +0.7 | −0.1 | −0.23 | −3.1 | −1.39 | + 20.[illegible] | − 5.1 |
| Autunno . . . . . . . | +0.6 | +0.8 | +0.67 | +2.8 | −0.83 | −185.2 | −12.0 |
| Anno meteorico , . . . | +0.8 | +0.7 | +0.23 | −0.3 | −0.68 | − 47.7 | − 7.2 |

(1) A. RICCÒ e G. SAIJA — *Risultati delle osservazioni meteorologiche fatte nel quinquennio 1892-6 nell' Osservatorio di Catania.* Atti dell' Acc. Gioenia: Serie 4ª Vol. XI, Catania 1898.

(2) Per nuova disposizione del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica col 1° Ottobre 1913 in poi la prima osservazione giornaliera si è fatta alle ore 8, invece delle 7, onde uniformarsi cogli altri Stati rispetto al servizio dei presagi del tempo.

Dall' insieme di questo quadro, appare rispetto alla temperatura, come la media in tutte le stagioni dell' anno siano state sensibilmente superiori alle omologhe dell' anno precedente. Dal medesimo quadro risulta che la media pressione atmosferica, per l' inverno e l' autunno e per l' insieme dell' anno 1916, è stata alquanto maggiore di quella corrispondente dell' anno precedente. La quantità di pioggia per l' inverno fu sensibilmente superiore, nell' autunno sensibilmente inferiore a quella osservata nell' anno precedente.

Passando poi a paragonare gli stessi valori con quelli normali (1) si ha:

| | Temperatura dell' aria | Pressione atmosferica | Tensione del vapore | Umidità relativa | Evaporazione all' ombra | Pioggia totale | Nebulosità |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | mm | mm | % | mm | mm | % |
| Inverno | +1.4 | +2.1 | +0.79 | +1.8 | —0.43 | + 43.0 | —7.8 |
| Primavera | +1.3 | —1.8 | +0.85 | +1.5 | —0.77 | + 8.3 | —1.8 |
| Estate | +1.8 | —0.8 | +0.79 | +0.0 | —2.01 | + 16.4 | —1.1 |
| Autunno | +0.2 | — 2 | +0.23 | +1.6 | +0.16 | —121.5 | —6.9 |
| Anno | +1.2 | —0.2 | +0.67 | +1.2 | —0.76 | — 53.8 | —4.4 |

Dall' esame di questo specchietto risulta che le medie della temperatura, della tensione del vapore e dell' umidità relativa riferentesi alle diverse stagioni e complessivamente per tutto l' anno furono maggiori dei corrispondenti valori normali; la pressione media, invece, per le stagioni di primavera, estate, autunno e complessivamente per l' anno fu un po' minore; la quantità di pioggia fu notevolmente minore del corrispondente valore normale nell' autunno, e complessivamente per tutto l' anno di una quantità abbastanza sensibile; infine la nebulosità media osservata in tutte le stagioni e per l' anno 1916 fu inferiore ai corrispondenti valori normali.

---

(1) A. Riccò e L. Taffara — *Risultati delle osservazioni meteorologiche fatte nel ventennio 1892-1911 nell' Osservatorio di Catania.* Atti dell' Acc. Gioenia, Serie 5ª Vol. V.

## Quadro N. 1 — 1916.

| | Temperatura media dell' aria | Medie dei massimi diurni di temperatura dei minimi e delle escurs. | | | Pressione atmosferica | Tensione del vapore acqueo | Umidità relativa | Evaporazione all' ombra |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | M. | m. | E | | | | |
| | ° | ° | ° | ° | | mm | % | mm |
| Dicembre 1915 . . . . | 14. 1 | 17. 8 | 13,9 | 3. 9 | 758. 2 | 8. 46 | 68. 7 | 2. 90 |
| Gennaio 1916 . . . . | 10. 4 | 16. 0 | 7. 8 | 8. 2 | 761. 8 | 6. 57 | 64. 7 | 2. 67 |
| Febbraio . . . . . . | 11. 7 | 15, 2 | 9. 0 | 6. 2 | 756. 4 | 7. 89 | 73. 8 | 2. 03 |
| Marzo , . . . . . | 14. 1 | 18. 1 | 11. 0 | 7. 1 | 752. 0 | 8. 21 | 64. 5 | 3. 35 |
| Aprile . . . . . . . | 15. 6 | 20. 0 | 11. 3 | 8. 7 | 753. 2 | 8. 93 | 64. 3 | 3 10 |
| Maggio . . . . . . | 20 0 | 24. 0 | 15. 3 | 8. 7 | 755. 2 | 10. 25 | 58. 6 | 3. 92 |
| Giugno . . . . . . | 25. 7 | 30. 0 | 20. 4 | 9. 6 | 756. 0 | 12. 40 | 50. 8 | 4. 80 |
| Luglio . . . . . . . | 28. 0 | 32. 2 | 22. 8 | 9. 4 | 755. 4 | 14. 26 | 51. 0 | 4. 66 |
| Agosto . . . . . . | 26. 4 | 30. 0 | 22. 0 | 8. 0 | 754. 7 | 14. 40 | 54, 7 | 5. 06 |
| Settembre . . . . . | 25. 8 | 27. 0 | 19. 2 | 7. 8 | 755. 7 | 13. 80 | 64. 0 | 3. 84 |
| Ottobre . . . . . . | 19. 9 | 24. 3 | 16. 2 | 8. 1 | 759. 7 | 11. 95 | 65. 3 | 3. 56 |
| Novembre . . . . . | 15. 9 | 20. 0 | 13. 0 | 7. 0 | 755. 5 | 9. 73 | 70. 1 | 2. 56 |
| Dicembre . . . . . . | 13. 5 | 18. 0 | 11. 0 | 7. 0 | 755. 2 | 8. 55 | 72. 0 | 2. 70 |
| Inverno . . , . . . | 12. 1 | 16. 3 | 10. 2 | 6. 1 | 758. 8 | 7. 64 | 69. 1 | 2. 53 |
| Primavera . . , . | 16. 6 | 20. 7 | 12. 5 | 8. 2 | 753. 5 | 9. 13 | 62. 5 | 3. 45 |
| Estate. . . . . . . | 26. 7 | 30. 7 | 21. 7 | 9. 0 | 755. 4 | 13. 69 | 52. 2 | 4. 84 |
| Autunno . . . . . . | 19. 8 | 23. 7 | 16. 1 | 7. 7 | 757. 0 | 11. 83 | 66. 5 | 3. 32 |
| Anno meteorico . . . Dic. 1915 a Nov. 1916 | 18. 8 | 22. 9 | 15. 1 | 7. 8 | 756. 2 | 10. 58 | 62. 6 | 3. 53 |
| Anno civile . . . . . Genn. 1916 a Dic. 1916 | 18. 8 | 22. 9 | 14. 9 | 8. 0 | 755. 9 | 10. 58 | 62 8 | 3. 52 |

## Quadro N. 2 — 1916.

| | Pioggia totale | Vento dominante | Nebulosità | TRASPARENZA atmosferica | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Media | Frequenza della massima |
| | mm | | % | | |
| Dicembre 1915 . . . . . | 25.0 | W | 33.3 | 3.2 | 0.29 |
| Gennaio 1916 . . . . . | 96.4 | NW | 35.0 | 3.6 | 0.17 |
| Febbraio . . . . . . . | 179.4 | NW | 61.4 | 3.1 | 0.03 |
| Marzo . . . . . . . . | 3.7 | W | 40.5 | 2.5 | 0.00 |
| Aprile . . . . . . . . | 112.9 | W | 47.0 | 2.9 | 0.02 |
| Maggio . . . . . . . | 5.0 | SE | 43.4 | 2 4 | 0.00 |
| Giugno . . . . . . . | 10.1 | SE | 20.0 | 2.3 | 0.02 |
| Luglio . . . . . . . . | 12.2 | SE | 13.1 | 2.0 | 0.07 |
| Agosto . . . . . . . | 13.9 | WNW | 19.3 | 2.8 | 0.13 |
| Settembre . . . . . . | 37.4 | NWW | 42.7 | 3.5 | 0.14 |
| Ottobre . . . . . . . | 13 5 | W | 25 0 | 3.0 | 0.04 |
| Novembre . . . . . . | 75.0 | NE, W | 47.0 | 2 8 | 0.01 |
| Dicembre . . . . . . . | 82.0 | W | 27.2 | 3.1 | 0.01 |
| | | | | | |
| Inverno . . . . . . . . | 300.8 | W. NW | 43.2 | 3.3 | 0.16 |
| Primavera. . . . . . . | 121.6 | W. SE | 43.7 | 2.6 | 0.00 |
| Estate . . . . . . . . | 36.2 | SE. WNW | 17.5 | 2.6 | 0.07 |
| Autunno . . . . . . . | 125.9 | W. NE | 38.3 | 3.1 | 0.06 |
| | | | | | |
| Anno meteorico . . . . . | 584 5 | W | 35.7 | 2.9 | 0.07 |
| » civile . . . . . . . | 641.5 | W | 35.1 | 2.9 | 0.06 |

# Quadro N. 3 — 1916.

| | | Inverno | Frimavera | Estate | Autunno | Anno |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequenza della calma e dei Venti | Calma | 7 | 11 | 8 | 30 | 56 |
| | N | 13 | 3 | 3 | 0 | 19 |
| | NE | 14 | 30 | 15 | 9 | 68 |
| | E | 12 | 26 | 24 | 6 | 68 |
| | SE | 4 | 1 | 20 | 4 | 29 |
| | S | 14 | 3 | 2 | 2 | 21 |
| | SW | 8 | 4 | 1 | 12 | 25 |
| | W | 12 | 9 | 16 | 24 | 61 |
| | NW | 7 | 4 | 3 | 5 | 19 |
| Meteore acquee — Numero dei giorni | sereni | 30 | 41 | 61 | 54 | 186 |
| | misti | 27 | 27 | 21 | 15 | 90 |
| | coperti | 34 | 22 | 10 | 23 | 89 |
| | con pioggia | 22 | 13 | 11 | 20 | 66 |
| | con neve o grandine | 8 | 1 | 4 | 4 | 17 |
| | con nebbia | 15 | 11 | 2 | 1 | 29 |
| | con brina | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | con temporale | 1 | 1 | 2 | 3 | 7 |
| | con scariche elettriche | 3 | 11 | 7 | 8 | 29 |

| ESTREMI METEOROLOGICI ANNUI OSSERVATI | Massimo | Minimo |
|---|---|---|
| Temperatura dell' aria | 40°.7<br>4 Luglio | 5.2<br>11 Febbraio |
| Pressione atmosferica | mm<br>768.5<br>20 Gennaio $9^h$ | mm<br>742.1<br>2 Marzo $8^h$ |
| Tensione del vapore acqueo | mm<br>22.16<br>18 Agosto $15^h$ | mm<br>2.91<br>16 Gennaio $9^h$ |
| Umidità relativa | %<br>98<br>7 Aprile $8^h$ | %<br>12<br>11 Luglio $9^h$ |
| Evaporazione in $24^h$ all'ombra | mm<br>12.62<br>11 Luglio | mm<br>0.15<br>27 Dicembre |
| Pioggia in 24 ore | mm<br>74.0<br>1 Dicembre | — |
| Velocità oraria del vento e direzione | 39 km.<br>da NE<br>25 Nov. $6^h$ e 7 | |

MICHELE CIPOLLA

# I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli

1. GINO LORIA ha recentemente [1] richiamato l'attenzione dei matematici su di un problema da lui rinvenuto fra diversi altri, semplicemente enunciati da E. TORRICELLI, dei quali annunzia la pubblicazione nelle *Opere complete*, attualmente in corso di stampa, del celebre discepolo di GALILEI.

Il problema è questo:

*Trovare un triangolo rettangolo in numeri interi, che soddisfi alle tre condizioni seguenti*:

a) *l'ipotenusa sia un quadrato*,

b) *la somma degli altri due lati sia un quadrato*,

c) *la somma del lato maggiore e del lato medio sia pure un quadrato.*

Il LORIA chiede se il problema sia stato proposto da altri e risoluto.

Ora dalle ricerche che mi è stato possibile di fare [2], risulta che la questione non era completamente nuova ai tempi di TORRICELLI. Difatti essa, per le prime due condizioni, si trova proposta da FERMAT, coetaneo [3] di TORRICELLI, nella sua 2ª osservazione alla questione XXIV del libro VI di DIOFANTO [4].

Ammessa l'esistenza di un triangolo di FERMAT, cioè di un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa $M$ e i cateti $P$, $Q$ (essendo $M$, $P$, $Q$ numeri interi non negativi) soddisfino alle condizioni $a$) e $b$), posto

$$X^2 = M, \quad Y^2 = P + Q, \quad Z = P - Q$$

si deduce facilmente che i numeri $X$, $Y$, $Z$ devono verificare l'equazione

$$2X^4 - Y^4 = Z^2, \tag{1}$$

che perciò è a dirsi *l'equazione fondamentale* del problema.

Inversamente, se $(X, Y, Z)$ è una soluzione in numeri interi non negativi di quest'equazione, posto

$$M = X^2, \quad P = \frac{1}{2}(Y^2 + Z), \quad Q = \frac{1}{2}(Y^2 - Z),$$

[1] *L'intermédiaire des Mathématiciens*, t. XXIV, n.os 9-10 septembre-octobre 1917, p. 97, question 4755.

[2] Per gentile suggerimento del Prof. LORIA e del D.r PROMPT, cui rendo sentite grazie.

[3] PIERRE DE FERMAT, n. a Beaumont de Lomagne (Toulouse) nel 1608, m. a Toulouse nel 1665; EVANGELISTA TORRICELLI, n. a Piancaldoli nel 1608, m. a Firenze nel 1647. Essi furono anche in relazione.

[4] P. DE FERMAT, *Observations sur Diophante*, ed. da SAMUEL DE FERMAT, Toulouse, a. 1670; *Oeuvres*, Paris, a. 1891 t. 1; trad. di P. TANNERY, Paris, a. 1896, t. 1.

si avrà un triangolo di FERMAT propriamente detto, di ipotenusa $M$ e cateti $P$ e $Q$, purchè il numero $Q$ risulti positivo: per questo è necessario e sufficiente che si abbia $Y^2 > Z$] o anche $Y > X$.

Basterà, come bene s' intende, limitare la ricerca alla determinazione dei triangoli pei quali $M$, $P$, $Q$ siano numeri primi tra loro *(triangoli primitivi)*, e ciò equivale a ricercare soltanto le soluzioni della (1) costituite da numeri primi tra loro *(soluzioni primitive)*.

2. Dalla soluzione

$$X = 1 , \quad Y = 1 , \quad Z = 1 ,$$

alla quale corrisponde un triangolo degenere:

$$M = 1 , \quad P = 1 , \quad Q = 0 ,$$

si possono dedurre altre soluzioni con un procedimento razionale, indicato dallo stesso FERMAT ([5]), che permette, in generale, di ricavare da una soluzione nota un' altra, generalmente diversa, di un' equazione della forma

$$aX^4 + bX^3Y + cX^2Y^2 + dXY^3 + eY^4 = Z^2. \tag{2}$$

Si ottiene così la soluzione:

$$X = 13 , \quad Y = 1 , \quad Z = 239 ,$$

per la quale si ha

$$M = 169 , \quad P = 120 , \quad Q = -119 ;$$

e poi la soluzione

$$X = 2\,165\,017 , \quad Y = 2\,372\,159 , \quad Z = 3\,503\,833\,734\,241 , \tag{3}$$

cui corrisponde un triangolo di FERMAT propriamente detto, ma che non soddisfa alla terza condizione di TORRICELLI:

$$M = 4\,687\,298\,610\,289, \quad P = 1\,061\,652\,293\,520 , \quad Q = 4\,565\,486\,027\,761 .$$

Non risulta però, in generale, che col procedimento indicato si ottengano tutte le soluzioni, e nemmeno riesce evidente che ne esistano infinite. Forse per tal motivo FERMAT si studiò di perfezionare il suo metodo, cercando il mezzo di dedurre da una soluzione assegnata un' altra formata da numeri di minor valore assoluto. Fu così che egli riuscì a dimostrare l' impossibilità di risolvere in numeri interi non nulli l' equazione ([6])

$$Z^4 - Y^4 = Z^2 .$$

---

([5]) Cfr. l. c. ([4]); *Oeuvres*, t. 3, p. 378. Procedimenti analoghi trovansi esposti da A. M. LEGENDRE nella sua *Théorie des Nombres* (3ª ed., Paris, a. 1830, p. 123).

([6]) Cfr. l. c. ([4]); *Oeuvres*, t. 1, p. 340; t. 3, p. 372.

Seguendo la stessa via FRENICLE pervenne ad analoga conclusione per l' equazione [7]

$$X^4 + Y^4 = Z^2,$$

ed ispirandosi allo stesso principio EULER riuscì a dimostrare [8] l' inesistenza di soluzioni, formate da numeri interi diversi da zero, di ciascuna delle equazioni:

$$X^4 \pm 4Y^4 = Z^2, \quad 2X^4 \pm 2Y^4 = Z^2, \quad X^4 + 2Y^4 = Z^2.$$

Mentre però per l' equazione

$$X^4 - 2Y^4 = Z^2, \tag{4}$$

in base al detto principio, EULER giunse al risultato [9] che una soluzione qualunque della (4) o si ricava da un' altra formata da numeri più piccoli o da una soluzione della (1), per quest' equazione si limitò a mostrare, con un esempio, che il metodo di FERMAT, applicato ad essa, non ne dà tutte le soluzioni [10]. In un lavoro postumo [11] si riscontrano delle formole che permettono di ottenere le soluzioni dell' equazione (1) da quelle dell' equazione

$$X^4 + 8Y^4 = Z^2, \tag{5}$$

ma non è dato alcun procedimento per risolvere quest' ultima.

La lacuna fu colmata da LAGRANGE [12], il quale, lasciandosi pure guidare dal principio dimostrativo di FERMAT, raggiunse lo scopo avvicendando la risoluzione dell' equazione (1) con la risoluzione della (4) e della (5). Egli così dimostrò che, conforme all'asserzione di FERMAT, la soluzione (3) dell' equazione (1) è proprio quella che fornisce il triangolo di FERMAT coi lati più piccoli.

Il procedimento di LAGRANGE è però assai laborioso e presenta l' inconveniente di dare più volte una stessa soluzione. La complicazione dei calcoli e il rapido aumentare dei numeri che costituiscono le soluzioni, non lasciano intravedere la legge con la quale queste si succedono.

Notevoli formole di ricorrenza per la determinazione di tutte le soluzioni dell' equazione (1), furono date, quasi un secolo dopo, da V. A. LEBESGUE [13]. Egli vi pervenne con un procedimento non dissimile da quello di FERMAT, partendo però dalle formole dei numeri pitagorici.

(7) B. FRENICLE DE BESSY, *Traité des triangles rectangles en nombres*, Paris, a. 1676; Mém. Ac. sc. Paris, a. 1666-99, t. 5, ed. Paris, a. 1729, p. 178.

(8) L. EULER, Comm. Acad. Petrop., t. 10 (a. 1738), ed. a. 1747, p. 125-134; *Vollständige Anleitung zur Algebra*, t. 2, Pietroburgo a. 1770, p. 418; trad. francese con aggiunte per J. L. LAGRANGE t. 2, Lyon, a. 1774, sez. 2, cap. 13, p. 242-54.

(9) Cfr. *Algebra* l. c. (8), t. 2, p. 435; trad. t. 2, p. 260.

(10) Cfr. *Algebra* l. c. (8), t. 2, cap. IX.

(11) *Opera posthuma*, ed. Fuss, Petropolis, a. 1862, t. 1, p. 221 (*Fragmenta ex adversariis deprompta*, n.° 57).

(12) J. L. LAGRANGE, Nouv. Mém. Acad. Berlin. t. 8 (a. 1777), ed. a. 1779, p. 140; Oeuvres, t. 4, Paris, a. 1869, p. 377.

(13) Journal math. pur. appl., s. 1, t. 18, a. 1853, p. 73.

L' esistenza d' infinite soluzioni è un corollario immediato delle formole di LEBESGUE, come pure da queste comincia a delinearsi la ragione per la quale le ipotenuse dei triangoli crescono tanto rapidamente. Le formole stesse non richiedono la conoscenza delle soluzioni della (4) e tanto meno delle soluzioni della (5), ma il legame, sfuggito al LEBESGUE, tra le soluzioni della (4) e gli elementi da cui dipendono le soluzioni della (1) nelle formule da lui proposte, dànno luogo ad un inconveniente che nuoce al loro uso e ne rende difficile lo studio: le soluzioni che si ottengono non sono primitive.

3. Noi qui in primo luogo perfezioneremo le formole di LEBESGUE rimovendo l' inconveniente accennato. Dimostreremo a tal uopo che i massimi comuni divisori che si dovrebbero calcolare per rendere primitive le soluzioni di LEBESGUE, sono valori di $X$ nelle soluzioni dell' equazione (4). Risulta così manifesta l' importanza che ha nel problema di FERMAT la risoluzione di quest' altra equazione, la quale può quindi ben dirsi ***la seconda equazione fondamentale.***

La risoluzione in numeri interi dell' equazione (1) sarà ricondotta alla ricerca dei punti razionali della quartica

$$x^4 + 6x^2 + 8x + 5 = y^2. \tag{6}$$

Questa ricerca è intimamente connessa all'altra analoga dei punti razionali della cubica

$$x^3 - 2x = y^2. \tag{7}$$

Il problema generale della determinazione dei punti razionali di una curva algebrica $f(x, y) = 0$, e in particolare di una curva di genere 0 od 1 (supposti interi i coefficienti del polinomio $f(x, y)$) è stato modernamente studiato a larghi tratti dal POINCARÉ ([14]), e per le cubiche, con più ampî sviluppi da B. LEVI ([15]); ma la teoria generale, anche limitatamente alle cubiche, non ha ricevuto ancora un assetto completo e definitivo.

Nel caso di una quartica della forma

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y^2$$

la questione può, com' è noto ([16]), affrontarsi col sussidio delle funzioni ellittiche. Nel caso nostro si può far uso del metodo classico, purchè opportunamente perfezionato, di dedurre da un punto razionale noto della quartica (6) un secondo punto razionale.

Per una quartica della forma indicata si suole generalmente considerare l' ulteriore intersezione della curva con la parabola tangente ad essa nel punto all' infinito (dove la curva ha un tacnodo) e tritangente nel punto razionale dato. Noi modificheremo questo procedimento, raggiungendo lo scopo in modo semplice e completo, considerando invece la parabola che passa semplicemente, in generale, per il punto razionale dato ed ha ulteriormente al finito con la quartica una sola intersezione.

---

([14]) H. POINCARÉ. Journ. math. pur. appl., s. 5, t. 7, a. 1901, p. 161.

([15]) *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie*, Atti della R. Acc. delle sc. di Torino, t. 41, a. 1905-6, p. 739 (Nota I); t. 43, a. 1907-8, p. 99 (Nota II), p. 413 (Nota III), p. 672 Nota IV).

([16]) Cfr. É. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 2e éd., t. 2. Paris, a. 1911, p. 215-219; e cfr. pure: L' Intermédiaire des Math.. Question 4732, proposée par A. GÉRARDIN, t. 24, a. 1917, p, 49, et réponse de G. HUMBERT, t. 25, a. 1918, p. 18.

Verremo in conseguenza a definire un'operazione razionale che iterata sulla soluzione $x_0 = -1$, $y_0 = -2$ della (6), corrispondente alla soluzione minima $x = y = z = 1$ della (1), dà tutte le soluzioni della (6), e quindi tutti i triangoli corrispondenti alle soluzioni della (1).

Nella successione

$$\Delta_0\,,\ \Delta_1\,,\ \Delta_2\,,\ldots,\ \Delta_n\,,\ldots$$

dei triangoli così ottenuti, questi risultano ordinati per valori crescenti dell'ipotenusa, e sarà dimostrato che l'ipotenusa, del triangolo $\Delta_n$ cresce con $n$ non meno rapidamente di $9^{n(n+1)}$.

Ne risultano anche ordinate per valori crescenti della $X$ le soluzioni della seconda equazione fondamentale, soluzioni cui daremo il nome di *antitriangoli*:

$$\nabla_0\,,\ \nabla_1\,,\ \nabla_2\,,\ldots,\ \nabla_n\,,\ldots$$

Stabiliremo fra i triangoli e gli antitriangoli delle relazioni di ricorrenza, in base alle quali si può dire che un triangolo $\Delta_n$ genera i due triangoli $\Delta_{2n}$ e $\Delta_{2n+1}$, e che un antitriangolo $\nabla_n$ genera i triangoli $\Delta_{2n-1}$ e $\Delta_{2n}$. Per le relazioni stesse quindi la risoluzione della prima equazione fondamentale viene avvicendata con la risoluzione della seconda. Ma troveremo pure delle relazioni, notevoli per la loro semplicità, fra i soli elementi dei triangoli e fra i soli elementi degli antitriangoli, per le quali ciascuna equazione acquista una risoluzione autonoma.

La proprietà dell'insieme dei punti razionali della cubica (7), di essere addensato in ogni arco della curva stessa ([17]), sarà estesa facilmente all'insieme dei punti razionali della quartica (6), e permetterà di dimostrare l'esistenza d'infiniti triangoli di FERMAT propriamente detti, e d'infiniti triangoli *torricelliani*, cioè soddisfacenti alle tre condizioni del problema di TORRICELLI.

Stabilendo in fine un criterio per riconoscere se un triangolo ed un antitriangolo generano un triangolo torricelliano, e spingendo i calcoli sino alla determinazione di $\Delta_6$ e $\nabla_6$ conchiuderemo che il primo triangolo torricelliano della successione è $\Delta_{12}$; esso è anche il triangolo torricelliano di minima ipotenusa, la quale per altro è data da un numero di 165 cifre.

## I triangoli rettangoli soddisfacenti alla condizione *b*) del problema di Torricelli.

4. Son note e si stabiliscono facilmente le formole dei *numeri pitagorici*, cioè dei numeri interi, primi tra loro, $M$, $P$, $Q$ che soddisfano alla condizione *(equazione pitagorica)*:

$$M^2 = P^2 + Q^2\,, \tag{8}$$

e che perciò possono considerarsi come rappresentanti l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo.

---

([17]) Tale proprietà relativamente ad una cubica razionale qualunque, dotata d'infiniti punti razionali, è stata enunciata da H. POINCARE l. c. ([14]), p. 173, e dimostrata in duplice modo da B. LEVI, l. c. ([15]), Nota I. p. 756.

Si osserverà in primo luogo che i numeri $P$ e $Q$ non possono essere entrambi dispari, perchè in questo caso il secondo membro (8) sarebbe il doppio di un numero dispari e non potrebbe essere eguale ad un quadrato. Ed allora, supposto pari $P$, dalla (8) segue

$$\frac{M+Q}{2} \cdot \frac{M-Q}{2} = \left(\frac{P}{2}\right)^2,$$

e se ne deduce che i numeri $\frac{M+Q}{2}$ e $\frac{M-Q}{2}$, essendo primi tra loro, devono essere eguali ciascuno ad un quadrato. Posto dunque:

$$\frac{M+Q}{2} = A^2, \quad \frac{M-Q}{2} = B^2,$$

ne risulta

$$M = A^2 + B^2, \quad Q = A^2 - B^2$$

e quindi

$$P = \pm 2AB.$$

Inversamente, si verifica subito che qualunque siano i numeri interi relativi $A$ e $B$, di parità diversa e primi tra loro, le precedenti espressioni per $M$, $P$, $Q$ costituiscono una soluzione ***primitiva***, cioè con numeri primi tra loro, dell' equazione pitagorica (8).

L' ipotesi $A = 0$ dà $M = B^2$, $Q = -B^2$, $P = 0$, e perchè la soluzione sia primitiva si deve assumere $B = \pm 1$; si ottiene così il triangolo degenere:

$$M = 1, \quad Q = 1, \quad P = 0.$$

Supponendo invece $B = 0$ si ha

$$M = 1, \quad Q = 1, \quad P = 0.$$

Non si altera la generalità assumendo $A$ non negativo, anzi in tal' ipotesi, com'è facile riconoscere, a coppie diverse di valori per $A$ e $B$ corrispondono sistemi differenti di numeri pitagorici. Adunque [18]:

*Tutti i sistemi di numeri pitagorici sono dati dalle formole*:

$$M = A^2 + B^2, \quad P = 2AB, \quad Q = A^2 - B^2, \tag{9}$$

*essendo* A *un numero intero non negativo qualunque*, B *un numero intero relativo qualunque, primo con* A *e di parità diversa da quella di* A.

---

[18] DIOFANTO, Opera t. 1, Leipzig a. 1893, p. 90. PITAGORA aveva indicato le soluzioni particolari della forma:

$$M = n^2 + (n+1)^2, \quad P = 2n(n+1), \quad Q = 2n + 1,$$

che si deducono dalle (9) assumendo $A = n$, $B = n + 1$, per $n$ intero qualunque; e PLATONE le soluzioni particolari ($A = n$, $B = 1$):

$$M = n^2 + 1, \quad P = 2n, \quad Q = n^2 - 1;$$

cfr. PROCLI *Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, Leipzig, a. 1873, p. 428-9.

Il numero $M$ risulta sempre positivo, $P$ dello stesso segno di $B$, e $Q$ positivo o negativo secondo che $A$ è maggiore o minore di $|B|$.

Per rappresentare geometricamente il triangolo corrispondente ad un sistema (9) di numeri pitagorici, tenendo anche conto dei segni dei cateti, basta riferire i punti del piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ed assumere come vertici del triangolo i punti di coordinate:

$$(0, 0)\,, \quad (2AB, 0)\,, \quad (2AB,\ A^2 - B^2)\,.$$

5. Volendo ora ricercare i triangoli soddisfacenti alla condizione *b*) del problema di Torricelli, cioè tali che la somma dei cateti $P$, $Q$ sia un quadrato, conviene, più generalmente, ricercare quelli pei quali la somma (algebrica) $P + Q$ sia eguale in valore assoluto ad un quadrato:

$$|P + Q| = S^2.$$

Ma basterà evidentemente ricercare i triangoli pei quali è

$$P + Q = S^2\,, \tag{10}$$

perchè gli altri si ottengono da questi cambiando il segno tanto a $P$ che a $Q$, ossia cambiando $A$ in $|B|$ e $B$ in $-A$.

I triangoli che soddisfano a questa condizione e pei quali inoltre $P$ e $Q$ sono entrambi positivi, si diranno del tipo ***ellittico***, gli altri pei quali $P$ e $Q$ sono di segno contrario, del tipo ***iperbolico***.

La condizione (10) per le (9) diventa

$$2AB + A^2 - B^2 = S^2\,,$$

quindi

$$(A + B + S)\,(A + B - S) = 2B^2.$$

Supposto $B \neq 0$ se ne deduce

$$\frac{A + B + S}{B} = \frac{2B}{A + B - S}$$

e però

$$\frac{A + S}{B} = \frac{B - A + S}{B + A - S}\,.$$

Denotando con $\frac{u}{v}$ il valore comune di questi due rapporti, essendo $u$, $v$ numeri primi tra loro e $v > 0$, si deduce

$$\frac{A - S}{B} = \frac{v - u}{v + u}\,,$$

e quindi

$$\frac{A}{B} = \frac{u^2 + v^2}{2v\,(u + v)}\,, \qquad \frac{S}{B} = \frac{u^2 + 2uv - v^2}{2v\,(u + v)}\,.$$

Supponiamo in primo luogo che $u$ e $v$ siano entrambi dispari.

Allora $\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ e $v(u+v)$ sono primi tra loro. Infatti, se questi due numeri ammettessero un divisore primo comune, questo sarebbe dispari perchè tale è $\frac{1}{2}(u^2+v^2)$, e dovrebbe dividere $v(u+v)(u-v)$ ossia $v(u^2-v^2)$, e quindi $u^2-v^2$ assieme ad $u^2+v^2$, ma allora dividerebbe $2u^2$ e $2v^2$, e ciò è assurdo. Pertanto, essendo anche $A$ e $B$ primi tra loro ed $A>0$, dalle ultime eguaglianze si trae:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2}(u^2+v^2) \\ B = v(u+v) \\ S = \frac{1}{2}(u^2+2uv-v^2)\,. \end{cases}$$

Considerando infine il caso che $u$ e $v$ siano di parità diversa, si dimostra come sopra che $u^2+v^2$ e $2v(u+v)$ sono primi tra loro, e perciò si ottengono le formole

$$\begin{cases} A = u^2+v^2 \\ B = 2v(u+v) \\ S = u^2+2uv-v^2\,. \end{cases}$$

Si riconosce però subito che ogni triangolo dato da queste formole con $u$ e $v$ di parità diversa, si può anche ottenere dalle formole (11) per valori dispari di $u$, $v$. Considerando infatti un triangolo dato da $A$ e $B$ per valori di $u$ e $v$ di parità diversa, e posto

$$u_1 = v-u\,, \qquad v_1 = v+u\,,$$

$u_1$ e $v_1$ risultano entrambi dispari, e denotando con $A_1$ e $B_1$ i valori che si ottengono per $A$ e $B$, mediante le (11), cambiandovi $u$ in $u_1$ e $v$ in $v_1$, si ha

$$A_1 = \frac{1}{2}(u_1^2+v_1^2) = \frac{1}{2}[(v-u)^2+(v+u)^2] = u^2+v^2 = A\,,$$

$$B_1 = v_1(u_1+v_1) = 2v(u+v) = B\,,$$

e però il triangolo è anche dato da $A_1$ e $B_1$ con le formole (11).

Se poi è $B=0$, allora si ha

$$M=1\,, \quad P=0, \quad Q=1\,;$$

la condizione (10) è soddisfatta, ma il triangolo (degenere) non può dirsi nè del tipo ellittico nè del tipo iperbolico: lo diremo del tipo *parabolico*. Esso si ottiene pure dalle (11) assumendo $v=1$ e $u=-1$.

È infine da notare che le (11) per coppie diverse di valori (dispari) di $u$ e $v$ dànno triangoli distinti. Infatti, essendo

$$A = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\,, \quad B = v(u + v)\,, \quad S = \frac{1}{2}(u^2 + 2uv - v^2)\,,$$

$$A' = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2)\,, \quad B' = v'(u' + v')\,, \quad S' = \frac{1}{2}(u'^2 + 2u'v' - v'^2)\,,$$

se il triangolo definito da $A$, $B$ coincide con quello definito da $A'$, $B'$, deve aversi $A = A'$, $B = B'$, e però $2A + 2B = 2A' + 2B'$ ossia

$$u^2 + 2uv + 3v^2 = u'^2 + 2u'v' + 3v'^2.$$

D' altra parte, dovendo essere $S = \pm S'$, si ha

$$u^2 + 2uv - v^2 = \pm (u'^2 + 2u'v' - v'^2)\,,$$

e si trae o

$$v^2 = v'^2 \qquad \text{oppure} \qquad (u + v)^2 = 2v'^2\,,$$

ma la seconda eguaglianza è manifestamente assurda, e la prima, essendo $v$ e $v'$ positivi, dà $v = v'$, e quindi, poichè $B = B'$, è pure $u = u'$.

Esprimendo per $u$ e $v$, mediante le (11), gli elementi $M$, $P$, $Q$ del triangolo, dati dalle (2), si conchiude:

*Le formole*

$$(12) \qquad \begin{cases} M = \frac{1}{4}\,[(u^2 + v^2)^2 + 4v^2(u + v)^2] \\ P = v(u + v)(u^2 + v^2) \\ Q = \frac{1}{4}\,[(u^2 + v^2)^2 - 4v^2(u + v)^2] \end{cases}$$

*dànno tutti i triangoli soddisfacenti alla condizione* (10), *ciascuno una sola volta, quando si assumono per* u, v *valori interi, dispari, primi tra loro,* v *positivo ed* u *positivo o negativo.*

6. Diremo che un triangolo, del tipo ellittico o iperbolico, è di *1ª specie* se $|P| > |Q|$, di *2ª specie* se $|P| < |Q|$.

Ricerchiamo le relazioni che devono intercedere tra $u$ e $v$ perchè il tringolo sia ellittico o iperbolico, e di 1ª o di 2ª specie.

Poniamo

$$x = \frac{u}{v}\,,$$

e teniamo presenti le (12).

Perchè $P$ sia positivo occorre e basta che sia $x > -1$. Se questa condizione è soddisfatta, perchè $Q$ risulti positivo è necessario e sufficiente che si abbia

$$(x^2 + 1)^2 - 4(x + 1)^2 > 0$$

ossia

$$(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 3) > 0$$

o anche, poichè il secondo fattore è sempre positivo:

$$x^2 - 2x - 1 > 0 .$$

Adunque, perchè $P$ e $Q$ siano entrambi positivi (caso ellittico), occorre e basta che sia $x$ maggiore di $-1$ e non appartenente all'intervallo $(f, f')$, se $f, f'$ sono le radici dell'equazione

$$x^2 - 2x - 1 = 0 .$$

Si ha

$$f = 1 - \sqrt{2}, \qquad f' = 1 + \sqrt{2},$$

Se invece $x$ appartiene all'intervallo $(f, f')$, allora il triangolo è del tipo iperbolico, e di 1ª specie, perchè in virtù di (10) si ha $P > |Q|$.

Il triangolo è pure del tipo iperbolico se $P < 0$, ossia se $x < -1$, ma allora esso è di 2ª specie, perchè dalla (10) risulta $Q > |P|$.

Resta a vedere, nell'ipotesi che il triangolo sia del tipo ellittico, quando esso è di 1ª o di 2ª specie. Si osservi a tal fine che se un triangolo è del tipo ellittico e di 1ª specie, si deve avere $P > Q > 0$, ossia

$$2AB > A^2 - B^2 > 0$$

o anche

$$1 < \frac{A^2}{B^2} < 2\frac{A}{B} + 1 ,$$

donde, essendo $B > 0$,

$$1 < \frac{A}{B} < 1 + \sqrt{2} .$$

E allora dalle (11) si trae

$$2(x + 1) < x^2 + 1 < 2(1 + \sqrt{2})(x + 1) ,$$

cioè $x$ dev'essere esterno all'intervallo $(f, f')$ e interno all'intervallo $(g, g')$, se $g, g'$ sono le radici dell'equazione

$$x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x - (2\sqrt{2} + 1) = 0 .$$

Si ha

$$g = 1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{1 + \sqrt{2}} , \qquad g' = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{1 + \sqrt{2}} .$$

I valori approssimati, con quattro cifre decimali, dei numeri

$$f\,,\qquad f'\,,\qquad g\,,\qquad g'$$

sono rispettivamente

$$0,4142\,,\qquad 2,4142\,,\qquad -0,6933\,,\qquad 5,5217\,.$$

Essendo

$$-1 < g < f < f' < g'$$

si conchiude:

*Un triangolo è del tipo ellittico se è*

$$-1 < x < f \qquad \textit{oppure} \qquad x > f'\,,$$

*e di 1ª specie se*

$$g < x < f \qquad \textit{oppure} \qquad f' < x < g'\,,$$

*di 2ª specie se*

$$-1 < x < g \qquad \textit{oppure} \qquad x > g'\,.$$

*È invece del tipo iperbolico, e di 1ª o di 2ª specie secondo che si ha*

$$f < x < f' \qquad \text{o} \qquad x < -1\,.$$

## I triangoli di Fermat e il gruppo ciclico Γ.

7. Chiameremo *triangolo di* FERMAT (in senso lato) un triangolo rettangolo in numeri interi (primitivo), la cui ipotenusa $M$ sia un quadrato, e i cateti $P$, $Q$ soddisfino alla condizione (10).

E diremo *triangolo torricelliano* un triangolo soddisfacente alle tre condizioni del problema di TORRICELLI (art. 1), ossia un triangolo di FERMAT del tipo ellittico (art. 5), soddisfacente alla condizione che la somma dell' ipotenusa e del cateto maggiore sia un quadrato.

Se dunque un triangolo di FERMAT del tipo ellittico (e però $P$ e $Q$ positivi) è torricelliano, dovrà essere soddisfatta l' una o l' altra delle due condizioni:

$$M + P \text{ eguale ad un quadrato,} \qquad M + Q \text{ eguale ad un quadrato,}$$

secondo che $P$ è maggiore o minore di $Q$. Ora la 2ª condizione non può essere soddisfatta, perchè dalle (9) risulta che $M + Q$ è uguale al doppio di un quadrato; mentre la 1ª condizione lo è sempre perchè

$$M + P = (A + B)^2.$$

Pertanto alla terza condizione del problema di TORRICELLI può sostituirsi l'altra

$$P > Q\,,$$

cioè che il cateto pari sia maggiore del cateto dispari. Adunque:

*I triangoli torricelliani sono i triangoli di* FERMAT *del tipo ellittico e di 1ª specie.*

8. Siano $M$, $P$, $Q$ l' ipotenusa e i cateti di un triangolo di FERMAT. Saranno allora soddisfatte le condizioni

$$M = R^2, \quad P + Q = S^2;$$

quindi, posto

$$T = P - Q,$$

e notando che

$$2(P^2 + Q^2) = (P + Q)^2 + (P - Q)^2,$$

si ottiene

$$2R^4 - S^4 = T^2.$$

cioè i numeri $R$, $S$, $T$ devono soddisfare all' equazione fondamentale (1). Ottenuta una soluzione $R$, $S$, $T$ di questa equazione, si ricavano per $M$, $P$, $Q$ le espressioni :

$$M = R^2, \quad P = \frac{1}{2}(S^2 + T), \quad Q = \frac{1}{2}(S^2 - T),$$

ma perchè $P$ risulti pari bisogna assumere $T$ positivo o negativo secondo che il suo valore assoluto sia congruo a $-1$ o a $1$ secondo il mod. 4.

Una soluzione dell' equazione fondamentale è

$$R = 1, \quad S = 1, \quad T = -1;$$

essa fornisce il triangolo di FERMAT del tipo parabolico

$$M = 1, \quad P = 0, \quad Q = 1.$$

Vedremo in seguito che da questo si possono dedurre tutti gli altri.

Se introduciamo la condizione $M = R^2$ nella prima (12) si ottiene

$$(u^2 + v^2)^2 + 4v^2(u + v)^2 = 4R^2.$$

Posto quindi

$$x = \frac{u}{v}, \qquad y = \pm \frac{2R}{v^2}, \tag{13}$$

si ha

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x + 1)^2 = y^2$$

o anche

$$x^4 + 6x^2 + 8x + 5 = y^2. \tag{14}$$

La ricerca di tutti i triangoli di FERMAT è così ricondotta alla risoluzione, in numeri razionali, di questa equazione. Una soluzione razionale $(x, y)$ di essa si dirà di $I^a$ o di

*2ª classe* se, posto $x$ sotto la forma $\frac{u}{v}$, con $u$, $v$ interi primi tra loro, risultano $u$, $v$ entrambi dispari o di parità diversa.

Tutte le soluzioni di 2ª classe si ottengono facilmente da quelle della prima: basta osservare che se $(x, y)$ è una soluzione razionale della (14), si ottiene un'altra soluzione razionale di questa, ma di classe diversa, cambiando $x$, $y$ in

$$\frac{1-x}{1+x}, \quad \frac{2y}{1+x}.$$

Alle soluzioni di 2ª classe non corrispondono triangoli di FERMAT differenti da quelli forniti dalle soluzioni di 1ª classe (art. 5).

L'equazione (14), nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, rappresenta una curva del quart'ordine, che diremo *quartica base*. Essa è costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse delle $x$, ciascuno situato tutto da una banda del detto asse.

Ad un punto $(x_0, y_0)$ di questa curva ne possiamo far corrispondere un altro $(x'_0, y'_0)$ che diremo *associato* al primo, considerando l'ulteriore intersezione (al finito) della curva con la parabola del fascio

$$y = x^2 - 2\xi + 1, \tag{15}$$

passante per il punto $(x_0, y_0)$. Eliminando infatti $y$ tra questa equazione e la (14) si ottiene l'equazione di 2º grado in $x$:

$$(\xi + 1)\,x^2 + 2x - (\xi^2 - \xi - 1) = 0, \tag{16}$$

potendosi escludere, come più sotto vedremo, l'ipotesi $\xi = -1$.

Pertanto è

$$x'_0 = -x_0 - \frac{2}{\xi_0 + 1}, \qquad y'_0 = x'^2_0 - 2\xi_0 + 1,$$

essendo

$$\xi_0 = \frac{1}{2}(x_0^2 + 1 - y_0),$$

e però

$$x'_0 = -x_0 - \frac{4}{x_0^2 - y_0 + 3}, \qquad y'_0 = y_0 + x'^2_0 - x_0^2.$$

Devesi notare che se $(x, y)$ è un punto di 1ª classe, tale è anche l'associato $(x', y')$. Infatti, si deduce allora, tenendo presenti le (13), che $u$, $v$ sono entrambi dispari e

$$\xi = \frac{\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \mp R}{v^2},$$

e poichè il numeratore è pari e il denominatore è dispari, si deve porre

$$\xi = \frac{2\xi_1}{\xi_2}, \tag{17}$$

essendo $\xi_2$ dispari e primo con $\xi_1$. Se ne deduce:

$$x' = -\frac{u(2\xi_1 + \xi_2) + 2v\xi_2}{v(2\xi_1 + \xi_2)},$$

ed essendo i termini della frazione entrambi dispari resta provato l' asserto.

Potendo limitarci a considerare sulla quartica soltanto i punti di prima classe, resta in particolare esclusa l' ipotesi $\xi = -1$.

9. Denotiamo con $\Phi$ l' operazione che fa passare da un punto $(x, y)$ della quartica al punto associato $(x', y')$, e che perciò è definita dalle relazioni (art. 8):

$$x' = -x - \frac{4}{x^2 - y + 3}, \qquad y' = y + x'^2 - x^2.$$

Denotiamo inoltre con $\Omega$ l' operazione che porta il punto $(x, y)$ nel punto $(x, -y)$ simmetrico rispetto all' asse delle ascisse. Evidentemente $\Phi$ e $\Omega$ sono operazioni di 2° grado:

$$\Phi^2 = 1, \qquad \Omega^2 = 1.$$

Si ponga ora

$$\Psi = \Omega\Phi.$$

L' operazione $\Psi$ fa passare dal punto $(x, y)$ della quartica al punto $(x', -y)$, e, come vedremo, non ha un grado finito, e perciò applicata ad un punto razionale della quartica, dà, per iterazione, quanti punti razionali si vogliano di questa.

Partiamo dal punto

$$x_0 = -1, \qquad y = -2,$$

che corrisponde all'ipotesi $u = -1$, $v = 1$, e dà il triangolo di Fermat di tipo parabolico, già considerato (art. 8); e poniamo per ogni $n$ intero positivo:

$$(x_n, y_n) = \Psi(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

cosicchè $x_n$, $y_n$ si ottengono mediante le formole di ricorrenza:

$$\left\{ \begin{aligned} x_n &= -x_{n-1} - \frac{4}{x_{n-1}^2 - y_{n-1} + 3} \\ y_n &= -y_{n-1} + x_{n-1}^2 - x_n^2. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Evidentemente

$$(x_n,\ y_n) = \Psi^n (x_0,\ y_0).$$

D' altra parte, essendo

$$\Psi^{-1} = \Phi\Omega = \Omega\Psi\Omega ,$$

si ha

$$\Psi^{-n} = \Omega\Psi^n\Omega ,$$

quindi

$$\Psi^{-n}\Omega = \Omega\Psi^n ,$$

e però

$$\Psi^{-n} (x_0,\ -y_0) = (x_n,\ -y_n).$$

Ora intanto si riconosce subito che il punto $(x_0, -y_0)$ è l'unico punto razionale della quartica) associato a sè stesso:

$$\Phi (x_0,\ -y_0) = (x_0,\ -y_0),$$

e quindi

$$(x_0,\ -y_0) = \Psi^{-1} (x_0,\ y_0).$$

Si ha dunque

$$\Psi^{-(n+1)} (x_0,\ y_0) = (x_n,\ -y_n) ,$$

cioè le potenze, di esponente negativo, di $\Psi$ dànno i punti razionali simmetrici, rispetto all' asse delle $x$, di quelli dati dalle potenze d' esponente non negativo, e perciò ad esse non corrispondono nuovi triangoli di FERMAT.

E utile pei calcoli sapere che il valore di $x_{n+2}$ si ottiene pei valori di $x_n$, $x_{n+1}$, $y_{n+1}$, con la semplice formola:

$$x_{n+2} = x^n + \frac{2y_{n+1}}{2x_{n+1} - 1}. \tag{19}$$

Infatti dalla prima (18) si ha

$$x_{n+2} = -x_{n+1} - \frac{4}{x_{n+1}^2 - y_{n+1} + 3} = x_n + \frac{4}{x_n^2 - y_n + 3} - \frac{4}{x_{n+1}^2 - y_{n+1} + 3} =$$

$$= x_n - \left(\frac{4}{x_{n+1}^2 - y_{n+1} + 3} - \frac{4}{x_{n+1}^2 + y_{n+1} + 3}\right) - \left(\frac{4}{x_{n+1}^2 - y_{n+1} + 3} - \frac{4}{x_n^2 - y_n + 3}\right).$$

Ora essendo

$$y_{n+1} = -y_n + x_n^2 - x_{n+1}^2 ,$$

$$(x_{n+1}^2 - y_{n+1} + 3)(x_{n+1}^2 + y_{n+1} + 3) = (x_{n+1}^2 + 3)^2 - y_{n+1}^2 =$$

$$= (x_{n+1}^4 + 6x_{n+1}^2 + 9) - (x_{n+1}^4 + 6x_{n+1} + 8x_{n+1} + 5) = -8x_{n+1} + 4 ,$$

risulta

$$\frac{4}{x_{n+1}^2 - y_{n+1} + 3} - \frac{4}{x_{n+1}^2 + y_{n+1} + 3} = \frac{8y_{n+1}}{-8x_{n+1} + 4} = -\frac{2y_{n+1}}{2x_{n+1} - 1} ,$$

$$\frac{4}{x_{n+1}^2 + y_{n+1} + 3} - \frac{4}{x_n^2 - y_n + 3} = 0 ,$$

e se ne trae la (19).

Effettuando i calcoli si ottiene

$$x_1 = \frac{1}{3} , \qquad y_1 = \frac{26}{9} ;$$

$$x_2 = -\frac{55}{3} , \qquad y_2 = -\frac{3\,050}{9} ;$$

$$x_3 = \frac{2\,071}{113} , \qquad y_3 = \frac{4\,330\,034}{113^2} ;$$

$$x_4 = \frac{104\,441}{151\,759} , \qquad y_4 = -\frac{84\,844\,905\,938}{151\,759^2} .$$

I quadrati delle metà dei numeratori delle frazioni irriducibili che esprimono le $y$ sono, per la seconda (13), le ipotenuse dei corrispondenti triangoli di FERMAT.

Denotando con $\Delta_n$ il triangolo corrispondente a $(x_n, y_n)$, si ottiene la successione dei triangoli

$$\Delta_0 , \quad \Delta_1 , \quad \Delta_2 , \ldots , \quad \Delta_n , \ldots$$

Uno studio ulteriore delle formole (18) ci permetterà di dimostrare che i triangoli della successione così ottenuta sono *tutti* i triangoli di FERMAT, e che nella successione stessa essi risultano ordinati per valori crescenti delle ipotenuse.

Per conseguenza, operando sul punto $(x_0, y_0)$ della quartica (e quindi su di un punto razionale qualunque, di 1ª classe, di essa) con le operazioni del gruppo ciclico $\Gamma$ generato da $\Psi$:

$$\ldots . \Psi^{-n} , \ldots , \Psi^{-2} , \Psi^{-1} , \Psi^0 , \Psi , \Psi^2 , \ldots , \Psi^n \ldots ,$$

si ottengono tutti i punti razionali, di 1ª classe, della quartica stessa.

**Formole di V. A. Lebesgue. Esistenza d'infiniti triangoli torricelliani.**

10. Vediamo come deve assumersi il parametro razionale $\xi$ nel fascio di parabole (15) perchè le intersezioni di queste con la quartica siano punti di 1ª classe.

Le ascisse dei punti d'incontro di una qualunque di queste parabole con la quartica sono le radici dell'equazione (16), e però, essendo esclusa l'ipotesi $\xi = -1$ (art. 8), si ha:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{\xi^3 - 2\xi}}{\xi + 1}, \qquad x' = \frac{-1 - \sqrt{\xi^3 - 2\xi}}{\xi + 1}.$$

Perchè dunque i detti punti d'incontro siano razionali occorre e basta che $\xi^3 - 2\xi$ sia il quadrato di un numero razionale. La ricerca dei punti razionali della quartica è così ricondotta alla ricerca delle soluzioni razionali della cubica

$$\xi^3 - 2\xi = \zeta^2. \tag{20}$$

Si noti che si ha

$$\zeta^2 - 1 = (\xi + 1)(\xi^2 - \xi - 1),$$

e perciò l'ipotesi $\zeta = \pm 1$ non può presentarsi con un valore razionale di $\xi$ se non è $\xi = -1$, ciò che si esclude.

Pertanto i punti della quartica, corrispondenti ad una soluzione $(\xi, \zeta)$ della (20), sono dati dalle formole:

$$(21)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\zeta - 1}{\xi + 1} \\ y = x^2 - 2\xi + 1 \end{cases} \qquad (22)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{-\zeta - 1}{\xi + 1} \\ y' = x'^2 - 2\xi + 1 \end{cases}$$

o anche dalle formole

$$(23)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\xi^2 - \xi - 1}{\zeta + 1} \\ y = -(\xi + 1) - \dfrac{2x - 1}{\xi + 1} \end{cases} \qquad (24)\quad \begin{cases} x' = -\dfrac{\xi^2 - \xi - 1}{\zeta - 1} \\ y' = -(\xi + 1) - \dfrac{2x' - 1}{\xi - 1}. \end{cases}$$

11. L'equazione (20), nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(\xi, \zeta)$, rappresenta una cubica composta di due rami, definiti dalle condizioni

$$-\sqrt{2} \leq \xi \leq 0, \qquad \xi \geq +\sqrt{2}, \tag{25}$$

di cui, per conseguenza, il primo è finito, chiuso, tangente nell'origine all'asse delle $\zeta$, formato da due archi simmetrici rispetto all'asse delle $\xi$, congiungenti i punti di quest' as-

se d' ascissa $-\sqrt{2}$ e 0; l' altro aperto, simmetrico rispetto all'asse delle $\xi$, e incontrante quest' asse nel punto d' ascissa $+\sqrt{2}$.

Essendo

$$2\zeta \frac{d\zeta}{d\xi} = 3\xi^2 - 2\,, \qquad \frac{d\zeta}{d\xi} + \zeta \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = 3\xi\,,$$

ne risulta che il ramo chiuso ha un punto d' ordinata positiva massima per $\xi = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

12. Vediamo ora come variano i punti $(x, y)$, $(x', y')$ della quartica, quando il corrispondente punto $(\xi, \zeta)$ descrive uno dei rami della cubica.

Importa innanzi tutto osservare che si ha

$$y > 0 \qquad \text{se} \qquad \xi \leq 0\,,$$

$$y < 0 \qquad \text{se} \qquad \xi > 0\,.$$

Infatti, dall' equazione (14) della quartica si deduce

$$y^2 - x^4 = 6x^2 + 8x + 5 = \frac{1}{6}\left[(6x+4)^2 + 14\right] > 0\,,$$

e però

$$(y - x^2)(y + x^2) > 0\,,$$

quindi, tenendo presente la (15), se $y > 0$ si ha $y - x^2 = 1 - 2\xi > 0$, ossia $\xi < \frac{1}{2}$, e, per le (25), $\xi \leq 0$; se invece $y < 0$ si ha $y - x^2 = 1 - 2\xi < 0$ e perciò $\xi > 0$.

Ciò posto, dalla prima (21) si deduce

$$(\xi+1)^2 \frac{dx}{d\xi} = \zeta'(\xi+1) - \zeta + 1 = \frac{(3\zeta^2-2)(\xi+1) - 2\zeta^2 + 2\zeta}{2\zeta} = \frac{(\zeta+1)^2 + 3(\xi^2-1) + 4\xi}{2\zeta}\,,$$

e allora, fatta in primo luogo l' ipotesi $\xi > 0$, e però $\xi > \sqrt{2}$, risulta $\frac{dx}{dy}$ dello stesso segno di $\zeta$. Pertanto, quando $\xi$ va da $\sqrt{2}$ a $+\infty$, se $\zeta > 0$, $x$ cresce e va da $1 - \sqrt{2}$ a $+\infty$ e se, $\zeta < 0$, $x$ decresce e va da $1 - \sqrt{2}$ a $-\infty$. E poichè, come sopra si è osservato, essendo $\xi > 0$, è $y < 0$, e d' altra parte il cambiamento di $\zeta$ in $-\zeta$ muta il punto $(x, y)$ nel suo associato $(x', y')$, si conchiude:

1 — ***Quando il punto*** $(\xi, \zeta)$ ***descrive con continuità il ramo aperto della cubica, i corrispondenti punti*** $(x, y)$, $(x', y')$ ***della quartica descrivono con continuità, ma in senso inverso, il ramo della quartica situato sul semipiano negativo*** $(y < 0)$.

Supponiamo ora $\xi \leq 0$. Posto $\xi = -\xi'$, sarà $0 \leq \xi' \leq \sqrt{2}$.

Sia $\zeta > 0$. Da (21) e (23) si deduce

$$x = \frac{\zeta - 1}{1 - \xi'} = \frac{\xi'^2 + \xi' - 1}{\zeta + 1} .$$

Il numeratore della prima frazione è crescente (art. 11) quando $\xi'$ va da 0 a $\sqrt{\frac{2}{3}}$, mentre il denominatore decresce, quindi $x$ è crescente; quando $\xi'$ va da $\sqrt{\frac{2}{3}}$ a $\sqrt{2}$, $\zeta$ decresce e dalla seconda frazione si deduce che $x$ continua a crescere. Pertanto, quando $\xi'$ va da 0 a $\sqrt{2}$, $x$ cresce e va da $-1$ a $1 + \sqrt{2}$.

Se $\zeta = -\zeta'$, si ha

$$x = -\frac{\zeta' + 1}{1 - \xi'} = \frac{\xi'^2 + \xi' - 1}{1 - \zeta'} .$$

Dalla prima frazione si deduce che quando $\xi'$ cresce da 0 a $\sqrt{\frac{2}{3}}$, poichè allora $\zeta'$ è crescente, $x$ decresce; e quando $\xi'$ cresce da $\sqrt{\frac{2}{3}}$ a 1, poichè allora $\zeta'$ è decrescente e tende a 1, dalla seconda frazione si deduce che $x$ continua a decrescere e tende a $-\infty$. Adunque se $\xi'$ cresce da 0 a 1, $x$ decresce da $-1$ a $-\infty$.

Finalmente, quando $\xi'$ va da 1 a $\sqrt{2}$, dalla prima frazione si deduce che $x$ decresce da $+\infty$ a $1 + \sqrt{2}$.

Ed allora come sopra si conchiude:

·2 — *Quando il punto* $(\xi, \zeta)$ *descrive con continuità il ramo chiuso della cubica, i corrispondenti punti* (x, y), (x', y') *della quartica descrivono con continuità, ma in senso inverso, il ramo della quartica situato sul semipiano positivo* (y>0).

13. Poichè due punti razionali della quartica, simmetrici rispetto all' asse delle $x$, dànno uno stesso triangolo di Fermat, potremo considerare soltanto i punti razionali del ramo della quartica che si trova sul semipiano positivo, punti che, come abbiamo notato nell'art. precedente, corrispondono all' ipotesi $\xi \leq 0$; oppure potremo considerare soltanto i punti razionali dell' altro ramo, corrispondenti all' ipotesi $\xi > 0$. Noi faremo qui quest' ultima ipotesi che ci permetterà di ottenere subito le formole di ricorrenza segnalate da V. A. Lebesgue per la determinazione di tutte le soluzioni dell' equazione fondamentale, e, per conseguenza, di tutti i triangoli di Fermat.

Potendo poi limitarci a considerare i punti di 1ª classe, $\xi$ deve avere la forma (17), e però

$$\xi = \frac{2\xi_1}{\xi_2}$$

essendo $\xi_1$, $\xi_2$ numeri interi positivi, e $\xi_2$ dispari e primo con $\xi_1$. Allora si ha

$$\xi^3 - 2\xi = \frac{4\xi_1 (2\xi_1^2 - \xi_2^2)}{\xi_2^3} ,$$

e perchè il secondo membro risulti eguale al quadrato di un numero razionale, tanto il numeratore che il denominatore, che sono primi tra loro, devono essere eguali al quadrato di un numero intero, e lo stesso deve dirsi di $\xi_1$ e $2\xi_1^2 - \xi_2^2$, che sono pure primi tra loro. Si deve dunque porre:

$$\xi_1 = r^2, \qquad \xi_2 = s_2, \qquad 2\xi_1^2 - \xi_2^2 = t^2,$$

con $r$, $s$, $t$ numeri interi; ma l' ultima eguaglianza allora diviene

$$2r^4 - s^4 = t^2,$$

cioè i numeri $r$, $s$, $t$ devono costituire una soluzione dell' equazione fondamentale.

Inversamente, se $(r, s, t)$ è una soluzione (in numeri interi, primi tra loro) dell'equazione fondamentale, $r$, $s$, $t$ saranno certamente numeri dispari, e si ottengono due punti di 1ª classe della quartica ponendo in (21) e (22):

$$\xi = \frac{2r^2}{s^2}, \qquad \zeta = \frac{2rt}{s^3}.$$

Si ottiene:

$$(26) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-s^3 + 2rt}{s(2r^2 + s^2)} \\[2ex] y = \dfrac{(-s^3 + 2rt)^2 - (4r^2 - s^2)(2r^2 + s^2)^2}{s^2(2r^2 + s^2)^2} \end{cases}$$

le quali, dopo avere osservato che si ha

$$(27) \qquad \begin{cases} -s^3 + 2rt = 2r(rs + t) - s(2r^2 + s^2), \\ (-s^3+2rt)^2 - (2r^2-s^2)(2r^2+s^2)^2 = (-s^3+2rt)^2-(4r^4-s^4)(2r^2+s^2) = \\ \qquad = (-s^3+2rt)^2-(2t^2+s^4)(2r^2+s^2) = -2s^2(rs+t)^2, \end{cases}$$

possono mettersi sotto la forma:

$$(28) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2r(rs+t)}{s(2r^2+s^2)} - 1 \\[2ex] y = -\dfrac{2s^2(rs+t)^2 + 2r^2(2r^2+s^2)^2}{s^2(2r^2+s^2)^2}. \end{cases}$$

Cambiando $t$ in $-t$ si ottengono le formole relative al punto $(x', y')$ associato a $(x, y)$:

$$(29) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{2r(rs-t)}{s(2r^2+s^2)} - 1 \\[2ex] y' = -\dfrac{2s^2(rs-t)^2 + 2r^2(2r^2+s^2)^2}{s^2(2r^2+s^2)^2}. \end{cases}$$

Si riconosce subito che due punti associati siffatti sono sempre distinti, perchè l' ipotesi $t = 0$ non è ammissibile; ad essi quindi corrispondono triangoli distinti (art. 5).

14. Sia ora $(R, S, T)$ quella soluzione dell' equazione fondamentale che corrisponde al punto $(x, y)$ della quartica, dato dalle (28).

Denotando con $d$ il massimo comun divisore dei numeri $2r^2 + s^2$, $rs + t$;

$$d = \mathrm{D}\,(2r^2 + s^2,\ rs + t)\,, \tag{30}$$

dalle (28) si traggono le formole di V. A. Lebesgue (art. 2, nota [13])):

$$\left\{\begin{aligned} R &= r^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 + s^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2 \\ S &= 2r^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2 - s^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 \\ T &= 2\left[r^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 - s^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2\right]^2 - \left[2r^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2 + s^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2\right]^2 . \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Le espressioni di $R$, $S$ si ottengono subito dalle (28) tenendo presenti le (11) e (13), quella di $T$ potrebbe stabilirsi con semplice verifica, ma si può ricavare subito dopo che sono state ottenute le espressioni relative ai cateti $P$ e $Q$ del triangolo corrispondente alla soluzione stessa.

A tal fine è bene tenere presente la relazione

$$(s^2 - r^2)(2r^2 + s^2) = (rs + t)(rs - t)\,, \tag{32}$$

dalla quale, moltiplicandone ambo i membri per $2r^2 + s^2$, si trae l' altra

$$r^2(2r^2+s^2)^2 - s^2(rs+t)^2 = 2r^2(rs+t)^2 + s^2(2r^2+s^2)^2 - 2rs(rs+t)(2r^2+s^2). \tag{33}$$

In base a queste dalle (12) con facili calcoli si ottiene:

$$\left\{\begin{aligned} P &= 4rs\,\frac{(2r^2+s^2)(rs+t)}{d^2}\left[r^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 - s^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2\right] = \\ &= \left[2r^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2 + s^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2\right]^2 - \left[r^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 + s^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2\right]^2, \\ Q &= \left[r^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 - s^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2\right]^2 - 4r^2s^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2 = \\ &= 2\left[r^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 - s^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2\right]^2 - \left[r^2\left(\frac{2r^2+s^2}{d}\right)^2 + s^2\left(\frac{rs+t}{d}\right)^2\right]^2. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Ed assumendo

$$T = Q - P$$

se ne ricava la 3ª (31).

Con le formole (31) restano fissati i segni per $R$, $S$, $T$; in particolare, $R$ è sempre positivo. È utile osservare che risulta

$$S \equiv -1\,, \qquad T \equiv 1 \pmod{8}.$$

Per ottenere la soluzione $(R', S', T')$ corrispondente al punto $(x', y')$ associato ad $(x, y)$ non ci sarebbe da far altro che cambiare nelle (31) $t$ in $-t$, e quindi $d$ in $d'$, essendo

$$d' = \mathrm{D}(2r^2 + s^2, \quad rs - t)\,; \tag{35}$$

se non che, dovendo stabilire, come si vedrà in seguito, un ordine tra i triangoli corrispondenti a due punti associati, e un contrassegno per distinguerli, assumeremo per $T'$ l' espressione analoga alla 3ª (31) ma cambiata di segno, cosicchè risulterà

$$T' \equiv -1 \pmod{8}.$$

Le formole per $R'$, $S'$, $T'$ sono dunque:

$$(36)\quad \begin{cases} R' = r^2\left(\dfrac{2r^2+s^2}{d'}\right)^2 + s^2\left(\dfrac{rs-t}{d'}\right)^2 \\[2ex] S' = 2r^2\left(\dfrac{rs-t}{d'}\right)^2 - s^2\left(\dfrac{2r^2+s^2}{d'}\right)^2 \\[2ex] T' = \left[2r^2\left(\dfrac{rs-t}{d'}\right)^2 + s^2\left(\dfrac{2r^2+s^2}{d'}\right)^2\right]^2 - 2\left[r^2\left(\dfrac{2r^2+s^2}{d'}\right)^2 - s^2\left(\dfrac{rs-t}{d'}\right)^2\right]^2. \end{cases}$$

Importa notare che i numeri $d$, $d'$ sono divisori complementari di $2r^2 + s^2$, cioè

$$dd' = 2r^2 + s^2. \tag{37}$$

Infatti, $d$ e $d'$, dividendo rispettivamente i numeri $rs+t$, $rs-t$ che non ammettono divisori dispari comuni, sono primi tra loro, quindi $2r^2+s^2$ è divisibile per il loro prodotto, sicchè dalla (32) si ha:

$$(s^2 - r^2)\,\frac{2r^2+s^2}{dd'} = \frac{rs+t}{d}\cdot\frac{rs-t}{d'}\,,$$

e il 2° fattore del 1° membro, essendo primo con ciascuno dei fattori del 2° membro, è uguale all'unità.

I triangoli corrispondenti alle soluzioni $(R, S, T)$, $(R', S', T')$ si denoteranno con

$$\Delta(R, S, T)\,, \qquad \Delta(R', S', T')\,,$$

e si diranno *generati* dal triangolo $\Delta(r, s, t)$, ed *associati* tra loro, il primo d'*ordine pari*, il secondo d'*ordine dispari*.

Dalle (31) e (36) segue

$$R \geqq r^2, \qquad R' \geqq r^2.$$

L'eguaglianza non può aver luogo se non è $rs + t = 0$ nel primo caso, $rs - t = 0$ nel secondo, ma allora, in virtù di (32), si riconosce che in entrambi i casi è

$$r^2 = s^2 = t^2 = 1,$$

e però il triangolo generatore è il degenere $\Delta_0$, il quale effettivamente genera sè stesso e un triangolo d'ipotenusa eguale a $13^2$, già denotato con $\Delta_1$ nell'art. 9. Adunque:

·1 — *Il triangolo del tipo parabolico $\Delta_0$ genera sè stesso e un triangolo $\Delta_1$ d'ipotenusa maggiore; ogni altro triangolo ne genera due distinti le cui ipotenuse superano il quadrato dell'ipotenusa del triangolo generatore.*

Per conseguenza:

·2 — *Esistono infiniti triangoli di* Fermat.

Convenendo che dei due triangoli associati $\Delta_0$ e $\Delta_1$ sia d'ordine pari il primo, ricordando che allora dev'essere $S \equiv -1$ e $T \equiv 1 \pmod{4}$, è da porre

$$\Delta_0 = \Delta(1, -1, 1), \qquad \text{ossia} \qquad r_0 = 1, \ s_0 = -1, \ t_0 = 1,$$

e quindi

$$\Delta_1 = \Delta(13, -1, 239), \qquad \text{ossia} \qquad r_1 = 13, \ s_1 = -1, \ t_1 = 239.$$

Il triangolo $\Delta_1$ genera due triangoli $\Delta_2$ e $\Delta_3$ (cfr. art. 9):

$$\Delta_2 = \Delta(1525, \ 1343, \ 2\,750\,257),$$

$$\Delta_3 = \Delta(2\,165\,017, \ 2\,372\,159, \ -3\,503\,833\,734\,241).$$

e poichè $r_3 < r_2^2$, sono questi i triangoli di Fermat di minima ipotenusa dopo $\Delta_0$ e $\Delta_1$.

Si riconosce facilmente che

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta_1$ | è del tipo | iperbolico, | e di | $1^a$ | specie |
| $\Delta_2$ | „ | „ | „ | $2^a$ | „ |
| $\Delta_3$ | „ | ellittico | „ | „ | „ (e però non torricelliano). |

I calcoli per la determinazione dei triangoli successivi in base alle formole (31) e (36) di Lebesgue sono laboriosissimi, sia perchè gli elementi $r, s, t$ diventano presto molto grandi, sia perchè occorre effettuare il calcolo dei massimi comuni divisori $d, d'$. A tale inconveniente sarà rimediato con un perfezionamento delle formole di Lebesgue, che colle-

gando la risoluzione della 1ª equazione fondamentale con quella della 2ª, ci permetterà di ordinare la totalità dei triangoli di Fermat, e di dimostrare l'identità della successione che così si ottiene, con quella generata dalle potenze di esponente intero non negativo dell'operazione $\Psi$ (art. 9).

15. Dalla prop. ·2 del precedente art. segue subito l'esistenza d'infiniti punti razionali della cubica base (20) sia sul ramo chiuso che sul ramo aperto. Vogliamo ora stabilire una proprietà importante dell'insieme di questi punti (cfr. art. 3 e nota [18])), dalla quale ci sarà possibile dedurre l'esistenza d'infiniti triangoli di Fermat propriamente detti (cioè del tipo ellittico) e d'infiniti triangoli torricelliani.

·1 — *L'insieme dei punti razionali della cubica base è addensato in ogni arco della cubica, ossia ogni punto della cubica è punto limite dell'insieme dei punti razionali di essa.*

Basterà dimostrare la proprietà per il ramo chiuso della cubica, perchè essa allora avrà luogo, di conseguenza, per il ramo aperto.

Denotiamo con $J$ l'insieme dei punti razionali situati sul ramo chiuso, e dimostriamo innanzi tutto che un punto qualunque $A$ di $J$ è punto limite di $J$. L'insieme $J$, infatti, ammette almeno un punto limite: sia $L$ un tal punto ed $M$ l'ulteriore intersezione della retta $AL$ con la cubica. Se $B$ è un punto razionale tendente ad $L$, l'ulteriore intersezione $C$ della retta $AB$ con la cubica è un punto razionale tendente a $M$, quindi $M$ è un punto limite di punti razionali: ed allora, poichè la retta $LM$ congiunge due punti limiti di punti razionali, l'ulteriore intersezione di essa con la cubica, cioè $A$, è manifestamente un punto limite di $J$.

Dimostriamo ora che un punto limite qualunque $H$ di $J$ è tale tanto da un lato che dall'altro di esso.

Ammettiamo infatti, per contrario, che da un lato di $H$ esistano punti $D$ tali che negli archi $HD$ non cada alcun punto di $J$: sia $HK$ l'arco estremo superiore degli archi $HD$. Il punto $K$ è manifestamente un punto limite di $J$ dalla parte dove non sono i punti $D$. Sia $E$ un punto razionale tendente a $K$, ed $F$ l'ulteriore intersezione della retta $HE$ con la cubica: $F$ è un punto limite di punti razionali. Il raggio $FK$ incontra la cubica ulteriormente in un punto $G$ del ramo chiuso, e sarà $G$ un punto limite di $J$. Quando $E$ tende a $K$, $F$ tende ad $L$, e il raggio $FK$ tende ad $LK$, quindi $G$ tende ad $H$, e poichè $G$ resta sempre dalla parte della retta $HE$ dov'è $K$, esso tende ad $H$ dalla parte dei punti $D$, ma allora nell'arco $HK$, sopra considerato, cadrebbero infiniti punti di $J$, e ciò è in contraddizione con l'ipotesi.

Sia ora $N$ un punto qualunque del ramo chiuso. Se $N$ non fosse punto limite di $J$, esso sarebbe contenuto in un arco che non ammette, nel suo interno, alcun punto di $J$, e l'arco estremo superiore degli archi aventi tale proprietà, avrebbe, per estremi, punti limiti di $J$ soltanto da un lato, e ciò è assurdo.

Adunque ogni punto del ramo considerato è punto limite di punti razionali.

Dalle prop. 12 ·1 ·2 allora segue che

·2 — *Ogni punto della quartica base è punto limite dei punti razionali di essa.*

E poichè, come abbiamo visto nell'art. 12, quando il punto $(\xi,\zeta)$ descrive un ramo della cubica, le ascisse $x$, $x'$ dei corrispondenti punti della quartica prendono qualsivoglia valore reale, positivo, nullo o negativo, si conchiude, in base ai risultati dell'art. 6, che

·3 — *Esistono quanti si vogliano triangoli di* FERMAT, *sia del tipo ellittico che iperbolico, e, per ciascun tipo, sia di prima che di seconda specie.*

In particolare (art. 7):

·4 — *Esistono infiniti triangoli torricelliani.*

16. Ricerchiamo ora le condizioni cui devono soddisfare $r$, $s$ perchè il triangolo $\Delta(r, s, t)$ generi un triangolo del tipo ellittico o iperbolico, di 1ª o di 2ª specie.

Se $(x, y)$ è un punto razionale del ramo della quartica base, che si trova nel semipiano negativo $(y < 0)$, il corrispondente punto $(\xi, \zeta)$ della cubica ha l' ascisca $\xi$ positiva, e perciò questa è data dalla radice positiva dell'equazione di 2° grado in $\xi$, dedotta dalla (16):

$$\xi^2 - (x^2 + 1)\,\xi - (x + 1)^2 = 0, \tag{38}$$

e però

$$\xi = \frac{(x^2 + 1) + \sqrt{(x^2 + 1)^2 + 4\,(x + 1)^2}}{2}.$$

Denotiamo con $\xi_a$ il valore di $\xi$ corrispondente al valore $a$ di $x$, e calcoliamo i valori (art. 6):

$$\xi_{-1}, \quad \xi_f, \quad \xi_{f'}, \quad \xi_g, \quad \xi_{g'}.$$

Si ha

$$\xi_{-1} = 2,$$

poi ricordando che

$$f = 1 - \sqrt{2}, \qquad f' = 1 + \sqrt{2},$$

e che $f$, $f'$ sono radici dell' equazione $x^2 - 2x - 1 = 0$, si ha

$$\xi_f = \sqrt{2}, \qquad \xi_{f'} = 4 + 3\sqrt{2}.$$

Come pure, essendo (art. 6).

$$g = 1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \qquad g' = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{1 + \sqrt{2}},$$

e notando che $g$, $g'$ sono radici dell' equazione

$$x^2 - 2\,(1 + \sqrt{2})\,x - (2\sqrt{2} + 1) = 0,$$

cosicchè si ha

$$g^2 + 1 = 2\,(1 + \sqrt{2})(g + 1), \qquad (g^2 + 1)^2 + 4(g + 1)^2 = 4\,(4 + 2\sqrt{2})(g + 1)^2,$$

si deduce

$$\xi_g = (g+1)(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}) = (2+\sqrt{2}-2\sqrt{1+\sqrt{2}})(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}),$$

e analogamente

$$\xi_{g'} = (g'+1)(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}) = (2+\sqrt{2}+2\sqrt{1+\sqrt{2}})(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}).$$

Ciò posto, ricordando (art. 12) che, quando $\xi$ va da $\sqrt{2}$ a $+\infty$, $x$ cresce e va da $f$ ossia da $1-\sqrt{2}$ a $+\infty$ se $\zeta > 0$, e decresce e va da $1-\sqrt{2}$ a $-\infty$ se $\zeta < 0$, si conchiude, tenendo presente il risultato dell' art. 6, che uno dei triangoli corrispondenti al punto $(\xi, \zeta)$ è del tipo ellittico se

$$\xi > \xi_{f'} \qquad \text{oppure} \qquad \xi_f < \xi < \xi_{-1},$$

ed ellittico di 1ª specie, cioè torricelliano, se

$$\xi_{g'} > \xi > \xi_{f'} \qquad \text{oppure} \qquad \xi_f < \xi < \xi_g .$$

Se dunque $\Delta(r, s, t)$ è il triangolo generatore, essendo allora

$$\xi = \frac{2r^2}{s^2},$$

ed osservando che $\xi$ è sempre maggiore di $\sqrt{2}$ ossia di $\xi_f$, posto

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}\xi_f}, \qquad F' = \sqrt{\frac{1}{2}\xi_{f'}}, \qquad G = \sqrt{\frac{1}{2}\xi_g}, \qquad G' = \sqrt{\frac{1}{2}\xi_{g'}},$$

si deduce la prop.:

·1 — *Perchè uno dei triangoli di* FERMAT *generati da* $\Delta$(r, s, t) *sia del tipo ellittico, occorre e basta che si abbia*

$$\frac{r}{|s|} > F', \qquad \textit{oppure} \qquad \frac{r}{|s|} < 1, \tag{39}$$

*e perchè esso sia del tipo ellittico e di* 1ª *specie, cioè torricelliano, occorre e basta che sia*

$$G' > \frac{r}{|s|} > F', \qquad \textit{oppure} \qquad \frac{r}{|s|} < G. \tag{40}$$

Analogamente:

·2 — *Perchè uno dei triangoli di* FERMAT *generati da* $\nabla$(r, s, t) *sia del tipo iperbolico occorre e basta che si abbia*

$$\frac{r}{|s|} < F', \qquad \textit{oppure} \qquad \frac{r}{|s|} > 1, \tag{41}$$

*ed esso è di 1ª o di 2ª specie secondo che è soddisfatta la prima o la seconda condizione.*

Volendo indicare brevemente il *carattere* di un triangolo, cioè il tipo e la specie insieme, adoperiamo i simboli $E$, $I$ secondo che il triangolo è del tipo ellittico od iperbolico, e diamo ai simboli stessi l' indice 1 o 2 secondo che il triangolo è di 1ª o di 2ª specie.

Ordinando allora per valori crescenti i punti 1, $F$, $F'$, $G$, $G'$, e segnando corrispondentemente i caratteri che hanno i triangoli generati da $\Delta(r, s, t)$ quando il rapporto $r : |s|$ cade in ciascuno degl' intervalli consecutivi determinati dai detti punti, otteniamo il quadro

| $F$ | | $G$ | | 1 | | $F'$ | | $G'$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,8404 | | 0,8778 | | | | 2,0301 | | 4,0488 | | |
| | $E_1 I_1$ | | $E_2 I_1$ | | $I_1 I_2$ | | $E_1 I_2$ | | $E_2 I_2$ | |

dove per maggiore comodità sotto i punti $F$, $G$,... abbiamo segnato i loro valori approssimati con quattro cifre decimali.

Per conseguenza due triangoli associati non possono essere entrambi del tipo ellittico, possono essere entrambi del tipo iperbolico, ma di specie diversa.

Ulteriori considerazioni ci permetteranno di determinare il carattere di ciascuno dei triangoli associati in corrispondenza all' ordine di essi.

Si noti che la 2ª (39) è soltanto soddisfatta allora e solo quando il triangolo $\Delta(r, s, t)$ è del tipo ellittico, dunque:

·3 — *Un triangolo di* FERMAT *del tipo ellittico genera sempre uno ed un solo triangolo di* FERMAT *del tipo ellittico.*

La prop. inversa non è vera: ad es. $\Delta_3$ è del tipo ellittico ed è generato dal triangolo $\Delta_1$ del tipo iperbolico.

## Risoluzione della seconda equazione fondamentale come conseguenza della prima, ed inversamente.

17. Abbiamo già osservato (art. 13) che l' ipotesi $\xi \leq 0$ non può dare triangoli di FERMAT diversi da quelli che si ottengono supponendo $\xi > 0$; ma l' ipotesi $\xi \leq 0$ merita di essere pure considerata perchè, come vedremo, essa permette di esprimere le soluzioni della seconda equazione fondamentale per quelle della prima, e reciprocamente, fornendo così delle relazioni utilissime, e notevoli anche pei risultati inattesi cui conducono per la risoluzione indipendente delle due equazioni.

Poniamo dunque ora $\xi = -\xi'$, con $\xi' \geq 0$. Poichè possiamo, al solito, limitarci alla considerazione dei punti della quartica base che sono di 1ª classe, $\xi'$ deve avere la forma (17):

$$\xi' = \frac{2\xi_1}{\xi_2},$$

essendo $\xi_1$ un numero intero non negativo, e $\xi_2$ un numero intero positivo dispari e primo con $\xi_1$. Allora dalla (20) risulta

$$\zeta^2 = \frac{4\xi_1(\xi_2^2 - 2\xi_1^2)}{\xi_2^3},$$

e poichè il denominatore è primo col numeratore, e $\xi_1$ è primo con $\xi_2^2 - 2\xi_1^2$, se ne deduce che $\xi_1$, $\xi_2$ e $\xi_2^2 - 2\xi_1^2$ devono essere quadrati di numeri interi. È dunque da porre

$$\xi_1 = \sigma^2, \qquad \xi_2 = \rho^2, \qquad \xi_2^2 - 2\xi_1^2 = \tau^2.$$

Ma l' ultima in virtù delle prime due diviene

$$\rho^4 - 2\sigma^4 = \tau^2,$$

e però i numeri $\rho$, $\sigma$, $\tau$ devono costituire una soluzione (intera) della seconda equazione fondamentale.

Inversamente, se $(\rho, \sigma, \tau)$ è una soluzione dell' equazione in discorso, e si pone

$$\xi = -\frac{2\sigma^2}{\rho^2}, \qquad \zeta = \frac{2\sigma\tau}{\rho^3},$$

al punto razionale $(\xi, \zeta)$ del ramo chiuso della cubica base corrispondono due punti razionali associati $(x, y)$ $(x_{-1}, y_{-1})$ della quartica nel semipiano positivo, che son dati, in virtù di (21) e (22), dalle formole:

$$(42)\ \begin{cases} x = -\dfrac{2\sigma(\rho\sigma - \tau)}{\rho(\rho^2 - 2\sigma^2)} - 1 \\[2ex] y = \dfrac{2\rho^2(\rho\sigma - \tau)^2 + 2\sigma^2(\rho^2 - 2\sigma^2)^2}{\rho^2(\rho^2 - 2\sigma^2)^2} \end{cases} \qquad (43)\ \begin{cases} x_{-1} = -\dfrac{2\sigma(\rho\sigma + \tau)}{\rho(\rho^2 - 2\sigma^2)} - 1 \\[2ex] y_{-1} = \dfrac{2\rho^2(\rho\sigma + \tau)^2 + 2\sigma^2(\rho^2 - 2\sigma^2)^2}{\rho^2(\rho^2 - 2\sigma^2)^2}. \end{cases}$$

A questi punti corrispondono gli stessi triangoli di FERMAT che ai punti $(x, -y)$, $(x_{-1}, -y_{-1})$. Tali triangoli si diranno *associati negativamente* (cioè in base alla condizione $\xi \leq 0$).

Poichè, come risulta dalla (16), il valore di $\xi$ è pienamente determinato dalla somma delle ascisse di due punti associati, risulta chiaro che due triangoli associati negativamente non possono esserlo *positivamente* (cioè, nel senso dell' art. 13, in base alla condizione $\xi > 0$).

Due triangoli associati negativamente non possono coincidere se non è, come risulta dalle (42) e (43),

$$\sigma = 0, \qquad \text{e però} \qquad \rho^2 = \tau^2 = 1,$$

non essendo ammissibile l'ipotesi $\tau = 0$. Ne segue che il punto $(-1, 2)$ è associato a sè stesso, e il corrispondente triangolo $\Delta_0$ è l' unico che sia associato negativamente a sè stesso.

Se $(\rho, \sigma, \tau)$ è una soluzione della 2ª equazione fondamentale, noi diremo, per ragion di analogia, che i numeri $\rho$, $\sigma$, $\tau$ costituiscono un *antitriangolo*, che denoteremo con $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$. Assumeremo $\rho$ sempre positivo, e ci riserviamo di fissare più sotto i segni di $\sigma$ e $\tau$.

I due triangoli corrispondenti ai punti della quartica $(x, y)$, $(x_{-1}, y_{-1})$ dati dalla soluzione $(\rho, \sigma, \tau)$ mediante le formole (42) e (43), si diranno generati dall'antitriangolo $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$.

18. Prima di procedere oltre nello studio delle soluzioni della 2ª equazione fondamentale, è opportuno eseguire una ricerca analoga a quella fatta nell'art. 16, avente cioè lo scopo di determinare le condizioni cui devono soddisfare $\rho$ e $\sigma$ perchè l'antitriangolo $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ generi un triangolo ellittico o iperbolico, di 1ª o di 2ª specie. Qui è da considerare la radice negativa $-\xi'$ dell'equazione (38), quindi

$$\xi' = \frac{-(x^2+1)+\sqrt{(x^2+1)^2+4(x+2)^2}}{2}.$$

Denotando con $\xi'_a$ il valore di $\xi'$ corrispondente al valore $a$ di $x$, abbiamo (cfr. art. 16):

$$\xi'_f = 3\sqrt{2}-4, \qquad \xi'_{f'} = \sqrt{2},$$

$$\xi'_g = \left(2+\sqrt{2}-2\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1\right), \quad \xi'_{g'}=\left(2+\sqrt{2}+2\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1\right).$$

Ciò posto, ricordando (art. 12) che, se $\zeta > 0$, quando $\xi'$ va da 0 a $\sqrt{2}$, $x$ cresce e va da $-1$ a $1+\sqrt{2}$, e se $\zeta < 0$, quando $\xi'$ va da 0 a 1, $x$ decresce e va da $-1$ a $-\infty$, e quando $\xi'$ va da 1 a $\sqrt{2}$, $x$ decresce da $+\infty$ a $1+\sqrt{2}$, si deduce, tenendo presente il risultato dell'art. 6, che uno dei triangoli corrispondenti al punto $(-\xi', \zeta)$ è del tipo ellittico se si ha

$$\xi' < \xi'_f \qquad \text{oppure} \qquad 1 < \xi' < \xi'_{f'}$$

e del tipo ellittico e di 1ª specie cioè torricelliano, se si ha

$$\xi'_g < \xi' < \xi'_f \qquad \text{oppure} \qquad \xi'_{g'} < \xi' < \xi'_{f'}.$$

Se quindi $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ è l'antitriangolo generatore, essendo allora $\xi' = \frac{2\sigma^2}{\rho^2}$, ed osservando che è sempre $\xi'$ minore di $\sqrt{2}$ ossia di $\xi'$, posto

$$H = \sqrt{\tfrac{1}{2}\xi'_f}, \quad H' = \sqrt{\tfrac{1}{2}\xi'_{f'}}, \quad K = \sqrt{\tfrac{1}{2}\xi'_g}, \quad K' = \sqrt{\tfrac{1}{2}\xi'_{g'}},$$

si deduce la prop.:

·1 — *Perchè uno dei tringoli di* FERMAT *generati da* $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ *sia del tipo ellittico occorre e basta che si abbia*

$$\frac{|\sigma|}{\rho} < H \qquad \textit{oppure} \qquad \frac{|\sigma|}{\rho} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

*e perchè esso sia del tipo ellittico e di 1ª specie, cioè torricelliano, occorre e basta che sia*

$$K < \frac{|\sigma|}{\rho} < H \qquad \textit{oppure} \qquad K' < \frac{|\sigma|}{\rho} < H'.$$

Analogamente:

2 — *Perchè uno dei triangoli di* Fermat *generati da* $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ *sia del tipo iperbolico occorre e basta che sia*

$$\frac{|\sigma|}{\rho} > H \qquad \textit{oppure} \qquad \frac{|\sigma|}{\rho} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

*ed esso è di* 1ª *o di* 2ª *specie secondo che è soddisfatta la prima o la seconda condizione.*

Per conseguenza, ordinando i punti $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, H, H', K, K'$ per valori crescenti, e segnando corrispondentemente i caratteri (coi simboli dell' art. 16) che hanno i triangoli generati da $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ quando il rapporto $|\sigma| : \rho$ cade in ciascuno degl' intervalli consecutivi determinati dai detti punti, si ottiene il quadro:

| 0 | | $K$ | | $H$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $K'$ | | $H'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0,1746 | | 0,3483 | | 0,7071 | | 0,8055 | | 0,8409 |
| | $E_2 I_2$ | | $E_1 I_2$ | | $I_1 I_2$ | | $E_2 I_1$ | | $E_1 I_1$ | |

dove, sotto ciascun punto, è segnato il corrispondente valore approssimato con quattro cifre decimali.

Per conseguenza due triangoli negativamente associati non possono essere entrambi del tipo ellittico, possono essere entrambi del tipo iperbolico, ma di specie diversa.

19. Da quanto si è detto nell' art. 17 risulta che un triangolo qualunque di Fermat si può considerare come generato sia da un triangolo che da un antitriangolo. Un triangolo ed un antitriangolo che generano uno stesso triangolo si diranno *corrispondenti*. Poichè tanto un triangolo che un antitriangolo generano due triangoli, ad un triangolo corrispondono due antitriangoli, e ad un antitriangolo due triangoli.

Ci proponiamo ora di determinare gli antitriangoli corrispondenti a $\Delta(r, s, t)$, e in primo luogo quello, che denotiamo con $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$, da cui è generato il triangolo d' ordine pari $\Delta(R, S, T)$.

Il punto $(x, y)$ della quartica, corrispondente $\Delta(R, S, T)$, sarà allora dato dalle (28), e il punto simmetrico $(x, -y)$ dalle (42) o (43), e si può supporre, senza alterare la generalità (non avendo ancora fissato i segni di $\sigma$ e $\tau$). che sia dato dalle (42).

Pertanto risulta in primo luogo:

$$\frac{r(rs+t)}{s(2r^2+s^2)} = -\frac{\sigma(\rho\sigma-\tau)}{\rho(\rho^2-2\sigma^2)}. \tag{44}$$

Osservando poi che dev' essere:

$$y = x^2 - \frac{4r^2}{s^2} + 1, \qquad -y = x^2 + \frac{4\sigma^2}{\rho^2} + 1,$$

se ne trae

$$y = -\frac{2r^2}{s^2} - \frac{2\sigma^2}{\rho^2},$$

e in virtù della 2ª (28):

$$\frac{\sigma^2}{\rho^2} = \frac{(rs+t)^2}{(2r^2+s^2)^2}.$$

Ne segue

$$\rho = \frac{2r^2+s^2}{d}, \qquad \sigma = \lambda\frac{rs+t}{d} \tag{45}$$

denotando con $\lambda$ l' unità positiva o negativa. Noi conveniamo di assumere $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ secondo che $\Delta(r, s, t)$ è d'ordine pari o dispari.

La (44) intanto, in virtù delle (45), diviene

$$\frac{r}{s} = -\lambda\frac{\rho\sigma - \tau}{\rho^2 - 2\sigma^2}, \tag{46}$$

donde

$$s\tau = \lambda r(\rho^2 - 2\sigma^2) + s\rho\sigma; \tag{47}$$

ed essendo

$$\rho^2 - 2\sigma^2 = \frac{(2r^2+s^2)^2 - 2(rs+t)^2}{d^2} = \frac{s(3s^3 + 2r^2s - 4rt)}{d^2},$$

si ottiene infine

$$\tau = \lambda\frac{4rs(r^2+s^2) - t(2r^2 - s^2)}{d^2}. \tag{48}$$

Resta così pienamente determinato, anche nei segni dei suoi elementi, l'antitriangolo $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$.

20. Possiamo inversamente esprimere $r, s, t$ per mezzo di $\rho, \sigma, \tau$.

Difatti, posto

$$\delta = D(\rho^2 - 2\sigma^2, \ \rho\sigma - \tau), \tag{49}$$

si trae

$$r = \mu\frac{\rho\sigma - \tau}{\delta}, \qquad s = -\mu\lambda\frac{\rho^2 - 2\sigma^2}{\delta}, \tag{50}$$

essendo $\mu$ eguale a 1 o a $-1$ secondo che $\rho\sigma - \tau$ è positivo o negativo.

Poi dalle (45) segue

$$\frac{rs + t}{2r^2 + s^2} = \lambda \frac{\sigma}{\rho},$$

e se ne ricava

$$\rho t = \lambda\sigma(2r^2 + s^2) - \rho rs.$$

D' altra parte, per le (50), si ha

$$(51) \qquad 2r^2 + s^2 = \frac{2(\rho\sigma - \tau)^2 + (\rho^2 - 2\sigma^2)^2}{\delta^2} = \frac{\rho(3\rho^3 - 2\rho\sigma^2 - 4\sigma\tau)}{\delta^2},$$

quindi

$$(52) \qquad t = \lambda \frac{4\rho\sigma(\rho^2 - \sigma^2) - \tau(\rho^2 + 2\sigma^2)}{\delta^2}.$$

Le formole (31) che dànno il triangolo $\Delta(R, S, T)$, in virtù delle (45) possono ora mettersi sotto la forma

$$(53) \qquad \begin{cases} R = r^2\rho^2 + s^2\sigma^2 \\ S = 2r^2\sigma^2 - s^2\rho^2 \\ T = 2(r^2\rho^2 - s^2\sigma^2)^2 - (2r^2\sigma^2 + s^2\rho^2)^2. \end{cases}$$

All' espressione di $T$ si può anche dare una forma più semplice notando che si ha

$$2(r^2\rho^2 - s^2\sigma^2)^2 - (2r^2\sigma^2 + s^2\rho^2)^2 = (2r^4 - s^4)(\rho^4 - 2\sigma^4) - 8r^2s^2\rho^2\sigma^2 = t^2\tau^2 - 8r^2s^2\rho^2\sigma^2,$$

quindi

$$(54) \qquad T = t^2\tau^2 - 8r^2s^2\rho^2\sigma^2.$$

Si noti che l'espressione di $R$ ottenuta mediante la 2ª (42) risulta, in virtù delle (50) identica alla 1ª (53), pertanto noi diremo che $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ e $\Delta(r, s, t)$ generano *insieme* il triangolo $\Delta(R, S, T)$, e che $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ è il *primo* antitriangolo corrispondente a $\Delta(r, s, t)$.

21. Consideriamo ora il triangolo d' ordine dispari $\Delta(R', S', T')$ generato da $\Delta(r, s, t)$, e sia $\nabla(\rho', \sigma', \tau')$ l' antitriangolo che genera pure $\Delta(R', S', T')$, e che diremo il *secondo* antitriangolo corrisponde a $\Delta(r, s, t)$.

Il punto $(x', y')$, corrispondente a $\Delta(R', S', T')$, della quartica base sarà allora dato dalle (29), e il punto simmetrico $(x', -y',)$ dalle (42) o (43), col cambiamento di $\rho, \sigma, \tau$ in $\rho', \sigma', \tau'$. Supponendo che quest' altro punto sia dato dalle (43), ciò che non lede la generalità, si ottiene

$$(55) \qquad \frac{r(rs - t)}{s(2r^2 + s^2)} = -\frac{\sigma'(\rho'\sigma' + \tau')}{\rho'(\rho'^2 - 2\sigma'^2)}.$$

D'altra parte come sopra si riconosce che è

$$\frac{\sigma'^2}{\rho'^2} = \frac{(rs - t)^2}{(2r^2 + s^2)^2},$$

donde segue

$$\rho' = \frac{2r^2 + s^2}{d'}, \qquad \sigma' = \lambda \frac{rs - t}{d}, \tag{56}$$

facendo sul segno di $\sigma'$ la stessa convenzione che per il segno di $\sigma$.

Allora la (55) diviene

$$\frac{r}{s} = - \lambda \frac{\rho'\sigma' + \tau'}{\rho'^2 - 2\sigma'^2},$$

donde

$$s\tau' = - \lambda r (\rho'^2 - 2\sigma'^2) - s\rho'\sigma', \tag{57}$$

e poichè

$$\rho'^2 - 2\sigma'^2 = \frac{s(3s^3 + 2r^2 s + 4rt)}{d'^2}, \tag{58}$$

si ottiene

$$\tau' = - \lambda \frac{4rs(r^2 + s^2) + t(2r^2 - s^2)}{d'^2}. \tag{59}$$

E così resta pienamente determinato il 2° antitriangolo corrispondente a $\Delta(r, s, t)$.

Le formole (36), che dànno il triangolo $\Delta(R', S', T')$, possono ora mettersi sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} R' &= r^2\rho'^2 + s^2\sigma'^2 \\ S' &= 2r^2\sigma'^2 - s^2\rho'^2 \\ T' &= 8r^2s^2\rho'^2\sigma'^2 - t^2\tau'^2 \end{aligned}\right. \tag{60}$$

e risulta anche qui che il triangolo $\Delta(R', S', T')$ è generato da $\Delta(r, s, t)$ *assieme* a $\nabla(\rho', \sigma', \tau')$.

Si possono inversamente esprimere $r, s, t$ mediante $\rho', \sigma', \tau'$ pervenendo a formole analoghe alle (50) e (52), ma i risultati già ottenuti sono sufficienti per stabilire ormai quelli completi e definitivi.

## Risoluzione avvicendata delle due equazioni fondamentali. La successione dei triangoli di Fermat e quella degli antitriangoli.

22. Le formole (45), (48) e (56), (59) mostrano come si possono ottenere le soluzioni della 2ª equazione fondamentale a mano a mano che si conoscono quelle della 1ª; in

particolare esse indicano che i numeri $d$, $d'$ che si presentano nella determinazione dei triangoli generati da $\Delta(r, s, t)$, sono i primi elementi degli antitriangoli corrispondenti a $\Delta(r, s, t)$, e precisamente:

$$\rho = d' = D(2r^2 + s^2, \ rs - t), \qquad \rho' = d = D(2r^2 + s^2, \ rs + t),$$

e perciò la 2ª (45) e la 2ª (56) possono anche mettersi sotto la forma

$$(61) \qquad \sigma = \lambda \frac{rs + t}{\rho'}, \qquad \sigma' = -\lambda \frac{rs - t}{\rho},$$

e così pure la (48) e la (59):

$$(62) \quad \tau = \lambda \frac{4rs(r^2 + s^2) - t(2r^2 - s^2)}{\rho'^2}, \qquad \tau' = -\lambda \frac{4rs(r^2 + s^2) + t(2r^2 - s^2)}{\rho^2}.$$

I numeri $\rho$, $\rho'$ si diranno rispettivamente il 1° e il 2° *divisore* del triangolo $\Delta(r, s, t)$; e le espressioni

$$2r^4 + s^4, \qquad \rho^4 + 2\sigma^4$$

che hanno un giuoco importante nella ricerca che segue, si diranno rispettivamente la *norma del triangolo* $\Delta(r, s, t)$ e la *norma dell' antitriangolo* $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$.

Considerando ora i triangoli $\Delta(R, S, T)$, $\Delta(R', S', T')$ generati da $\Delta(r, s, t)$ e procedendo alla determinazione degli antitriangoli corrispondenti ad essi, otterremo delle relazioni importanti tra i divisori dei triangoli generati e le norme del triangolo generatore e degli antitriangoli corrispondenti ad esso. In base a queste relazioni perfezioneremo notevolmente le formole per la determinazione avvicendata dei triangoli e degli antitriangoli, e stabiliremo un ordinamento degli uni e degli altri, che esprime nella maniera più semplice la loro genesi reciproca.

23. Procuriamoci innanzi tutto i divisori del triangolo $\Delta(R, S, T)$. In virtù delle formole (53) abbiamo con semplici calcoli:

$$(63) \qquad 2R^2 + S^2 = (2r^4 + s^4)(\rho^4 + 2\sigma^4);$$

poi, essendo

$$RS = (r^2\rho^2 + s^2\sigma^2)(2r^2\sigma^2 - s^2\rho^2) = \rho^2\sigma^2 t^2 - r^2 s^2 \tau^2,$$

in virtù di (64) si ha

$$(64) \qquad RS - T = (\rho^2\sigma^2 - \tau^2)\, t^2 + r^2 s^2 (8\rho^2\sigma^2 - \tau^2).$$

Ora, tenuta presente la 1ª (62), si trae:

$$\rho'^4(\rho^2\sigma^2 - \tau^2) = (2r^2 + s^2)^2(rs + t)^2 - 16r^2s^2(r^2 + s^2)^2 + 8rst(r^2 + s^2)(2r^2 - s^2) - t^2(2r^2 - s^2)^2,$$

e raccogliendo i termini che hanno a fattore comune il prodotto $rs$, e denotando con $U$ il fattore di questo prodotto, si ottiene

$$\rho'^4(\rho^2\sigma^2 - \tau^2) = t^2[(2r^2 + s^2)^2 - (2r^2 - s^2)^2] + rsU = 8r^2s^2t^2 + rsU,$$

ed essendo

$$U = (2r^2 + s^2)^2(rs + 2t) - 16rs(r^2 + s^2)^2 + 8t(r^2 + s^2)(2r^2 - s^2),$$

poichè

$$2(r^2 + s^2)^2 = (2r^2 + s^2)^2 - (2r^4 - s^4) = (2r^2 + s^2)^2 - t^2,$$

risulta

$$U = (2r^2 + s^2)^2(2t - 7rs) + 8t(r^2s^2 + t^2 + rst).$$

Analogamente si ha

$$\rho'^4(8\rho^2\sigma^2 - \tau^2) = 8(2r^2 + s^2)(rs + t)^2 - 16r^2s^2(r^2 + s^2)^2 + 8rst(r^2 + s^2)(2r^2 - s^2) - t^2(2r^2 - s^2)^2,$$

e raccogliendo i termini che ammettono il fattore $t$, si ottiene

$$\rho'^4(8\rho^2\sigma^2 - \tau^2) = 8r^2s^2t^2 + tV,$$

essendo

$$V = (2r^2 + s^2)^2(7t + 16rs) + 8rs(r^2s^2 + t^2 + rst).$$

La (64) quindi diviene:

$$\rho'^4(RS - T) = 2rstW, \tag{65}$$

avendo posto

$$2W = tU + rsV + 8rst(r^2s^2 + t^2).$$

Introducendo ora in questa le ottenute espressioni per $U$ e $V$ si ricava

$$W = (2r^2 + s^2)^2(8r^2s^2 + t^2) + 4(r^2s^2 + t^2)(rs + t)^2 =$$
$$= (2r^2 + s^2)^2[(2r^2 + s^2)^2 - 2r^4 - 2s^4 + 4r^2s^2] + 2[(rs + t)^2 + (rs - t)^2](rs + t)^2 =$$
$$= (2r^2 + s^2)^4 + 2(rs + t)^4 = \rho'^4(\rho^4 + 2\sigma^4);$$

quindi la (65) assume la forma semplicissima

$$RS - T = 2rst(\rho^4 + 2\sigma^4). \tag{66}$$

Potremo seguire una via analoga per ottenere l'espressione di $RS + T$ per gli elementi di $\Delta(r, s, t)$ e $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$, ma è più semplice dedurre tale espressione da quella di

$S^2 - R^2$ che semplicemente si stabilisce. Infatti, notando in primo luogo che, essendo

$$(67)\qquad (s^2 - r^2)(2r^2 + s^2) = (rs + t)(rs - t), \quad (\rho^2 + \sigma^2)(2\sigma^2 - \rho^2) = (\rho\sigma - \tau)(\rho\sigma + \tau),$$

in seguito alle (45) e (50) si ha

$$(68)\qquad (s^2 - r^2)\rho^2 = \lambda\sigma(rs - t), \qquad (\rho^2 + \sigma^2)s = \lambda r(\rho\sigma + \tau),$$

risulta

$$S + R = \sigma^2(2r^2 + s^2) - \rho^2(s^2 - r^2) = \rho\sigma.\,\lambda(rs + t) - \rho.\,\lambda\sigma(rs - t) = 2\lambda\rho\sigma\tau,$$

$$S - R = r^2(2\sigma^2 - \rho^2) - s^2(\rho^2 + \sigma^2) = r.\,\mu(\rho\sigma - \tau).\,\mu\lambda s - s.\,\lambda r(\rho\sigma + \tau) = -2\lambda rs\tau,$$

quindi

$$(69)\qquad S^2 - R^2 = -4rst\rho\sigma\tau.$$

Cambiando allora, nella 1ª (67), $r, s, t$ in $R, S, T$, e tenute presenti la (63) e la (66), si ottiene

$$(70)\qquad RS + T = -2\rho\sigma\tau(2r^4 + s^4).$$

Per conseguenza, denotando con P, P′ il 1° e il 2° divisore del triangolo $\Delta(R, S, T)$, risulta subito dal confronto della (63) con la (66) e la (70):

$$(71)\qquad \mathrm{P} = \rho^4 + 2\sigma^4, \qquad \mathrm{P}' = 2r^4 + s^4.$$

Adunque:

·1 — *Il triangolo d'ordine pari generato da* Δ (r, s, t) *ha per 1° divisore la norma del primo antitriangolo corrispondente a* Δ (r, s, t), *e per 2° divisore la norma dello stesso triangolo generatore* Δ (r, s, t).

24. Poichè P, P′ sono anche i primi elementi degli antitriangoli corrispondenti a $\Delta(R, S, T)$, denotando questi antitriangoli con

$$\nabla(\mathrm{P}, \Sigma, \mathrm{T}), \qquad \nabla(\mathrm{P}'\ \Sigma', \mathrm{T}'),$$

in base alle formole (61) e in virtù delle (66), (70), (71), dopo avere osservato che, nel nostro caso, poichè $\Delta(R, S, T)$ è d'ordine pari, è da assumere $\lambda = 1$, si ottiene

$$\Sigma = \frac{RS + T}{\mathrm{P}'} = -2\rho\sigma\tau, \qquad \Sigma' = \frac{RS - T}{\mathrm{P}} = 2rst.$$

Le espressioni di T e T′ si potrebbero ottenere ricorrendo alle (62), ma è più breve ricavarle per via indiretta. L' identità

$$(a+b)^4 - 16(a-b)^2 ab = (a^2+b^2-6ab)^2,$$

quando si assume

$$a = \rho^4, \qquad b = 2\sigma^4,$$

dà

$$(\rho^4 + 2\sigma^4)^4 - 32\rho^4\sigma^4\tau^4 = (\rho^8 + 4\sigma^8 - 12\rho^4\sigma^4)^2,$$

ma il primo membro è uguale a $P^4 - 2\Sigma^4$, quindi il secondo è uguale a $T^2$. Osservando poi che, in virtù della 1ª (62) e della (54), essendo $\lambda = 1$, dev'essere $T \equiv -1 \equiv -1$ (mod. 4), si deduce

$$T = 12\rho^4\sigma^4 - \rho^8 - 4\sigma^8 = 8\rho^4\sigma^4 - \tau^4.$$

In modo analogo, quando si pone, nell' identità considerata,

$$a = 2r^4, \qquad b = s^4,$$

si ottiene

$$(2r^4 + s^4)^4 - 32r^4s^4t^4 = (4r^8 + s^8 - 12r^4s^4)^2,$$

e poichè il primo membro è uguale a $P'^4 - 2\Sigma'^4$, il secondo risulta eguale a $T'^2$, ma in virtù della 2ª (62) dev' essere $T' \equiv -T \equiv -1$ (mod. 4), dunque è

$$T' = 12r^4s^4 - 4r^8 - s^8 = 8r^4s^4 - t^4.$$

Riepilogando:

1 — *Il primo e il secondo antitriangolo corrispondenti al triangolo — d' ordine pari — generato da* $\Delta(r, s, t)$ *assieme a* $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$ *sono dati dalle formole:*

$$(72)\quad \begin{cases} P = \rho^4 + 2\sigma^4 \\ \Sigma = -2\rho\sigma\tau \\ T = 8\rho^4\sigma^4 - \tau^4 \end{cases} \qquad\qquad (73)\quad \begin{cases} P' = 2r^4 + s^4 \\ \Sigma' = 2rst \\ T' = 8r^4s^4 - t^4, \end{cases}$$

Poichè, in virtù di queste formole, P, Σ, T si esprimono soltanto per $\rho, \sigma, \tau$, mentre P′, Σ′, T′ si esprimono soltanto per $r, s, t$, diremo che $\nabla(P, \Sigma, T)$ è *generato da* $\nabla(\rho, \sigma, \tau)$, e $\nabla(P', \Sigma', T')$ è *generato da* $\Delta(r, s, t)$.

I detti due antitriangoli si distinguono l' uno d' altro per il fatto che nel primo è $\Sigma \equiv 0$ (mod. 4), nel secondo è $\Sigma' \equiv 2$ (mod. 4).

25. Per determinare gli antitriangoli corrispondenti al triangolo d'ordine dispari generato da $\Delta(r, s, t)$ basta notare che il cambiamento di $t$ in $-t$ muta, nelle formole (63),

(66), (70), gli elementi $\rho, \sigma, \tau$ rispettivamente in $\rho', \sigma', -\tau'$, ed $R, S, T$ rispettivamente in $R', S', T'$.

Per conseguenza si ha

$$
(74) \quad \begin{cases} 2R'^2 + S'^2 = (2r^4 + s^4)(\rho'^4 + 2\sigma'^4)\,, \\ R'S' + S'^2 = -2rst(\rho'^4 + 2\sigma'^4)\,, \qquad R'S' - T' = 2\rho'\sigma'\tau'(2r^4 + s^4)\,, \end{cases}
$$

e denotando con

$$
\nabla(\mathrm{P}_1, \Sigma_1, \mathrm{T}_1)\,, \qquad \nabla(\mathrm{P}'_1, \Sigma'_1, \mathrm{T}'_1)
$$

il primo e il secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta(R', S', T')$, si ha

$$
\mathrm{P}_1 = 2r^4 + s^4, \qquad \mathrm{P}'_1 = \rho'^4 + 2\sigma'^4\,,
$$

cioè:

·1 — *Il triangolo d' ordine pari generato da* $\Delta$(r, s, t) *ha per 1° divisore la norma di* $\Delta$(r, s, t), *e per 2° divisore la norma del secondo antitriangolo corrispondente a* $\Delta$(r, s, t).

Applicando poi le (61), e notando che in questo caso è $\lambda = -1$, si ottiene

$$
\Sigma_1 = -\frac{R'S' + T'}{\mathrm{P}'_1} = 2rst\,, \qquad \Sigma'_1 = -\frac{R'S' - T'}{\mathrm{P}_1} = -2\rho'\sigma'\tau'.
$$

Infine si ricavano subito, come conseguenza dei risultati ottenuti nell' art. precedente, le espressioni per $\mathrm{T}_1$ e $\mathrm{T}'_1$, dopo avere osservato che, in virtù delle (62), dev' essere $\mathrm{T}_1 \equiv T' \equiv -1 \pmod 4$, $\mathrm{T}'_1 \equiv T' \equiv -1 \pmod 4$, e si conchiude:

·2 — *Il primo e il secondo antitriangolo corrispondenti al triangolo — d' ordine dispari — generato da* $\Delta$(r, s, t) *assieme a* $\nabla(\rho', \sigma', \tau')$, *sono dati dalle formole*

$$
(75) \quad \begin{cases} \mathrm{P}_1 = 2r^4 + s^4 \\ \Sigma_1 = 2rst \\ \mathrm{T}_1 = 8r^4s^4 - t^4 \end{cases} \qquad (76) \quad \begin{cases} \mathrm{P}'_1 = \rho'^4 + 2\sigma'^4 \\ \Sigma'_1 = -2\rho'\sigma'\tau' \\ \mathrm{T}'_1 = 8\rho^4\sigma^4 - \tau^4. \end{cases}
$$

Confrontando intanto le (75) con le (73) si rileva l' importante risultato:

·3 — *Il primo antitriangolo corrispondente al triangolo d'ordine dispari, generato da* $\Delta$(r, s, t) *è identico al secondo antitriangolo corrispondente al triangolo d' ordine pari, generato dallo stesso* $\Delta$(r, s, t).

26. Possiamo ora procedere alla determinazione avvicendata dei triangoli e degli antitriangoli. Poniamo

$$
\Delta_n = \Delta(r_n, s_n, t_n)\,, \qquad \nabla_n = \nabla(\rho_n, \sigma_n, \tau_n)\,,
$$

e partiamo dal triangolo di minima ipotenusa $\Delta_0$:

$$\Delta_0 = \Delta(1, -1, 1).$$

Siano $\Delta_0$, $\Delta_1$ il primo e il secondo antitriangolo corrispondenti a $\Delta_0$. Applicando le formole (61) e (62) si ottiene

$$\rho_0 = D(3, 2) = 1, \qquad \rho_0 = 0, \qquad \tau_0 = -1,$$

$$\rho_1 = D(3, 0) = 3, \qquad \sigma_1 = -2 \qquad \tau_1 = 7,$$

e però

$$\nabla_0 = \nabla(1, 0, -1), \qquad \nabla_1 = \nabla(3, -2, 7).$$

Applicando le (53) troviamo che il triangolo d'ordine pari, che è generato da $\Delta_0$ assieme a $\nabla_0$, coincide con $\Delta_0$; l' altro che denotiamo con $\Delta_1$, è generato da $\Delta_0$ e $\nabla_1$ mediante le (60):

$$\Delta_1 = \Delta(13, -1, 239).$$

Il primo antitriangolo corrispondente a $\Delta_1$ è identico (25·3) al secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta_0$, ossia a $\nabla_1$; quindi (25·1) il primo divisore di $\Delta_1$ è uguale alla norma di $\Delta_0$, che è 3, e il secondo divisore è uguale alla norma del secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta_0$, ossia alla norma di $\nabla_1$, che è 113. Indicando con $\nabla_2$ il 2° antitriangolo corrispondente a $\Delta_1$, si ha per le (76):

$$\nabla_2 = \nabla(113, 84, 7\,967)$$

Denotando ora con $\Delta_2$, $\Delta_3$ il primo e il secondo triangolo generati da $\Delta_1$, risulta che $\Delta_2$ è generato da $\Delta_1$ assieme a $\nabla_1$, quindi, per le (53):

$$\Delta_2 = \Delta(1525, 1343, 2\,750\,257),$$

e $\Delta_3$ è generato da $\Delta_1$ assieme a $\nabla_2$, quindi, per le (60):

$$\Delta_3 = \Delta(2\,165\,017, 2\,372\,159, -3\,503\,833\,734\,241).$$

Il primo antitriangolo corrispondente a $\Delta_2$ è generato, mediante le (72), da $\nabla_1$ (che è il primo antitriangolo corrispondente al triangolo che genera $\Delta_2$), quindi esso coincide con $\nabla_2$.

Il secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta_2$, che denotiamo con $\nabla_3$, è generato da $\Delta_1$, per mezzo delle formole (73):

$$\nabla_3 = \nabla(57123, -6214, -3\,262\,580\,153).$$

E così via continuando.

Assumendo per gl' indici dei triangoli e degli antitriangoli che via via si ottengono,

ordinatamente e successivamente i numeri della serie naturale, potremo disporre i triangoli come nel quadro seguente :

$$\Delta_1$$

$$\Delta_2 \qquad \qquad \Delta_3$$

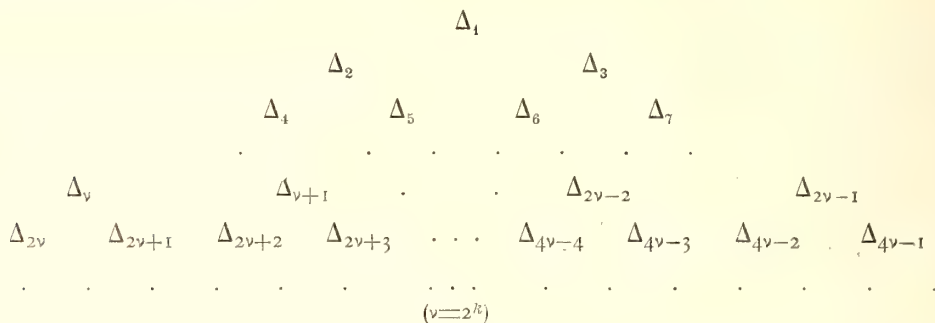
$$\Delta_4 \qquad \Delta_5 \qquad \Delta_6 \qquad \Delta_7$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Delta_\nu \qquad \Delta_{\nu+1} \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \Delta_{2\nu-2} \qquad \Delta_{2\nu-1}$$

$$\Delta_{2\nu} \quad \Delta_{2\nu+1} \quad \Delta_{2\nu+2} \quad \Delta_{2\nu+3} \quad \cdots \quad \Delta_{4\nu-4} \quad \Delta_{4\nu-3} \quad \Delta_{4\nu-2} \quad \Delta_{4\nu-1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(\nu = 2^k)$$

dove sotto un triangolo $\Delta_n$ sono segnati i triangoli $\Delta_{2n}$ e $\Delta_{2n+1}$ che esso genera.

Si noti che la parità dell' ordine di un triangolo viene a coincidere con quella dell' indice.

Fissati gl' indici dei triangoli, restano anche fissati gl' indici degli antitriangoli, e precisamente :

·1 — *Gli antitriangoli corrispondenti a* $\Delta_n$ *sono* $\nabla_n$ *e* $\nabla_{n+1}$; *in altri termini* $\Delta_{2n}$ *è generato da* $\Delta_n$ *assieme a* $\nabla_n$; *e* $\Delta_{2n+1}$ *da* $\Delta_n$ *assieme a* $\nabla_{n+1}$.

Questa proprietà è stata verificata nelle ipotesi $n=1$, $n=2$; ammettiamola dunque pei triangoli delle prime $k-1$ righe del quadro precedente, cioè pei triangoli il cui indice è minore di $2\nu$, e dimostriamo che sussiste pei triangoli della $k^{\text{ima}}$ riga.

Il primo antitriangolo corrispondente a $\Delta_{2\nu}$ (triangolo d'ordine pari generato da $\Delta_\nu$) è l'antitriangolo generato, colle formole (72), dal primo antitriangolo corrispondente a $\Delta_\nu$ che è $\nabla_\nu$. Esso coincide dunque con $\nabla_{2\nu}$, cioè col secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta_{2\nu-1}$, perchè $\nabla_\nu$ è generato (25·2) dal secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta_{\nu-1}$, che è $\nabla_\nu$.

Il 2° antitriangolo corrispondente a $\Delta_{2\nu}$ è dunque da indicarsi con $\nabla_{2\nu+1}$, ed è identico (25·2) al primo antitriangolo corrispondente a $\Delta_{2\nu+1}$.

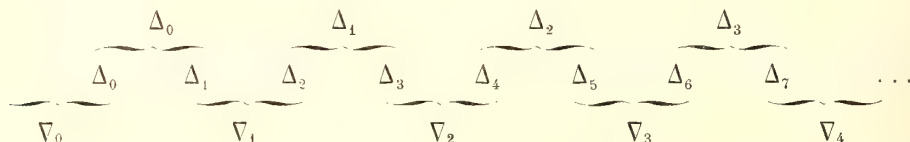
Il 2° antitriangolo $\nabla_{2\nu+2}$ corrispondente a $\Delta_{2\nu+1}$ è generato dal secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta_\nu$, cioè da $\nabla_{\nu+1}$, e coincide col primo antitriangolo corrispondente a $\Delta_{2\nu+2}$, perchè $\Delta_{2\nu+2}$ è generato da $\Delta_{\nu+1}$ assieme a $\nabla_{\nu+1}$.

Per conseguenza il secondo antitriangolo corrispondente a $\Delta_{2\nu+2}$ è da indicarsi con $\Delta_{2\nu+3}$, e così procedendo risulta dimostrato l' asserto.

Al quadro precedente possiamo quindi sostituire quest'altro, che mette in rilievo oltre la genesi dei triangoli anche la corrispondenza fra questi e gli antitriangoli :

$$\Delta_0 \qquad\qquad \Delta_1 \qquad\qquad \Delta_2 \qquad\qquad \Delta_3$$

$$\Delta_0 \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6 \quad \Delta_7 \quad \cdots$$

$$\nabla_0 \qquad\qquad \nabla_1 \qquad\qquad \nabla_2 \qquad\qquad \nabla_3 \qquad\qquad \nabla_4$$

Ogni triangolo della seconda riga è generato dal triangolo della prima e dall' antitriangolo della terza, ai quali è legato.

Resta così anche stabilita la prop.:

·2 — *Nella successione dei triangoli di* Fermat

$$\Delta_0\,,\quad \Delta_1\,,\quad \Delta_2\,,\ldots,\quad \Delta_n\,,\ldots$$

*ciascun triangolo d'indice pari (dispari) è associato positivamente (negativamente) al precedente.*

Poichè le ordinate $y$ dei punti razionali della quartica base ottenuti mediante le potenze dell'operazione $\phi$ (art. 9), sono alternativamente positive e negative, e quindi corrispondono a valori alternativamente negativi e positivi del parametro $\xi$, la successione dei triangoli di Fermat, ottenuta per iterazione dell'operazione $\phi$, ha pure la proprietà ora enunciata (·2), quindi essa coincide con la successione ottenuta col metodo dianzi esposto. Resta per conseguenza dimostrato quanto venne asserito nell'art. 9, cioè l'operazione $\phi$ dà per iterazione tutti i triangoli di Fermat.

Per mettere in evidenza anche la genesi degli antitriangoli possiamo disporre questi e i triangoli come nel quadro seguente:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \Delta_0 & & \nabla_1 & & \Delta_1 & & \nabla_2 & & \Delta_2 & & \nabla_3 & & \Delta_3 & \\
\Delta_0 & \nabla_1 & \Delta_1 & \nabla_2 & \Delta_2 & \nabla_3 & \Delta_3 & \nabla_4 & \Delta_4 & \nabla_5 & \Delta_5 & \nabla_6 & \Delta_6 & & \ldots \\
\nabla_0 & & \Delta_0 & & \nabla_1 & & \Delta_1 & & \nabla_2 & & \Delta_2 & & \nabla_3 & &
\end{array}$$

Ogni elemento della seconda riga è generato dall'elemento della prima e dall'elemento della terza cui è legato.

In seguito alla prop. ·1 le formole (53), (60) e (72), (73), per la determinazione avvicendata dei triangoli e degli antitriangoli, possono ora mettersi sotto la forma seguente:

$$(77)\qquad \Delta_{2n}\left\{\begin{aligned} r_{2n} &= r_n^2\rho_n^2 + s_n^2\sigma_n^2 \\ s_{2n} &= 2r_n^2\sigma_n^2 - s_n^2\rho_n^2 \\ t_{2n} &= t_n^2\tau_n^2 - 8r_n^2s_n^2\rho_n^2\sigma_n^2 \end{aligned}\right. \qquad \Delta_{2n+1}\left\{\begin{aligned} r_{2n+1} &= r_n^2\rho_{n+1}^2 + s_n^2\sigma_{n+1}^2 \\ s_{2n+1} &= 2r_n^2\sigma_{n+1}^2 - s_n^2\rho_{n+1}^2 \\ t_{2n+1} &= 8r_n^2s_n^2\rho_{n+1}^2\sigma_{n+1}^2 - t_n^2\tau_n^2 \end{aligned}\right.$$

$$(78)\qquad \nabla_{2n}\left\{\begin{aligned} \rho_{2n} &= \rho_n^4 + 2\sigma_n^4 \\ \sigma_{2n} &= -2\rho_n\sigma_n\tau_n \\ \tau_{2n} &= 8\rho_n^4\sigma_n^4 - \tau_n^4 \end{aligned}\right. \qquad \nabla_{2n+1}\left\{\begin{aligned} \rho_{2n+1} &= 2r_n^4 + s_n^4 \\ \sigma_{2n+1} &= 2r_ns_nt_n \\ \tau_{2n+1} &= 8r_n^4s_n^4 - t_{2n+1}^4 \end{aligned}\right.$$

**Formole di ricorrenza per la risoluzione indipendente delle due equazioni. Il primo triangolo torricelliano.**

27. Poichè $\nabla_n$ e $\nabla_{n+1}$ sono rispettivamente il primo e il secondo antitriangolo corrispondenti a $\Delta_n$, si ha (art. 22):

$$(79)\quad\left\{\begin{aligned} \rho_n &= D(2r_n^2 + s_n^2,\ r_ns_n - t_n), & \rho_{n+1} &= D(2r_n^2 + s_n^2,\ r_ns_n + t_n) \\ \sigma_n &= (-1)^n\frac{r_ns_n + t_n}{\rho_{n+1}}, & \sigma_{n+1} &= (-1)^n\frac{r_ns_n - t_n}{\rho_n} \\ \tau_n &= (-1)^n\frac{4r_ns_n(r_n^2+s_n^2) - t_n(2r_n^2 - s_n^2)}{\rho_{n+1}^2}, & \tau_{n+1} &= (-1)^{n+1}\frac{4r_ns_n(r_n^2+s_n^2) + t_n(2r_n^2 - s_n^2)}{\rho_n^2} \end{aligned}\right.$$

ed inoltre, in virtù della (37) e della prima (68):

$$\rho_n\rho_{n+1} = 2r_n^2 + s_n^2 , \qquad \sigma_n\sigma_{n+1} = s_n^2 - r_n^2 , \tag{80}$$

poi, dalle (79), con facili calcoli si ottiene:

$$\left\{\begin{aligned} &\tau_n\rho_{n+1}\sigma_{n+1} = 2r_n^4 + s_n^4 - 3r_ns_nt_n , \qquad -\tau_{n+1}\rho_n\sigma_n = 2r_n^4 + s_n^4 + 3r_ns_nt_n , \\ &\tau_n\tau_{n+1} = t_n^2 - 8r_n^2s_n^2 . \end{aligned}\right. \tag{81}$$

Relazioni analoghe hanno luogo fra gli elementi dei triangoli $\Delta_{n+1}$ e quelli del corrispondente antitriangolo $\nabla_n$. Per determinarle ricorriamo alle (47) e (57), che ora divengono:

$$s_n\tau_n = (-1)^n r_n(\rho_n^2 - 2\sigma_n^2) + s_n\rho_n\sigma_n , \qquad s_n\tau_{n+1} = (-1)^{n+1} r_n(\rho_{n+1}^2 - 2\sigma_{n+1}^2) - s_n\rho_{n+1}\sigma_{n+1} ;$$

ne deduciamo, dopo avere nella seconda cambiato $n$ in $n-1$:

$$s_n(\rho_n\sigma_n - \tau_n) = (-1)^{n-1}r_n(\rho_n^2 - 2\sigma_n^2) , \qquad s_{n-1}(\rho_n\sigma_n + \tau_n) = (-1)^n r_{n-1}(\rho_n^2 - 2\sigma_n^2) , \tag{82}$$

poi, moltiplicando queste membro a membro e tenendo presente la 2ª (68):

$$s_{n-1}s_n(\rho_n^2 + \sigma_n^2) = r_{n-1}r_n(\rho_n^2 - 2\sigma_n^2) ,$$

e poichè $\rho_n^2 + \sigma_n^2$ e $\rho_n^2 - 2\sigma_n^2$ sono primi tra loro, si ricava

$$r_{n-1}r_n = \rho_n^2 + \sigma_n^2 , \qquad s_{n-1}s_n = \rho_n^2 - 2\sigma_n^2 . \tag{83}$$

Le (82) allora dànno

$$r_{n-1} = (-1)^n \frac{\rho_n\sigma_n + \tau_n}{s_n} , \qquad r_n = (-1)^{n-1} \frac{\rho_n\sigma_n - \tau_n}{s_{n-1}} ; \tag{84}$$

quindi si ha

$$|s_{n-1}| = \mathrm{D}(\rho_n^2 - 2\sigma_n^2 , \ \rho_n\sigma_n - \tau_n) , \qquad |s_n| = \mathrm{D}(\rho_n^2 - 2\sigma_n^2 , \ \rho_n\sigma_n + \tau_n) . \tag{85}$$

Si stabiliscono poi facilmente (cfr. art. 20) le relazioni:

$$t_{n-1} = (-1)^n \frac{4\rho_n\sigma_n(\rho_n^2 - \sigma_n^2) + \tau_n(\rho_n^2 + 2\sigma_n^2)}{s_n^2} , \qquad t_n = (-1)^n \frac{4\rho_n\sigma_n(\rho_n^2 - \sigma_n^2) - \tau_n(\rho_n^2 + 2\sigma_n^2)}{s_{n-1}^2} , \tag{86}$$

dalle quali si ottiene:

$$\left\{\begin{aligned} &r_ns_nt_{n-1} = \rho_4^4 + 2\sigma_4^4 + 3\rho_n\sigma_n\tau_n , \qquad -r_{n-1}s_{n-1}t_n = \rho_n^4 + 2\sigma_n^4 - 3\rho_n\sigma_n\tau_n , \\ &t_{n-1}t_n = 8\rho_n^2\sigma_n^2 - \tau_n^2 . \end{aligned}\right. \tag{87}$$

28. Le formole precedenti permettono di dedurre delle semplici e notevoli relazioni fra gli elementi dei triangoli soltanto.

Infatti, dalle (83), tenendo presenti le (79) e (80), si trae:

$$r_{n-1}r_n \,.\, r_n r_{n+1} = (\rho_n^2+\sigma_n^2)(\rho_{n+1}^2+\sigma_{n+1}^2) = (2r_n^2+s_n^2)^2 + (s_n^2-r_n^2)^2+(r_n s_n+t_n)^2+(r_n s_n-t_n)^2 =$$

$$= 5r_n^4 + 2s_n^4 + 4r_n^2 s_n^2 + 2t_n^2 = 9r_n^4 + 4r_n^2 s_n^2 ,$$

e però

$$r_{n-1}r_{n+1} = 9r_n^2 + 4s_n^2 . \tag{88}$$

Con procedimento analogo dalla $2^a$ (83) si ottiene

$$s_{n-1}s_{n+1} = 9s_n^2 - 8r_n^2 , \tag{89}$$

e dalla $3^a$ (87):

$$t_{n-1}t_{n+1} = 49t_n^2 - 288r_n^2 s_n^2 . \tag{90}$$

Come pure, applicando ai prodotto $r_{n-1}r_n \,.\, s_n s_{n+1}$, $r_n r_{n+1} \,.\, s_{n-1}s_n$ le relazioni (83), si ha

$$r_{n-1}s_{n+1} = 7r_n s_n + 6t_n , \qquad s_{n-1}r_{n+1} = 7r_n s_n - 6t_n \tag{91}$$

dalle quali segue:

$$14r_n s_n = r_{n-1}s_{n+1} + s_{n-1}r_{n+1} , \qquad 12t_n = r_{n-1}s_{n+1} - s_{n-1}r_{n+1} . \tag{92}$$

Le formole (88), (89) permettono di calcolare gli elementi $r_{n+1}$, $s_{n+1}$ di $\Delta_{n+1}$ mediante gli elementi analoghi di $\Delta_{n-1}$ e $\Delta_n$, partendo dalle posizioni iniziali

$$r_{-1} = r_0 = 1 , \qquad s_{-1} = s_0 = -1 .$$

I calcoli sono anche più semplici, quando s'introduce l'elemento $t_n$, poichè allora si possono adoperare le (91).

Devesi notare che l'applicazione delle formole elegantissime che abbiamo ottenute, per la risoluzione indipendente della prima equazione fondamentale, richiede, a differenza della risoluzione avvicendata, il processo della divisione.

29. Dalla (88) si ricava anche la prop. notevole:

***L'ipotenusa del triangolo $\Delta_n$ cresce con n non meno rapidamente di $9^{n(n+1)}$ e non più di $15^{n(n+1)}$.***

Infatti, essendo

$$s_n^2 < \sqrt{2}\, r_n^2 < 1{,}5 r_n^2 ,$$

si ha

$$9r_n^2 < r_{n-1}r_{n+1} < 15r_n^2$$

donde

$$9\frac{r_n}{r_{n-1}} < \frac{r_{n+1}}{r_n} < 15\frac{r_n}{r_{n-1}} .$$

Cambiando $n$ in $n-1$, $n-2$, ..., 1, 0 e moltiplicando si deduce

$$9^{n+1} < \frac{r_{n+1}}{r_n} < 15^{n+1}$$

e da questa in modo analogo si trae

$$9^{\frac{n(n+1)}{2}} < r_n < 15^{\frac{n(n+1)}{2}} .$$

Adunque l'ipotenusa $M_n$ del triangolo $\Delta_n$ soddisfa alle relazioni

(93) $$M_n > 9^{2n}M_{n-1}\,, \qquad 15^{n(n+1)} > M_n > 9^{n(n+1)}\,,$$

dalle quali segue la proprietà enunciata.

30. Per la risoluzione della 2ª equazione fondamentale indipendentemente dalla risoluzione della prima abbiamo delle relazioni ricorrenti analoghe a quelle ottenute nell'art. 28: La 1ª (80) in virtù delle (83), (84), dà:

$$\rho_{n-1}\rho_n \cdot \rho_n\rho_{n+1} = (2r_{n-1}^2 + s_{n-1}^2)(2r_n^2 + s_n^2) = 4(\rho_n^2 + \sigma_n^2)^2 + (\rho_n^2 - 2\sigma_n^2)^2 + 2(\rho_n\sigma_n - \tau_n)^2 + 2(\rho_n\sigma_n + \tau_n)^2 =$$
$$= 5\rho_n^4 + 8\sigma_n^4 + 8\rho_n^2\sigma_n^2 + 4\tau_n^2 = 9\rho_n^4 + 8\rho_n^2\sigma_n^2\,,$$

e però

(94) $$\rho_{n-1}\rho_{n+1} = 9\rho_n^2 + 8\sigma_n^2\,.$$

Con procedimento analogo, dalla 2ª (80) si ottiene

(95) $$\sigma_{n-1}\sigma_{n+1} = 9\sigma_n^2 - 4\rho_n^2\,;$$

e dalla 3ª (81):

(96) $$\tau_{n-1}\tau_{n+1} = 49\tau_n^2 - 288\rho_n^2\sigma_n^2\,.$$

Come pure risulta

(97) $$\rho_{n+1}\sigma_{n-1} = -7\rho_n\sigma_n - 6\tau_n\,, \qquad \rho_{n-1}\sigma_{n+1} = 6\tau_n - 7\rho_n\sigma_n$$

e quindi

$$12\tau_n = \rho_{n-1}\sigma_{n+1} - \rho_{n+1}\sigma_{n-1}\,, \qquad -14\rho_n\sigma_n = \rho_{n+1}\sigma_{n-1} + \rho_{n-1}\sigma_{n+1}\,.$$

Dalla (94) segue la prop.:

*L' elemento* $\rho_n$ *dell' antitriangolo* $\nabla_n$ *cresce con* n *non meno rapidamente di* $3^{n^2}$, *e non più di* $4^{n^2}$.

Infatti, essendo

$$2\sigma_n^2 < 1{,}2\,\rho_n^2 < 1{,}5\rho_n^2\,,$$

si ha

$$9\rho_n^2 < \rho_{n-1}\rho_{n+1} < 15\rho_n^2\,,$$

e però

$$9\,\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} < \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} < 15\,\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}\,:$$

se ne ricava

$$3.\,9^n < \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} < 3.\,15^n\,,$$

donde

$$3^{n^2} < \rho_n < 15^{\frac{n(n-1)}{2}}.\,3^n < 4^{n^2}\,,$$

e da queste segue la prop. enunciata.

31. Le formole (77), (78) e quelle ottenute negli art. 27, 28 e 30 sono casi particolari di un gruppo di eleganti relazioni fra le soluzioni delle due equazioni fondamentali, che qui riportiamo a complemento della presente ricerca.

·1 — *Qualunque siano gl' indici* n, ν, *purchè* n $\geqq$ ν, *si hanno le relazioni:*

$$(98)\quad \begin{cases} r_{n-\nu}r_{n+\nu} = \rho_\nu^2 r_n^2 + \sigma_\nu^2 s_n^2 \\ s_{n-\nu}s_{n+\nu} = \rho_\nu^2 s_n^2 - 2\sigma_\nu^2 r_n^2 \\ t_{n-\nu}t_{n+\nu} = \tau_\nu^2 t_n^2 - 8\rho_\nu^2\sigma_\nu^2 r_n^2 s_n^2 \end{cases}$$

$$(99)\quad \begin{cases} r_{n-\nu}r_{n+1+\nu} = r_\nu^2\rho_{n+1}^2 + s_\nu^2\sigma_{n+1}^2 \\ s_{n-\nu}s_{n+1+\nu} = s_\nu^2\rho_{n+1}^2 - 2r_\nu^2\sigma_{n+1}^2 \\ t_{n-\nu}t_{n+1+\nu} = 8r_\nu^2 s_\nu^2\rho_{n+1}^2\sigma_{n+1}^2 - t_\nu^2\tau_{n+1}^2 \end{cases}$$

$$(100)\quad \begin{cases} (-1)^{\nu-1} r_{n+\nu}s_{n-\nu} = \tau_\nu r_n s_n + \rho_\nu\sigma_\nu t_n \\ (-1)^{\nu-1} r_{n+\nu}s_{n-\nu} = \tau_\nu r_n s_n - \rho_\nu\sigma_\nu t_n \end{cases}$$

$$(101)\quad \begin{cases} (-1)^{n} r_{n+1+\nu}s_{n-\nu} = t_\nu\rho_{n+1}\sigma_{n+1} + r_\nu s_\nu\tau_{n+1} \\ (-1)^{n+1} r_{n-\nu}s_{n+1+\nu} = t_\nu\rho_{n+1}\sigma_{n+1} - r_\nu s_\nu\tau_{n+1} \end{cases}$$

Per ν eguale a 0 le (98) e (100), essendo $\sigma_0 = 0$, dànno delle identità, mentre le (99) e (101) dànno le (83), la 3ª (87) e le (84).

Ammesse dnnque queste formole per $n$ qualunque e per un dato ν dimostriamo che sussistono quando si cambi ν in $\nu + 1$.

Per dimostrare la 1ª (98) consideriamo la 1ª (99); se ne deduce, tenendo presenti le (80) e le seconde (79):

$$r_{n-1-\nu}\, r_{n+\nu} \cdot r_{n-\nu}\, r_{n+1+\nu} = (r_\nu^2 \rho_n^2 + s_\nu^2 \sigma_n^2)(r_\nu^2 \rho_{n+1}^2 + s_\nu^2 \sigma_{n+1}^2) =$$

$$= r_\nu^4 (2r_n^2 + s_n^2)^2 + s_\nu^4 (s_n^2 - r_n^2)^2 + r_\nu^2 s_\nu^2 [(r_n s_n + t_n)^2 + (r_n s_n - t_n)^2] =$$

$$= r_\nu^4 (4r_n^4 + s_n^4) s_\nu^4 (r_n^4 + s_n^4) + 2 r_\nu^2 s_\nu^2 r_n^2 s_n^2 + 2 r_n^2 s_n^2 t_\nu^2 + 2 r_\nu^2 s_\nu^2 t_n^2 ,$$

e poichè questo risultato non muta scambiando $n$ con $\nu$, mentre per tale cambamento il prodotto a secondo membro di questa catena d' eguaglianze diviene

$$(\rho_\nu^2 r_n^2 + \sigma_\nu^2 s_n^2)(\rho_{\nu+1}^2 r_n^2 + \sigma_{\nu+1}^2 s_n^2) ,$$

che per la 1ª (98) stessa è uguale a

$$r_{n-\nu}\, r_{n+\nu} \cdot (\rho_{\nu+1}^2 r_n^2 + \sigma_{\nu+1}^2 s_n^2) ,$$

si deduce dal confronto col primo membro della precedente catena d' eguaglianze:

$$r_{n-\nu-1}\, r_{n+\nu+1} = \rho_{\nu+1}^2 r_n^2 + \sigma_{\nu+1}^2 s_n^2 ,$$

che è la 1ª (98) ove si cambi $\nu$ in $\nu + 1$.

Con procedimento analogo si stabiliscono le altre formole.

Si noti che per $\nu$ eguale a 1 le (98) forniscono le (88), (89), (90), mentre le (100) si mutano nelle (91); le (99) e (101) dànno invece delle relazioni nuove.

Per $\nu$ eguale a $n$ le (98) e (99) dànno le (77), mentre le (100) e (101) forniscono le nuove relazioni notevoli:

$$(102) \begin{cases} (-1)^n r_{2n} = r_n s_n \tau_n + \rho_n \sigma_n t_n \\ (-1)^{n-1} s_{2n} = r_n s_n \tau_n - \rho_n \sigma_n t_n \end{cases} \qquad (103) \begin{cases} (-1)^{n+1} r_{2n+1} = \rho_{n+1} \sigma_{n+1} t_n + r_n s_n \tau_{n+1} \\ (-1)^{n+1} s_{2n+1} = \rho_{n+1} \sigma_{n+1} t_n - r_n s_n \tau_{n+1} . \end{cases}$$

In modo analogo alla precedente prop. si stabilisce l' altra:

·2 — *Qualunque siano gl' indici* n, ν, *purchè* n ≧ ν, *si hanno le relazioni:*

$$(104) \begin{cases} \rho_{n-\nu}\, \rho_{n+\nu} = \rho_\nu^2 \rho_n^2 + 2\sigma_\nu^2 \sigma_n^2 \\ \sigma_{n-\nu}\, \sigma_{n+\nu} = \rho_\nu^2 \sigma_n^2 - \sigma_\nu^2 \rho_n^2 \\ \tau_{n-\nu}\, \tau_{n+\nu} = \tau_\nu^2 \tau_n^2 - 8 r_\nu^2 \sigma_\nu^2 \rho_n^2 \sigma_n^2 \end{cases} \qquad (105) \begin{cases} \rho_{n-\nu}\, \rho_{n+1+\nu} = 2 r_\nu^2 r_n^2 + s_\nu^2 s_n^2 \\ \sigma_{n-\nu}\, \sigma_{n+1+\nu} = r_\nu^2 s_n^2 - s_\nu^2 r_n^2 \\ \tau_{n-\nu}\, \tau_{u+1+\nu} = t_\nu^2 t_n^2 - 8 r_\nu^2 s_\nu^2 r_n^2 s_n^2 \end{cases}$$

$$(106) \begin{cases} \rho_{n+\nu}\, \sigma_{n-\nu} = \rho_\nu \sigma_\nu \tau_n - \tau_\nu \rho_n \sigma_n \\ -\rho_{n-\nu}\, \sigma_{n+\nu} = \rho_\nu \sigma_\nu \tau_n + \tau_\nu \rho_n \sigma_n \end{cases} \qquad (107) \begin{cases} (-1)^{n+1+\nu} \rho_{n+1+\nu}\, \sigma_{n-\nu} = r_\nu s_\nu t_n - t_\nu r_n s_n \\ (-1)^{n-\nu} \rho_{n-\nu}\, \sigma_{n+1+\nu} = r_\nu s_\nu t_n + t_\nu r_n s_n \end{cases}$$

Per $\nu$ eguale a zero le (104) e (106) dànno delle identità, mentre le (105) dànno le (80) e la 3ª (81), e le (107) si riducono alle seconde (79).

Per $\nu$ eguale a 1 dalle (104) si ottengono le (94), (95), (96), e dalle (106) si hanno le (97), mentre le (105) e (107) dànno delle relazioni nuove.

Se $\nu = n$, la 1ª e la 3ª (104) si mutano nella 1ª e 3ª (78), e la 2ª (106) nella 2ª (78); come pure la 1ª e la 3ª (105) si riducono alla 1ª e 3ª del secondo gruppo (78), mentre la 2ª di questo gruppo si ottiene dalla 2ª (107).

Sono particolarmente notevoli le relazioni che si deducono dalle (104) e (106) cambiando $n$ in $n+1$ e $\nu$ in $n$:

$$(108)\quad \begin{cases} 3\rho_{2n+1} = \rho_n^2\,\rho_{n+1}^2 + 2\sigma_n^2\,\sigma_{n+1}^2 \\ -2\sigma_{2n+1} = \rho_n^2\,\sigma_{n+1}^2 - \rho_{n+1}^2\,\sigma_n^2 \\ 7\tau_{2n+1} = \tau_n^2\,\tau_{n+1}^2 - 8\rho_n^2\,\sigma_n^2\,\rho_{n+1}^2\,\sigma_{n+1}^2 \end{cases} \qquad (109)\quad \begin{cases} -2\rho_{2n+1} = \rho_n\sigma_n\tau_{n+1} - \rho_{n+1}\sigma_{n+1}\tau_n \\ -3\sigma_{2n+1} = \rho_n\sigma_n\tau_{n+1} + \rho_{n+1}\sigma_{n+1}\tau_n \end{cases}$$

le quali assieme al primo gruppo (78) permettono di determinare gli elementi di $\nabla_{2n}$ e $\nabla_{2n+1}$ soltanto per mezzo degli elementi di $\nabla_n$ e $\nabla_{n+1}$.

Per contrapposto le (105) e (107), quando si assume $\nu = n-1$, dànno:

$$(110)\quad \begin{cases} 3\rho_{2n} = 2r_{n-1}^2\,r_n^2 + s_{n-1}^2\,\sigma_n^2 \\ -2\sigma_{2n} = r_{n-1}^2\,s_n^2 - s_{n-1}^2\,r_n^2 \\ 7\tau_{2n} = t_{n-1}^2\,t_n^2 - 8r_{n-1}^2\,s_{n-1}^2\,r_n^2 s_n^2 \end{cases} \qquad (111)\quad \begin{cases} -2\rho_{2n} = r_{n-1}s_{n-1}t_n - r_n s_n t_{n-1} \\ -3\sigma_{2n} = r_{n-1}s_{n-1}t_n + r_n s_n t_{n-1} \end{cases}$$

le quali unitamente al secondo gruppo (78) permettono di calcolare gli elementi di $\nabla_{2n}$ e $\nabla_{2n+1}$ soltanto per mezzo degli elementi di $\Delta_{n-1}$ e $\Delta_n$.

32. Chiudiamo questo studio con la ricerca del primo triangolo torricelliano. A tal fine osserviamo che, noto il carattere di un triangolo $\Delta_{n-1}$, si può determinare il carattere del triangolo successivo $\Delta_n$ indipendentemente dalla conoscenza degli elementi di questo, purchè siano noti, se $n$ è pari, gli elementi $\rho$, $\sigma$ dell'antitriangolo generatore di $\Delta_n$, e, se $n$ è dispari, gli elementi $r$, $s$ del triangolo generatore dello stesso $\Delta_n$.

Infatti, se $n$ è pari ed eguale a $2\nu$, $\Delta_n$ è generato da $\nabla_\nu$, quindi si vedrà in quale degl' intervalli considerati nell' art. 18 cade il rapporto $|\sigma_\nu| : \rho_\nu$. Il quadro che si trova in quell'art. ci darà i caratteri dei triangoli $\Delta_{n-1}$, $\Delta_n$ presi insieme, ma non quello di ciascuno singolarmente; essendo però noto il carattere di $\Delta_{n-1}$, ne risulterà determinato quello di $\Delta_n$.

Se invece $n$ è dispari, $n = 2\nu + 1$, allora $\Delta_n$ è generato da $\Delta_\nu$, e in base al rapporto $r_\nu : |s_\nu|$ si determineranno, mediante il quadro dell'art. 16, i caratteri dei triangoli $\Delta_{n-1}$, $\Delta_n$ insieme presi, e per conseguenza quello di $\Delta_n$.

Nella tabella qui annessa si trovano segnati i valori degli elementi $r$, $s$ di tutti i triangoli sino a $\Delta_6$, nonchè i valori degli elementi $\rho$, $\sigma$ di tutti gli antitriangoli sino a $\nabla_6$. Corrispondentemente sono indicati i valori del rapporto $r : |s|$ e $|\sigma| : \rho$ a meno di 0,001, approssimazione sufficiente pei confronti che bisognerà fare.

Usando i simboli introdotti nell' art. 16 per l'indicazione dei caratteri, risultano, in

base al procedimento ora esposto, determinati i caratteri di tutti i triangoli sino a $\Delta_{12}$ come è indicato nel seguente quadro :

| $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | $\Delta_7$ | $\Delta_8$ | $\Delta_9$ | $\Delta_{10}$ | $\Delta_{11}$ | $\Delta_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | $I_2$ | $E_2$ | $I_1$ | $I_2$ | $E_2$ | $I_1$ | $I_2$ | $E_2$ | $I_1$ | $I_2$ | $E_1$ |

Adunque:

Il triangolo $\Delta_{12}$ è il primo triangolo della successione che sia torricelliano; esso è quindi (art. 29) anche il triangolo torricelliano di minima ipotenusa.

Essendo (art. 24) $r_{12}$ compreso tra $9^{78}$ e $15^{78}$, esso ha più di 74 cifre e meno di 93. Del resto, essendo

$$r_{12} = r_6^2 \rho_6^2 + s_6^2 \sigma_6^2 ,$$

calcolando i logaritmi decimali dei termini del secondo membro e quelli del suo quadrato, si riconosce che $r_{12}$ ha 83 cifre, ed $r_{12}^2$, ossia l'ipotenusa di $\Delta_{12}$, ne ha 165.

*Catania, gennaio-febbraio 1918.*

| $\Delta$ | $r$ | $s$ | $r:\|s\|$ a meno di 0,001 | $\nabla$ | $\rho$ | $\sigma$ | $\|\sigma\|:\rho$ a meno di 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | −1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 13 | −1 | 13 | 1 | 3 | − 2 | 0, 666 |
| 2 | 1 525 | 1 343 | 1, 135 | 2 | 113 | 84 | 0, 743 |
| 3 | 2 165 017 | 2 372 159 | 0, 913 | 3 | 57 123 | − 6 214 | 0, 108 |
| 4 | 42 422 452 969 | 9 788 425 919 | 4, 333 | 4 | 262 621 633 | − 151 245 528 | 0, 597 |
| 5 | 7 658 246 457 672 229 | −5 705 771 236 038 721 | 1, 342 | 5 | 14 070 212 996 451 | 11 265 465 210 550 | 0, 800 |
| 6 | 15 512 114 571 284 835 412 957 | −17 999 572 487 701 067 948 161 | 0, 861 | 6 | 10 650 393 355 715 621 873 | − 2 316 186 053 639 990 532 | 0, 217 |

# Sulle serie di funzioni differenziabili

## Nota di CARLO SEVERINI (*)

In una recente nota di *E. Landau* [1] è dimostrato questo teorema:

*Siano* $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *funzioni reali di* x, *definite per* $a < x < b$ *e* k-*volte differenziabili. Per* $a < x < b$ *sia:*

$$\sum_{n}^{\infty} f_n(x) = F(x)$$

*convergente e*

$$\sum_{n}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = G(x)$$

*equiconvergente.* F (x) *è allora* k *volte differenziabile, e si ha:*

$$F^{(k)}(x) = G(x).$$

Il procedimento, col quale il teorema viene stabilito, dà luogo ad alcuni altri risultati, che credo qui opportuno indicare, avvertendo che le ipotesi in essi contenute sono suscettibili di generalizzazione.

1. Le funzioni:

$$f_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

siano, come sopra, definite e $k$-volte differenziabili nell' intervallo $(a, b)$; la serie:

$$\sum_{1}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = G(x) \tag{2}$$

converga ivi quasi da per tutto, [2] ed esista un valore $n'$ dell' indice $n$ tale che si abbia, per ogni $x$ di $(a, b)$ e per ogni $p = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\left| \sum_{n'}^{n'+p} f_n^{(k)}(x) \right| \leq C, \tag{3}$$

ove $C$ è una costante positiva, finita.

---

(*) Comunicata all' Accademia nell' adunanza del 23 Febbraio 1918.

[1] *Ueber mehrfache gliedweise differentiation unendlicher Reihen* [Sonderabdruck aus Archiv der Mathematik und Physik. III, Reihe. XXVI. Heft. 1 (1917)].

[2] Fatta cioè al più eccezione per i punti di un insieme di misura nulla, nei quali si possono intendere comunque assegnati i valori di $G(x)$.

In queste ipotesi, detto $x_0$ un punto qualunque di $(a, b)$, la serie:

$$\sum_{n'}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = H(x)$$

può essere successivamente integrata termine a termine $k$-volte da $x_0$ ad $x$ $(a \leqq x \leqq b)$, [3] e risulta:

$$(4)\quad \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{x_0}^{x_{k-1}} H(\xi)\, d\xi = \sum_{n'}^{\infty} \left[ f_n(x) - f_n(x_0) - \frac{x-x_0}{1!} f'_n(x_0) - \ldots - \frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} f_n^{(k-1)}(x_0) \right] [4].$$

Suppongasi ora che in $k$ punti distinti di $(a, b)$ converga la serie:

$$(5)\qquad \sum_{1}^{\infty} f_n(x).$$

Negli stessi punti dovrà allora convergere, a causa della (4), la serie:

$$(6)\qquad \sum_{1}^{\infty} \left[ f_n(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'_n(x_0) + \ldots\ldots + \frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!} f_n^{(k-1)}(x_0) \right].$$

Ma, se la serie di polinomi razionali interi:

$$\sum_{1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{1}^{\infty} (a_{n,0} + a_{n,1} x + \ldots\ldots + a_{n,m} x^m)$$

converge in $m+1$ punti distinti $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, deve convergere ognuna delle serie:

$$(7)\qquad \sum_{1}^{\infty} a_{n,i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Ciò è evidente per $m = 0$ e per $m = 1$, e si prova col metodo d'induzione che il medesimo ha luogo in ogni altro caso. Posto infatti che il teorema sussista per polinomi di grado $\leqq m-1$, si consideri la serie:

$$(8)\quad \sum_{1}^{\infty} \left[ P_n(x_1 + h) - P_n(x_1) \right] = h \sum_{1}^{\infty} \left[ b_{n,0} + b_{n,1} h + \ldots\ldots + b_{n,m-1} h^{m-1} \right],$$

---

(3) Cfr. DE LA VALLÉE-POUSSIN: *Cours d'Analyse Infinitésimale* Tome I, p. 263 [Paris, Gauthier-Villars, 1914].

(4) Cfr. DE LA VALLÉE-POUSSIN, l. c. (3), p. 269.

ove:

$$(9) \qquad b_{n,i-1} = a_{n,i} + \binom{i+1}{i} a_{n,i+1}\, x_1 + \ldots\ldots + \binom{m}{i} a_{n,m}\, x_1^{m-i} \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

Poichè la (8) converge per gli $m$ valori di $h$:

$$h_i = x_i - x_1 \qquad (i=2,3,\ldots,m+1),$$

deve convergere la serie:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\, b_{n,m-1},$$

identica, a causa delle (9), alla serie:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\, a_{n,m},$$

e quindi l' altra:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\, (a_{n,0} + a_{n,1}\, x + \ldots\ldots + a_{n,m-1}\, x^{m-1}),$$

quando in essa si faccia $x = x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$; ciò che basta al nostro scopo.

Applicando quanto è stato ora detto alla (6), si deduce, tenuto conto che $x_0$ è un punto qualunque di $(a, b)$, che ognuna delle serie:

$$(10) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_n\, f_n^{(i)}(x) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

converge in questo intervallo. Di più la convergenza di ognuna delle (10) è uniforme in $(a, b)$, giacchè, qualunque sia $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, la successione:

$$(11) \qquad R_p^{(i)}(x) = \sum_{n'}^{n'+p}{}_n\, f_n^{(i)}(x) \qquad (p = 0,1,2, ..)$$

è composta, per la (3), di funzioni equilimitate ed equicontinue nell' intervallo $(a, b)$ [5]. Concludendo si ha il seguente teorema:

*Le funzioni:*

$$(1) \qquad f_n(x) \qquad (n=1, 2, \ldots\ldots)$$

*siano definite e* k-*volte differenziabili nell' intervallo* (a, b); *la serie:*

$$(2) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_n\, f_n^{(k)}(x) = G(x)$$

(5) Cfr. ARZELÀ: *Sulle serie di funzioni* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna) (1899) pp. 49-55.

*converga ivi quasi da per tutto, ed esista un valore* n′ *dell' indice* n *tale, che si abbia, per ogni* x *di* (a, b) *e per ogni* p = 0, 1, 2 ......:

$$\left| \sum_{n'}^{n'+p} {}_n f_n^{(k)}(x) \right| \leq C, \tag{3}$$

*ove* C *è una costante positiva, finita.*

*Se in* k *punti distinti di* (a, b) *converge la serie:*

$$\sum_1^{\infty} {}_n f_n(x), \tag{5}$$

*ognuna delle serie:*

$$\sum_1^{\infty} {}_n f_n^{(i)}(x) \qquad (i=0, 1, 2, ..., k-1)$$

*è equiconvergente nell' intervallo* (a, b).

*Osservazione:* L' ipotesi che la serie (5) converga in $k$ punti distinti può, in ciò che precede, sostituirsi coll'altra equivalente, che in un punto di $(a, b)$ convergano le serie:

$$\sum_1^{\infty} {}_n f_n^{(i)}(x) \qquad (i=0, 1, 2, ..., k-1).$$

2. Se si sa che la serie (5) converge almeno in un insieme di punti denso nell' intervallo $(a, b)$, e che, per ogni $i = 1, 2, \ldots, k-1$, esiste un punto $x_i$, in cui è limitata la successione (11), non fa d'uopo ammettere che converga quasi da per tutto la serie (2) per giungere al risultato dianzi enunciato. Sotto la condizione (3), ognuna delle successioni (11) risulta infatti, come è stato già osservato, composta di funzioni equilimitate ed equicontinue nell' intervallo $(a, b)$, e poichè per $i = 0$ esiste un'unica funzione limite continua, il medesimo deve necessariamente verificarsi in ogni altro caso.

Sussiste quindi il teorema:

*Le funzioni:*

$$f_n(x) \qquad (n = 1, 2, ......) \tag{1}$$

*siano definite e* k*-volte differenziabili nell' intervallo* (a, b), *ed esista un valore* n′ *dell' indice* n, *tale che si abbia, per ogni* x *di* (a, b) *e per ogni* p = 0, 1, 2,......:

$$\left| \sum_{n'}^{n'+p} {}_n f_n^{(k)}(x) \right| \leq C, \tag{3}$$

*ove* C *è una costante positiva, finita.*

*Se, almeno in un insieme di punti denso in* (a, b), *converge la serie :*

(5) $$\sum_1^\infty {}_n f_n(x),$$

*e, per ogni* $i = 1, 2, \ldots, k-1$, *esiste un punto* $x_i$, *in cui la successione :*

(11) $$R_p^i(x) = \sum_{n'}^{n'+p} {}_n f_{(k)}^{(i)} \qquad (p=0, 1, 2, \ldots)$$

*è limitata, ognuna delle serie :*

$$\sum_1^\infty {}_n f_n^{(i)}(x) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

*è equiconvergente nell' intervallo* (a, b).

*Osservazione :* Sotto le ipotesi dette, anche la serie :

(2) $$\sum_1^\infty {}_n f_n^{(k)}(x) = G(x)$$

risulta equiconvergente in $(a, b)$, se sono verificate le condizioni necessarie e sufficienti per l' esistenza di una funzione limite continua della successione :

$$R_p^{(k)}(x) = \sum_{n'}^{n'+p} {}_n f_n^{(k)}(x) \qquad (p=0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

che, a causa della (3), è composta di funzioni equilimitate [6].

3. Conseguenza immediata dei due teoremi sopra enunciati è il seguente :

*Nelle ipotesi poste per le funzioni* (1) *e sotto le condizioni di convergenza dei precedenti teoremi, la serie :*

$$F(x) = \sum_1^\infty {}_n f_n(x)$$

*è* (k—1)*-volte differenziabile, e si ha :*

$$F^{(i)}(x) = \sum_1^\infty {}_n f_n^{(i)}(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, k-1).$$

---

[6] Cfr. ARZELÀ l. c. (5); *Sulle serie di funzioni ugualmente oscillanti* [Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze di Bologna (1903-1904)].

*Esiste inoltre, quasi da per tutto in* (a, b), *la:*

$$F^{(k)}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_n f_n^{(k)}(x),$$

*se la serie del secondo membro è quasi da per tutto convergente; ed il medesimo si verifica in fine senza eccezione, per tutti i punti di* (a, b), *se la serie stessa è ivi equiconvergente.*

Catania, dicembre 1917.

# Osservazioni fotometriche della variabile R Canis majoris

## Nota di E. PACI

La stella BD $-16^{\circ}1898$ ($\alpha_{1855.0} = 7^h12^m54^s.5$, $\delta_{1855.0} = -16^{\circ}7'.9$) venne riconosciuta variabile nel 1887 da Sawyer e classificata fra quelle del tipo di Algol cogli elementi seguenti, trovati da Chandler e riportati nel *Katalog und Ephemeriden veränderlicher Sterne* di E. Hartwig :

Min. = 1887 marzo 26 $15^h18^m + (1^d3^h15^m46^s.201)$ E
$= 2410357.6375$ d. J. $+ 1^d.1359514$. E ;
Durata della variazione di luce $= 5^h$ ;
Amplitudine $= 0.^m8$ (Mass. $5.^m9$ ; Min. $6.^m7$).

Questa variabile è visibile dai nostri Osservatorii nelle notti dei mesi invernali e autunnali, i quali offrono un numero generalmente piccolo di serate buone. Io l'ho osservata dal 15 febbraio al 18 marzo del 1916 e dal 16 gennaio al 10 aprile del 1918 e ne ho concluse 76 misure fotometriche col fotometro a cuneo di Töpfer attaccato all' equatoriale di Cooke e con un cronometro a tempo medio di Litherland.

Le stelle di confronto furono sempre la BD $-15^{\circ}1734$ ($\alpha_{1855.0} = 7^h9^m40^s.6$, $\delta_{1855.0} = -15^{\circ}19'.8$) e la BD $-15^{\circ}1810$ ($\alpha_{1855.0} = 7^h18^m6^s.7$, $\delta_{1855.0} = -15^{\circ}55'.0$). Le loro grandezze, secondo la *Bonner Durchmusterung*, la *Harvard Photometry* e la *Uranometria Argentina*, sono :

| | BD | HP | UA |
|---|---|---|---|
| BD $-15^{\circ}.1734$ | $6.^m0$ | $5.^m42$ | $5.^m9$ |
| BD $-15^{\circ}.1810$ | 5. 8 | 4. 99 | 6. 0 |

Ho assunto per la grandezza della prima stella di confronto $5.^m95$, che è la media delle grandezze date dalle BD e UA in ottimo accordo tra loro, ed ho ricavato la grandezza della seconda stella di confronto aggiungendo a $5.^m95$ la media delle differenze di grandezza tra le due stelle $C_1$ e $C_2$ nel senso $C_2 - C_1$ fornite da tutti i confronti. Ho così ottenuto per la seconda stella la grandezza $5.^m60$.

Ogni gruppo di confronti fu eseguito nell' ordine $C_1$ $V$ $C_2$ $V$ $C_1$ e comprendeva da 8 a 10 misure per ciascun astro osservato ; il tempo veniva segnato al cominciamento e alla fine di ciascun gruppo. La media delle misure date dai confronti della variabile con la prima e la seconda stella forniva un valore della grandezza osservata della variabile, e la media delle due letture del cronometro forniva l' istante corrispondente.

Per convertire le misure millimetriche in grandezze stellari ho adottato per costante del cuneo il valore 0.1622 determinato a suo tempo dal Prof. A. Bemporad.

I risultati delle osservazioni sono riportati nel quadro seguente, il quale contiene per ciascuna serata di osservazione l' epoca del minimo più vicino, determinata con gli elementi sopra riportati e corretta dell' equazione di luce, calcolata con la nota formola

$$\text{Tempo eliocentrico} = \text{Tempo geocentrico} - 497.8\ R \cos\beta \cos(\odot - \lambda)$$

e alle colonne successive

1) il numero d' ordine delle osservazioni,

2) il tempo medio di Greenwich espresso in frazioni di giorno,

3) la fase, ossia la distanza (in frazione di giorno) dal minimo più vicino,

4) e 5) le differenze tra le grandezze misurate della variabile e delle due stelle di confronto nel senso : variabile meno stella di confronto,

6) la media grandezza dedotta della variabile.

Osservazioni fotometriche di R Canis majoris furono eseguite nell' Osservatorio di Harvad College da E. C. Pickering negli anni 1896—98 e da C. Wendell negli anni 1898—99; nell' Osservatorio di Catania da V. Fontana nella notte del 5 febbraio 1912; nell' Osservatorio di Sonneberg da C. Hoffmeister nell' ottobre 1913 e nell' Osservatorio di Capodimonte (Napoli) da O. Lazzarino dal gennaio all' aprile del 1914. Quest' ultimo autore in una Nota " Sulla curva di luce e sul periodo della variabile R Canis maioris „ (R. Osservatorio astronomico di Capodimonte, Contributi astronomici, N. 13) riporta e confronta le curve ricavate dalle osservazioni sue e da quelle di Pickering, Wendell e Fontana, e viene alle conclusioni:

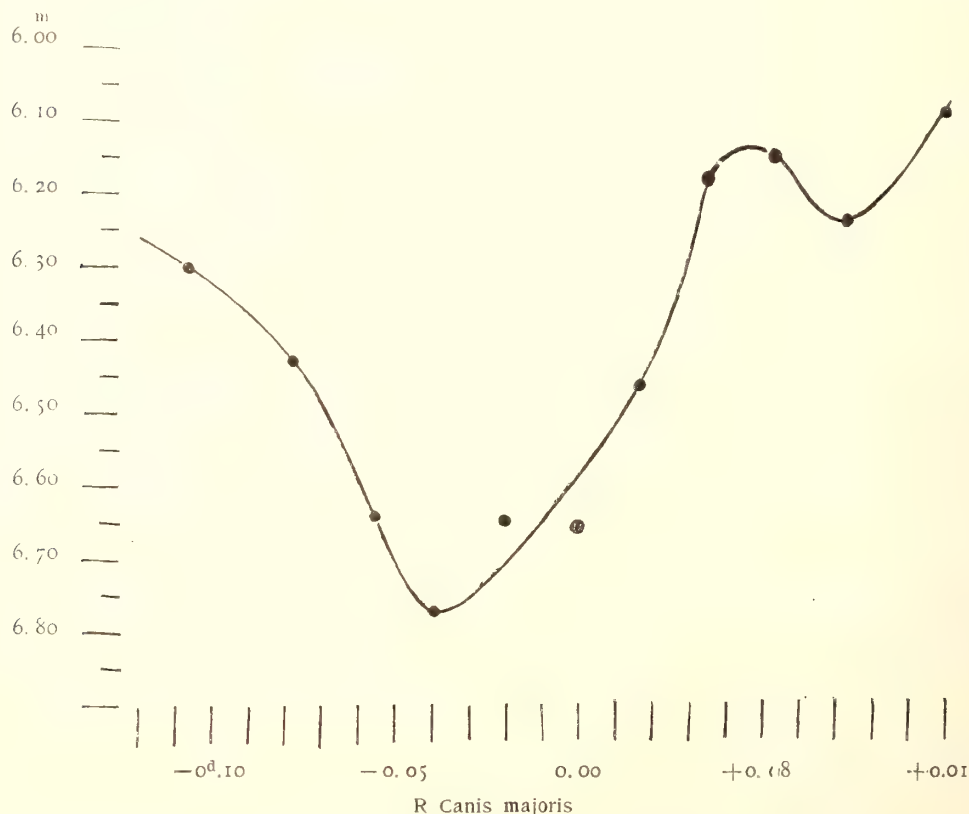
*a)* che esiste nel ramo ascendente della curva un' oscillazione secondaria di circa un decimo di grandezza,

*b)* che la durata della variazione di luce è in media di sei ore,

*c)* che l' amplitudine è inferiore a quella $0.^m8$, indicata nell' Effemeride di Hartwig,

*d)* che il valore medio del periodo relativo all' intervallo 1887-1898 è di poco superiore a quello di Chandler, mentre quello relativo all' intervallo 1898-1914 ne è sensibilmente inferiore.

* * *

R Canis majoris

# OSSERVAZIONI

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2420 | Fase | $V-C_1$ + | $V-C_2$ + | V |
|---|---|---|---|---|---|

**1916, Feb. 15. Ep. del min. 909$^d$.4901** + 0.0037

Sereno e velato in principio; coperto in fine. Oss. mediocre; interrotta per nuvole. ☾ 12$^d$.

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2420 | Fase | $V-C_1$ | $V-C_2$ | V |
|---|---|---|---|---|---|
| | d | d | m | m | m |
| 1 | 909. 3674 | —0. 1264 | 0. 18 | 0. 69 | 6. 21 |
| 2 | 4018 | —0. 0920 | 0. 80 | 0. 88 | 6. 61 |
| 3 | 4243 | —0. 0695 | 1. 10 | 1. 19 | 7. 22 |
| 4 | 4438 | —0. 0500 | 0. 99 | — | 6. 94 |

**Feb. 23. Ep. del min. 917$^d$. 4417** + 0.0033

Sereno e velato all'orizzonte. Oss. mediocre. ☾ 20$^d$.

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2420 | Fase | $V-C_1$ | $V-C_2$ | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 917. 3267 | —0. 1183 | 0. 40 | 0. 96 | 6. 45 |
| 6 | 3655 | —0. 0795 | 0. 46 | 0. 71 | 6. 36 |
| 7 | 4388 | —0. 0062 | 1. 31 | 1. 67 | 7. 26 |
| 8 | 4502 | +0. 0052 | 0. 58 | 1. 22 | 6. 67 |
| 9 | 4657 | +0. 0207 | 0. 59 | 0. 96 | 6. 55 |
| 10 | 4770 | +0. 0320 | 0. 25 | 0. 74 | 6. 27 |

**Mar. 2. Ep. del min. 925$^d$.3934** + 0. 0030

Agitato e trasparente. Oss. buona. ☾ 28$^d$.

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2420 | Fase | $V-C_1$ | $V-C_2$ | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 925. 2818 | —0. 1146 | 0. 13 | 0. 62 | 6. 15 |
| 12 | 2958 | —0. 1006 | 0. 07 | 0. 31 | 5. 96 |
| 13 | 3117 | —0. 0847 | 0. 06 | 0. 83 | 6. 22 |
| 14 | 3278 | —0. 0686 | 0. 25 | 0. 48 | 6. 14 |
| 15 | 3430 | —0. 0534 | 0. 28 | 0. 90 | 6. 36 |
| 16 | 3569 | —0. 0395 | 0. 70 | 1. 08 | 6. 66 |
| 17 | 3681 | —0. 0283 | 0. 58 | 1. 13 | 6. 63 |
| 18 | 3883 | —0. 0081 | 0. 13 | 0. 59 | 6. 14 |
| 19 | 3977 | +0 0013 | 0. 57 | 1. 27 | 6. 70 |
| 20 | 4080 | +0. 0116 | 0. 18 | 0. 63 | 6. 18 |
| 21 | 4189 | +0. 0225 | 0. 12 | 0. 29 | 5. 98 |
| 22 | 4311 | +0. 0347 | 0. 08 | 0. 41 | 6. 02 |
| 23 | 4437 | +0. 0473 | 0. 17 | 0. 64 | 6. 18 |
| 24 | 4564 | +0. 0600 | 0 13 | 0. 19 | 5. 94 |
| 25 | 4693 | +0. 0729 | 0. 15 | 0. 50 | 6. 10 |
| 26 | 4818 | +0. 0854 | 0. 05 | 0. 06 | 5. 83 |
| 27 | 4915 | +0. 0951 | 0. 23 | 0. 74 | 6. 26 |

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2420 2421 | Fase | $V-C_1$ + | $V-C_2$ + | V |
|---|---|---|---|---|---|

**1916, Mar. 10. Ep. del min. 933$^d$.3450** + 0. 0026

Sereno, leggermente velato in principio, nebbioso in fine. Oss. difficile. ☾ 7$^d$.

| N. d'ord. | T. M. Greenw. | Fase | $V-C_1$ | $V-C_2$ | V |
|---|---|---|---|---|---|
| | d | d | m | m | m |
| 28 | 933. 2641 | —0. 0835 | 0. 40 | 0. 85 | 6. 40 |
| 29 | 2808 | —0 0668 | 0. 68 | 0. 93 | 6. 53 |
| 30 | 2957 | —0. 0519 | 1. 12 | 1. 25 | 6. 96 |
| 31 | 3115 | —0. 0361 | 0. 56 | 1. 32 | 6. 74 |
| 32 | 3458 | —0. 0018 | 0. 51 | 0. 77 | 6. 42 |
| 33 | 3648 | +0. 0172 | 0. 59 | 0. 74 | 6. 44 |
| 34 | 3886 | +0 0410 | 0. 21 | 1.00 | 6. 38 |
| 35 | 4084 | +0. 0608 | 0. 02 | 0. 79 | 6. 18 |
| 36 | 4346 | +0. 0870 | 0. 15 | 0. 53 | 6. 12 |

**Mar. 18. Ep. del min. 941$^d$.2967** + 0. 0020

Sereno, bianchiccio, nebbioso all'orizzonte. Oss. mediocre. ☾ 15$^d$.

| N. d'ord. | T. M. Greenw. | Fase | $V-C_1$ | $V-C_2$ | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 941. 2694 | —0. 0293 | 0. 80 | — | 6. 75 |
| 38 | 2791 | —0. 0196 | 1. 04 | 1. 22 | 6. 91 |
| 39 | 2975 | —0. 0012 | 0. 48 | 1. 24 | 6. 64 |
| 40 | 3173 | +0. 0186 | 0. 53 | 0. 90 | 6. 49 |
| 41 | 3385 | +0. 0398 | 0. 11 | 0. 79 | 6. 23 |
| 42 | 3590 | +0. 0603 | 0. 10 | 0. 94 | 6. 29 |

**1918, Gen. 16. Ep. del min. 610$^d$.3721** + 0. 0045

Sereno e trasparente. Oss. ottima. ☾ 4$^d$.

| N. d'ord. | T. M. Greenw. | Fase | $V-C_1$ | $V-C_2$ | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 43 | 610. 3710 | —0. 0056 | 0. 57 | 0. 79 | 6. 46 |
| 44 | 3853 | +0. 0087 | 0. 45 | 0. 95 | 6. 48 |
| 45 | 3980 | +0. 2[illegible]4 | 0. 42 | 0. 56 | 6. 27 |
| 46 | 4143 | +0. 0377 | 0. 16 | 0. 52 | 6. 12 |
| 47 | 4307 | +0. 0541 | 0. 06 | 0. 29 | 5. 95 |
| 48 | 4441 | +0. 0675 | 0. 43 | 0. 32 | 6, 15 |
| 49 | 4608 | +0. 0842 | 0. 49 | 0. 52 | 6. 28 |
| 50 | 4748 | +0. 0982 | 0. 26 | 0. 06 | 5. 94 |

**1918, Feb. 2. Ep. del min. 627$^d$.4114** + 0.0042

Velato, nebbioso ; interruzioni per nubi. ☾ 21$^d$ .

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2421 | Fase | $V-C_1$ + | $V-C_2$ + | V |
|---|---|---|---|---|---|
| | d | d | m | m | m |
| 51 | 627.3706 | —0.0450 | 0.73 | 1.28 | 6.78 |
| 52 | 3824 | —0.0332 | 1.05 | 1.43 | 7.01 |
| 53 | 4001 | —0.0155 | 1.11 | 1.44 | 7.05 |

**Feb. 18. Ep. del min. 643.3147** + 0.0037

Velato, nebbioso ; interruzioni per nubi. ☾ 7$^d$ .

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2421 | Fase | $V-C_1$ + | $V-C_2$ + | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 643.3059 | —0.0125 | 0.58 | 1.14 | 6.63 |
| 55 | 3191 | +0.0007 | 0.63 | 0.87 | 6.53 |

**Mar. 7. Ep. del min. 660$^d$.3540** + 0.0027

Densi vapori ; Oss. fra nuvole. ☾ 24$^d$ .

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2421 | Fase | $V-C_1$ + | $V-C_2$ + | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 660.2730 | —0.0837 | 0.32 | 0.69 | 6.28 |
| 57 | 2907 | —0.0660 | 0.41 | 0.61 | 6.29 |
| 58 | 3205 | —0.0362 | 0.84 | 1.13 | 6.79 |
| 59 | 3605 | +0.0038 | 0.51 | 0.84 | 6.45 |
| 60 | 3970 | +0.0403 | 0.45 | 0.48 | 6.24 |
| 61 | 4141 | +0.0574 | 0.00 | 0.37 | 5.96 |

**1918, Mar. 15. Ep. del min. 668$^d$.3056** + 0.0022

Velato, nebbioso ; interruzione per nubi. ☾ 3$^d$ .

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2421 | Fase | $V-C_1$ + | $V-C_2$ + | V |
|---|---|---|---|---|---|
| | d | d | m | m | m |
| 62 | 668.2616 | —0.0462 | 1.12 | 1.25 | 6.96 |
| 63 | 2744 | – 0.0334 | 0.74 | 1.14 | 6.72 |
| 64 | 2862 | —0.0216 | 0.60 | 0.52 | 6.34 |
| 65 | 3235 | +0.0157 | 0.34 | 0.69 | 6.29 |
| 66 | 3400 | +0.0322 | 0.37 | 0.47 | 6.20 |
| 67 | 3536 | +0.0458 | 0.19 | 0.62 | 6,18 |
| 68 | 3706 | +0.0628 | 0.25 | 0.60 | 6.20 |
| 69 | 3925 | +0.0847 | 0.47 | 0.39 | 6.21 |
| 70 | 4039 | +0.0961 | 0.08 | 0.50 | 6.07 |
| 71 | 4169 | +0.1091 | 0.27 | 0.24 | 6.03 |

**Apr. 10. Ep. del min. 694$^d$.4325** + 0.0001

Sereno, trasparente. Oss. buona. ☾ 29$^d$ .

| N. d'ord. | T. M. Greenw. 2421 | Fase | $V-C_1$ + | $V-C_2$ + | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 72 | 694.3274 | —0.1052 | 0.43 | 0.72 | 6.35 |
| 73 | 3421 | —0.0905 | 0.43 | 0.57 | 6.28 |
| 74 | 3596 | —0.0730 | 0.31 | 0.88 | 6.37 |
| 75 | 3762 | —0.0564 | 0.58 | 0.71 | 6.43 |
| 76 | 3898 | —0.0428 | 0.68 | 1.08 | 6.66 |

## Curva di luce.

Ho dedotto dalla nota tavola di Müller i valori dell' estinzione atmosferica corrispondenti alle diverse distanze zenitali delle due stelle di confronto ed ho verificato che è assolutamente trascurabile l' influenza dell' estinzione sulle grandezze concluse della variabile, anche quando le osservazioni furono fatte molto prossimamente all' orizzonte.

Per tracciare la curva di luce che rappresenta le attuali osservazioni, ho distribuito, secondo la fase, le 76 grandezze concluse in gruppi di 7, l' ultimo ne comprende una in comune al precedente, ed ho ottenuto così 11 punti normali, ai quali ho attribuito pesi eguali, essendo pressocchè lo stesso per tutti il numero complessivo dei confronti con entrambe le stelle.

Il quadro seguente contiene alle colonne successive

1) il numero d' ordine dei punti normali,

2) il numero d'ordine delle osservazioni aggruppate nel corrispondente punto normale.

3) la fase in tempo medio eliocentrico espressa in frazione di giorno,

4) la grandezza $O$ della variabile quale risulta dalle osservazioni,

5) la grandezza $C$ ricavata dalla curva di ragguaglio,

6) i residui $O-C$.

La curva, che viene riportata in fine, presenta intorno al minimo, una notevole asimmetria ed una singolarità nel ramo ascendente, che si ritrova anche nelle curve ricavate dalle osservazioni di Wendel, di Pickering, di Fontana e di Lazzarino. Però tale singola rità ha forma, ampiezza e distanza dal minimo diversa nelle varie curve, il che, ammettendo, come suppone Pickering, che l' oscillazione sia dovuta all' effetto di un' onda di marea, e quindi a cause di ordine geometrico, potrebbe significare una variazione della detta onda dipendente probabilmente da mutamenti sulle reciproche condizioni dinamiche delle componenti del sistema binario.

Dalla curva si rileva inoltre che l' amplitudine della variabile, cioè la differenza tra la luce massima e la luce minima, è $0.^{m}73$, di poco inferiore a quella $0.^{m}8$ indicata nell'Efemeride di Hartwig, e che l'istante del minimo è in anticipo di $0.^{d}0375 = 54^{m}$ su quello calcolato con gli elementi di Chandler per $E = 9979$. Questa circostanza è stata verificata anche da Lazzarino, il quale ha ricavato per il periodo della variabile in discorso il valore $p = 1.^{d}1359480 = 1^{d}3^{h}15^{m}45^{s}.864$, inferiore di $0.^{s}355$ a quello di Chandler. Calcolando con tale valore di $p$ l' epoca del minimo per $E = 9979$, le attuali osservazioni la fanno anticipare di $0.^{d}0036 = 5^{m}11^{s}$ solamente. Quest' ultimo risultato conferma la conclusione di Lazzarino di un' oscillazione del periodo, in opposizione alla previsione del Pickering, secondo la quale per la forma della curva era da aspettarsi un graduale incremento del periodo.

## Valori normali per la curva di luce.

| N. d'ord. dei punti | N. d' ordine delle osservazioni aggruppate nel corrispondente punto normale | Fase | O | C | O—C |
|---|---|---|---|---|---|
| | | d | m | m | m |
| I | 1, 2, 5, 11, 12, 72, 73 | —0. 1068 | 6. 29 | 6. 29 | 0. 00 |
| II | 3, 6, 13, 14, 28, 56, 74 | —0. 0775 | 6. 43 | 6. 43 | 0. 00 |
| III | 4, 15, 29, 30, 57, 62, 75 | —0. 0558 | 6. 64 | 6. 64 | 0. 00 |
| IV | 16, 31, 51, 52, 58, 63, 76 | —0. 0380 | 6. 77 | 6. 77 | 0. 00 |
| V | 17, 18, 37, 38, 53, 54, 64 | —0. 0193 | 6. 64 | 6. 70 | —0. 06 |
| VI | 7, 19, 32, 39, 43, 55, 59 | —0. 0013 | 6. 64 | 6. 57 | +0. 07 |
| VII | 8, 9, 20, 33, 40, 44, 65 | +0 0140 | 6. 44 | 6. 44 | 0. 00 |
| VIII | 10, 21, 22, 41, 45, 46, 66 | +0. 0315 | 6. 16 | 6. 16 | 0. 00 |
| IX | 23, 24, 34, 47, 60, 61, 67 | +0. 0494 | 6. 12 | 6. 12 | 0. 00 |
| X | 25, 35, 42, 48, 49, 68, 69 | +0. 0705 | 6. 20 | 6. 20 | 0. 00 |
| XI | 26, 27, 36, 50, 69, 70, 71 | +0. 0952 | 6 08 | 6. 08 | 0. 00 |

# Sul doppio strato elettrico al contatto del mercurio con soluzione di acido cloridrico e sull'uso dell' Elettrometro capillare nello studio dei doppi strati al contatto del mercurio con Elettroliti e liquidi organici. [1]

Nota del Prof. V. POLARA

(con una figura)

## RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI

PROFF. A. RICCÒ E G. P. GRIMALDI (*Relatore*).

La nota del Prof. Polara verifica completamente la relazione del Lippmann nel caso del contatto del mercurio con soluzioni di acido cloridrico; espone e giustifica i risultati da lui ottenuti con l'uso dell' Elettrometro capillare nello studio dei doppi strati elettrici al contatto del mercurio con gli elettroliti ed i liquidi organici e mette in rilievo un metodo semplice per la determinazione della polarizzazione relativa al massimo della costante capillare.

La Commissione ritiene che l'interessante lavoro sia da pubblicarsi negli Atti della Accademia.

---

Due recenti ricerche [2] provano che alla variazione per polarizzazione della costante capillare dell' alcool etilico, della glicerina, e dell' aria ionizzata dai raggi di Röntgen al contatto col mercurio [3] fa riscontro una variazione nella densità del doppio strato elettrico al contatto, che può mettersi direttamente in evidenza facendo variare meccanicamente l' estensione del contatto.

Sarebbe interessante, a completare tale analogia, poter dimostrare che la relazione di

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto fisico della R. Università di Catania diretto dal Prof. G. P. Grimaldi.
(2) POLARA E MARESCA — R. Acc. Linc. Vol. XXVI, 2° sem. 1917—id. Vol. XXVII—1° sem. 1918.
(3) REBOUL — Journal de Physique — 7. 1908, pag. 846.

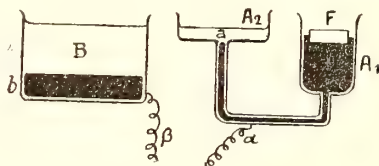
Lippmann [1]

$$(1) \qquad X = -\frac{dA}{dp}$$

($X$ densità del doppio strato, $A$ costante capillare, $p$ polarizzazione) si verifica nei casi indicati. Ma, mentre nel caso dell' aria ionizzata dai raggi di Röntgen non è stata tentata in alcun modo siffatta verifica, nel caso dei due liquidi organici le mie ricerche provano soltanto che la legge di variazione della densità del doppio strato è analoga a quella relativa al caso dell' acqua acidulata con acido solforico. Non essendo conosciuta però la legge di variazione della costante capillare di tali liquidi con la polarizzazione, nè potendosi ritenere determinata, come risulterà da questa stessa nota, la polarizzazione occorrente per annullare la densità del doppio strato elettrico al contatto, si può asserire che la verifica completa della relazione (1) è stata fatta dal Pellat [2], solo nel caso dell' acqua acidulata con $H^2SO^4$ $^1/_6$ in volume.

La determinazione della polarizzazione occorrente per rendere massima la costante capillare delle soluzioni in acqua di acido cloridrico è stata però oggetto di una accurata ricerca del Rothé [3], il valore così trovato nel caso di soluzioni $^1/_6$ in volume coincidendo sensibilmente con quello ottenuto dal Pellat [4] come limite fra la polarizzazione e l' Elettrolisi: mi è parso interessante trarre profitto di siffatta determinazione per estendere al caso della soluzione di HCl $^1/_6$ in volume la verifica completa della relazione (1), ricercando se la densità del doppio strato elettrico al contatto di tale soluzione con il mercurio varia per polarizzazione secondo la legge indicata, e sopratutto se la densità si annulla, conformemente a quanto richiede la (1), per il valore 0,59 Volta della polarizzazione ottenuto dal Rothé come corrispondente al massimo della costante capillare.

Mi son servito di un apparecchio simile a quello ideato dal Pellat e descritto nei miei lavori sopra citati: ho sostituito solo ai due recipienti $A_1$ ed $A_2$ (figura) due pallon-

cini di piccole dimensioni, il palloncino $A_2$ essendo aperto superiormente ed $A_1$ chiuso da un turacciolo di gomma forato ed attraversato da un tubo di vetro. La variazione di superficie del mercurio estensibile $a$, anzicchè per compressione sul galleggiante disposto in $A_1$, avveniva per lieve compressione dell' aria racchiusa in tale palloncino, mediante un tubo ed una peretta riuniti al tubo di vetro. Un compensatore a filo di platino di Du-Boys-Reymond [5], alimentato da un elemento Daniel piccolo modello, permetteva, collegando,

(1) PELLAT. — Cours d' Eléttricité — Tome III — pag. 149.
(2) PELLAT. — loc. cit. — pag. 151.
(3) ROTHÉ — Journal de Physique — X, 1901, pag. 546.
(4) PELLAT — Journal de Physique — IX, 1890, pag. 401.
(5) PELLAT — Cours d' Eléctricité — Tome II, pag. 476.

l' elettrodo α col cursore del compensatore, di polarizzare il mercurio *a* come catodo con f. e. m. progressivamente crescente da 0 ad 1 Volta. L' estremo del filo di platino del compensatore collegato al polo positivo dell' elemento era riunito, attraverso un galvanometro Ayton e Mather di 4 Ohm di resistenza, all' elettrodo β, e si aveva cura di mettere fuori circuito, quando si polarizzava, il Galvanometro mediante uno Shunt senza resistenza.

Adoperando mercurio purificato solo chimicamente con soluzione di acido nitrico, ho notato che, mentre il mercurio contenuto nel recipiente B veniva subito intaccato dalla soluzione, ricoprendosi d'uno strato lattiginoso, il comportamento elettrico del doppio strato si rilevava molto irregolare, ed una corrente polarizzante permanente di notevole intensità rendeva incerta la misura che mi proponevo.

Migliori risultati ho ottenuto distillando il mercurio nel vuoto col metodo di Weinhold [1], pulendo ed essiccando con molta cura gli apparecchi, ed adoperando acqua distillata ed acido cloridrico puro. Con tali precauzioni, mentre la superficie del mercurio si conservava tersa per alcuni giorni, ho notato che i due elettrodi *a* e *b*, se riuniti per breve tempo in corto circuito, assumevano sensibilmente lo stesso potenziale, e la corrente polarizzante, per il destarsi della f. c. e. m. di polarizzazione, diminuiva rapidamente d' intensità, fino ad assumere un valore permanente poco considerevole.

Esercitando allora sulla peretta una compressione rapida, ma molto debole, il mercurio estensibile *a* aumentava la sua estensione, senza subire oscillazioni molto ampie, ed il Galvanometro rilevava una brusca deviazione.

Mentre per polarizzazione nulla il Galvanometro andava fuori scala dalla parte dei numeri rossi quando si comprimeva la peretta — indice di corrente che percorreva il circuito nel senso da β ad α attraverso il Galvanometro — si osservava invece una deviazione progressivamente decrescente, sempre dalla stessa parte, a misura che la polarizzazione cresceva da 0 a 0,55 Volta, per tale valore essendo essa ridotta a due piccole divisioni della scala: si notava poi una deviazione dalla parte dei numeri neri della scala per polarizzazione superiore a 0,60 Volta.

E quindi da ritenere che l' annullamento della densità del doppio strato avvenga per 0,58 Volta circa di polarizzazione, in buon accordo con i risultati del Rothé e del Pellat, e che quindi sia verificata completamente anche in questo caso la formola (1).

Le compressioni forti della peretta, determinando oscillazioni molto ampie del mercurio *a*, erano invece accompagnate sempre, appena la polarizzazione superava qualche decimo di Volta, da deviazioni nel Galvanometro verso i numeri neri della scala, le quali ora seguivano immediatamente quelle verso i rossi, ora mascheravano completamente queste, rendendo in ogni caso molto incerta la misura.

Risultato ben diverso mi ha dato l' uso d' un Elettrometro capillare da me stesso costruito, ed intercalato nel circuito al posto del Galvanometro, il mercurio della colonna capillare essendo in contatto elettrico con l' elettrodo β. In tal caso ho osservato, comprimendo la peretta, come già per l' alcool e la glicerina [2], un abbassamento del menisco dell' Elettrometro quando era nulla la polarizzazione; ma tale abbassamento è stato notato, sebbene in misura decrescente, per polarizzazione crescente fino a 0,98 Volta, e solo con f. e. m. più elevata si è constatato l' innalzamento del menisco.

---

(1) FRICK'S — Physikalische Tecnik. pag. 584 fig. 1906.
(2) POLARA — R. Acc. Linc. Vol. XXVII — 1° sem. 1918.

Sostituendo al reocordo del Pouillet due cassette di resistenza, secondo la disposisizione potenziometrica del Bouty (1), ed allargando la ricerca con soluzioni di $H^2SO^4$ $^1/_6$ in volume e con acqua distillata semplicemente, ho avuto i seguenti risultati :

| Soluzione d' HCL $^1/_6$ in volume | | Soluzione d' $H^2SO^4$ $^1/_6$ in volume | | Acqua distillata | |
|---|---|---|---|---|---|
| Resistenza potenziometrica | Senso dello spostamento del menisco quando si comprime la peretta | Resistenza potenziometrica | Senso dello spostamento del menisco quando si comprime la peretta | Resistenza potenziometrica | Senso dello spostamento del menisco quando si comprime la peretta |
| 5000 ohm | abbassamento | 5000 ohm | abbassamento | 5000 ohm | abbassamento |
| 5200 » | » | 5200 » | » | 5200 » | » |
| 5300 » | » | 5500 » | » | 5400 » | » |
| 5400 » | fermo | 5550 » | fermo | 5500 » | fermo |
| 5500 » | innalzamento | 5600 » | innalzamento | 5606 » | innalzamento |
| 5800 » | » | 5800 » | » | 5800 » | » |

Poichè nel caso della soluzione di $H^2SO^4$ e nel caso dell'acqua distillata si è notata una differenza di potenziale iniziale fra il mercurio *a* ed il mercurio *b* determinata rispettivamente in 0,03 e 0,02 Volta col metodo di compensazione, ed il circuito potenziometrico presentava una resistenza complessiva di 11110 Ohm ed era alimentato da un piccolo accumulatore della f. e. m. di 2,02 Volta (determinata anche questa a meno di $^1/_{100}$ di Volta con lo stesso metodo di compensazione), si può rîtenere che la f. e. m. necessaria perchè il menisco dell'Elettrometro non si sposti, per compressione sulla peretta, sia, a meno di $^1/_{100}$ di Volta

per la soluzione d' HCL $e = 2,02 \times \frac{5400}{11110} = 2,02 \times 0,486 = 0,98$ Volta circa

» » » d' $H^2SO^4$ $e = \left(2,02 \times \frac{5550}{11110}\right) - 0,03 = 2,02 \times 0,499 - 0,03 = 0,98$ Volta circa

» l' acqua distillata $e = \left(2,02 \times \frac{5500}{11110}\right) - 0,02 = 2,02 \times 0.434 - 0,02 = 0,98$ » »

Se si considera che per l' alcool etilico e la glicerina ho avuto ancora lo stesso valore (2) è da argomentare che l' Elettrometro capillare, mentre può utilmente servire alla *rivelazione* d' un doppio strato elettrico al contatto del mercurio con i vari mezzi disposti nell' apparecchio di Pellat (specialmente quando, come nel caso dell' aria ionizzata, il mezzo ha una grande resistenza), non si adatta alla determinazione della polarizzazione occorrente per l' annullamento della densità del doppio strato elettrico, lo spostamento del suo menisco rilevando solo le variazioni della costante capillare del liquido elettrometrico con la polarizzazione.

L' estensione del mercurio *a* invero, diminuendo rapidamente il potenziale di tale elettrodo — e quindi anche il salto di potenziale fra *a* e *b* — determinerà un abbassa-

(1) PELLAT — Cours d' Éléctricité — Tome II. pag. 478.
(2) POLARA — loc. cit.

mento od un innalzamento del menisco a seconda che la f. e. m. adoperata è minore o maggiore di 0,98 Volta, in ragione della opposta variazione della costante capillare del liquido elettrometrico per polarizzazione dalle due parti del massimo.

Ed è da osservare che anche nei casi in cui (come accade appunto per la soluzione di HCl) l' inversione del doppio strato al contatto del mercurio con il liquido contenuto nell' apparecchio di Pellat avviene per polarizzazione inferiore a quella relativa al massimo della costante capillare del liquido elettrometrico, non può, verosimilmente, la disposizione descritta mettere in evidenza l' inversione di tale doppio strato con un innalzamento del menisco dell' Elettrometro per polarizzazione inferiore a 0,98 Volta, giacchè, data la grande resistenza elettrica del liquido elettrometrico nella canna capillare rispetto a quella del liquido contenuto nell' apparecchio, fra i due mercuri $a$ e $b$ si stabilirà solo una piccola differenza di potenziale, incapace di produrre l' inversione del doppio strato in $a$, la differenza di potenziale fra il polo positivo dell' elemento ed il cursore mobile sul reocordo di Du Boys-Reymond stabilendosi quasi integralmente fra i due elettrodi dell' Elettrometro.

E ciò spiega la discordanza dei risultati ottenuti nel caso della soluzione di HCl con i due metodi.

La concordanza dei valori ottenuti, con l' uso dell' Elettrometro nei diversi casi, mentre mi ha indotto a dare una diversa valutazione ed interpretazione alle esperienze della mia precedente Nota ([1]), mette in rilievo un metodo semplice e spedito per la determinazione della polarizzazione relativa al massimo della costante capillare del liquido dell'Elettrometro, bastando un Elettrometro capillare da servire solo come strumento di zero, senza manometro e pera di compressione, a differenza di quanto si pratica con i metodi generalmente adoperati ([2]) nei quali tale valore si deduce dalla curva che esprime, in funzione della polarizzazione adoperata, l' altezza della colonna manometrica occorrente per riportare allo zero il menisco dell' Elettrometro.

L' Elettrometro da me costruito era sensibile solo al centesimo di Volta e tuttavia la determinazione della polarizzazione relativa al massimo della costante capillare, come appare dalla tabella precedente, è stata fatta commettendo un errore che non supera il centesimo di Volta.

---

([1]) POLARA — loc. cit.

([2]) PELLAT. — Cours d' Éléctricité — Tome IV — pag. 136.

Dott. COMES SALVATORE

**Libero docente di Zoologia e di Anatomia comparata nella R. Università di Palermo**

# Fenomeni di rigenerazione e di auto-innesti in larve di Anfibi anuri

( con 8 fig. nel testo )

Scorrendo l'importante letteratura, che riguarda il capitolo delle rigenerazioni e degli innesti delle larve degli Anfibi anuri, mi sono accorto che non è fatta menzione di alcune esperienze, che in questo genere di ricerche si potrebbero prestare ad una serie di considerazioni in appoggio ed integrazione delle vedute esposte dai diversi ricercatori.

A tali esperienze sono venuto incidentalmente nel corso di ricerche volte ad uno scopo ben diverso.

## Esperienza 1ª.

In larve di 15 e persino di 20 millimetri di lunghezza ho praticato un doppio taglio dell'asse neuro-miocordale, l'uno corrispondente al terzo anteriore della coda, l'altro al terzo posteriore; tuttavia i due segmenti dell' asse così risultanti rimanevano in situ, avendo avuta l'avvertenza di rispettare il lembo caudale.

L'operazione, che è rappresentata nella fig. 1 , si facilita fissando coll' estremità di

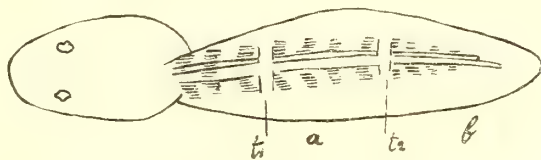



Fig. 1.

un ago l'asse a livello del punto in cui si vuol incidere, e strisciando poi colla estremità di un altro ago sull' asse stesso nel senso trasversale sino ad assicurarsi che esso era stato tagliato.

L' assicurazione della doppia troncatura corrispondente ai due tagli veniva fatta direttamente, mediante l'osservazione microscopica, sia per questo che per i soggetti delle seguenti esperienze. Le possibili alterazioni, rigenerazioni e riduzioni erano pure in ogni caso controllate al microscopio, sul vivo.

Il soggetto operato non presenta nella sua vita post-operativa notevoli alterazioni, vuol dire che gli effetti dello choc operatorio, se mai ce ne fossero, son ridotti al minimo.

L' animale presenta i suoi soliti movimenti, provocati dapprima, ma ben tosto spontanei, e può modificare la sua immersione nell' acqua del recipiente. Dopo un paio di giorni

dall' operazione avviene il collabimento dei due monconi dell'asse neuro-miocordale a livello del 1° taglio, (fig. 2) dopo tre o quattro giorni tale collabimento si manifesta anche a

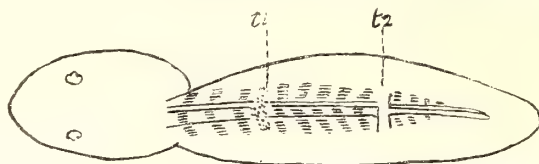



Fig. 2.

livello del secondo taglio (fig. 3).

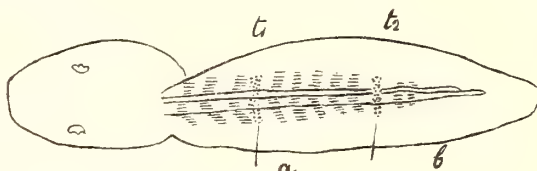



Fig. 3.

I movimenti sono ritmici lungo tutta la estensione della coda separata dall'asse encefalo-midollare al principio dell' operazione, però, sino a quando è avvenuto il collabimento, per far muovere il terzo medio o il terzo posteriore di essa bisogna stimolare il terzo anteriore. Uno stimolo al terzo posteriore non solo non si trasmette alle parti anteriori, ma non è atto a far muovere lo stesso. Avvenuto il collabimento del terzo medio col terzo anteriore, uno stimolo del 1° si propaga al secondo, ed infatti il soggetto reagisce con movimenti in questa parte, che vengono trasmessi poi anche alle parti posteriori. Similmente avvenuta la cementazione del terzo medio col terzo posteriore, una stimolazione di questo si propaga ai due terzi anteriori, e quindi si ottiene il movimento a cominciare dal terzo anteriore. La prima e più ovvia considerazione che emerge da tali reazioni del soggetto è che le stimolazioni non si trasmettono se non dopo il collabimento del midollo spinale.

Non basta, evidentemente, il decorso obliquo delle fibre nervose sensibili, per condurre lo stimolo oltre il segmento tagliato. Un' altra considerazione ricavabile dall' analisi del fenomeno sarebbe questa, che l' asse neuro-miocordale di ogni segmento presenta anche dopo il taglio la facoltà rigeneratrice, e questa tanto più spiccata quanto più il segmento è anteriormente disposto. E siccome si presume che l' attitudine rigeneratrice rappresenti la reazione ad uno stimolo trofico, di natura nervosa, siamo indotti ad ammettere la segmentalità di tale stimolo e perciò stesso a considerare tale segmentalità come una nuova prova della teoria segmentale nel senso del Loeb. Questa conseguenza va accettata però con una riserva: tanto più il segmento rigenerante è giovane, tanto meno esso conserva le sue attitudini segmentali (*) rispetto ai precedenti.

### Esperienza 2ª.

Le considerazioni fatte, e specialmente l'ultima, vengono compulsate da una seconda esperienza. In un certo numero di larve, della stessa età e della stessa lunghezza delle precedenti, si praticava, col solido metodo, e senza intaccare il lembo caudale, un taglio

(*). Vedremo in seguito le ragioni del fatto.

dell'asse neuro-miocordiale al terzo anteriore e si asportava completamente la coda al terzo posteriore.

Ecco i fenomeni susseguenti all'operazione.

Nel 3° anteriore, al solito, e nello stesso lasso di tempo che nella esperienza precedente, si ricostituiva la continuità dell'asse.

Nel terzo posteriore si iniziava la rigenerazione della coda, con maggiore sviluppo dei lembi epidermici laterali rispetto al mediano, con prolungamento, ma notevole assottigliamento, della corda dorsale e con minore prolungamento del tubo neurale.

La terza parte dell'asse neuro-miocordale rappresentata dai miotomi non rigenera ugualmente, infatti dopo 14 giorni dall'operazione i miotomi non si osservano ancora nel cercine caudale rigenerante. A che cosa devesi la scomparsa dei miotoni nella parte rigenerante ? La risposta non è facile. DRIESCH forse direbbe che essi non rigenerano perchè si sono esaurite quelle ch'egli chiama cause primarie dello sviluppo, in questa origine mosaica dei singoli tessuti ed organi del soggetto. A mio credere i miotomi non rigenerano perchè effettivamente per essi si tratta non di rigenerazione, ma di neoformazione, essendosi asportata la porzione miotomale mesodermica corrispondente.

E si comprende bene che non si può formare un organo ex novo, quando si è tolto il germe passibile di rigenerazione.

Il GIARDINA verbalmente mi assicura, e ciò si rileva del resto dall'assunto dei suoi lavori editi, che se non si sviluppano i miotomi nella loro caratteristica disposizione segmentale si sviluppano intorno alla corda una guaina di fibre di solito longitudinali nelle quali non si riscontra però una disposizione metamerica. Il fatto merita di esser controllato, come mi riprometto di fare, studiando le modificazioni del comportamento dei tessuti e degli organi delle larve operate.

## Esperienza 3ª.

Notevoli sono pure i risultati di una terza esperienza da me ugualmente eseguita e che si può considerare come una variante della prima esperienza da me riferita.

A larve di Discoglossus pictus della grandezza solita si sono praticati tre tagli dell'asse neuro-miocordale, lasciando però *in situ* per mezzo del lembo i tre segmenti derivanti. Or bene, rapidamente, di solito fra le ventiquattro ore, almeno uno e spesso due di tali segmenti degeneravano, staccandosi quindi dal corpo. Però dopo il distacco, la superficie libera del moncone prossimale, appartenga essa al 3° anteriore o al 3° medio, inizia fenomeni evidenti di rigenerazione caudale, con tutti i caratteri propri di questi e da me esposti sopra nella seconda esperienza.

Questo fenomeno farebbe pure diminuire la indipendenza segmentale delle parti poste sempre più posteriormente e farebbe attribuire alle anteriori la causa dei processi morfogenici di rigenerazione.

In altri termini mentre il 3° anteriore della coda della larva è suscettibile di rigenerare (forse per azione della porzione del midollo lombare che vi si connette) non lo è il 3° medio e tanto meno il 3° posteriore. Evidentemente non può avvenire un collabimento fra i margini di 2 segmenti nell'uno dei quali sono esaltati i poteri rigenerativi, e nell'altro si manifestano quelli di degenerazione.

Si potrebbe per altro, senza pregiudicare la teoria segmentale, spiegare la mancata

rimarginazione del 3° tratto, o del 2°, come un effetto della inanizione in cui sono caduti i relativi organi e tessuti, essendo state violentemente troncate le vie vascolari nutritive. Ma io ricordo che queste si ricostituiscono nei tratti collabiti, anche in quelli in cui si manifesta la degenerazione dei miotomi.

Si domanda perchè avviene tale speciale comportamento per il quale non conservano più attività rigenerative i due ultimi segmenti di tali individui, mentre tali attività si conservano nel secondo segmento susseguente al taglio posteriore degli individui operati della prima esperienza.

Chiamando A e B ed A, B, C rispettivamente i segmenti derivati dal taglio doppio o dal triplo degli individui relativi alle due esperienze, è evidente che morfologicamente, o meglio quantitativamente i due pezzi B, C della seconda serie dei soggetti equivalgono all'unico pezzo B di quelli della prima serie. Il solo fatto di variazione avvenuto è l'esecuzione di un terzo taglio nella massa di quest' ultimo. Dico il solo, perchè le esperienze ripetute nei sensi sopra esposti davano nell'un caso e nell'altro sempre i medesimi risultati. Forse non si sarebbe lontani dal vero, ammettendo che la vitalità di un segmento e la sua conseguente attitudine a rigenerare vanno diminuendo di intensità tanto più quanto più si procede nelle regioni posteriori, che sono anche le più giovani, del corpo della larva. Non si sarebbe forse lontani dal vero, ammettendo, in subordinazione, una specie di zona di rigenerazione, che occupa la porzione anteriore dell'asse neuro-miocordale. Infatti il segmentoA compreso tra i due primi tagli dei soggetti triplicemente tagliati si comporta come il segmento omonimo dei soggetti troncati. Infine si può pensare insieme con altri AA. che le rigenerazioni segmentali avvengano solo data una certa estensione del segmento considerato. In ogni caso questi risultati, a parte la causa di essi, pare contraddicano alla concezione minima della teoria segmentale del Loeb, poichè *non tutti i segmenti assumono uguale valore morfogenetico;* e bisogna ammettere per spiegarli che intervengano qui cause di auto regolazioni postume all' esperienza e specifiche per ogni segmento. Un altro risultato che sorprende nelle suddette ed in altre simili esperienze e che non parla certamente a favore della teoria del Loeb, è la degenerazione dei miotomi, precisamente la scomparsa graduale — degenerazione vera e propria — dei miotomi dell' ultimo segmento degl' individui bitroncati, anche dopo avvenuta la ricementazione, e la mancata neoformazione di miotomi nella parte rigenerante degli individui con coda tagliata. In quest' ultimo caso, allo opposto, si rigenerano la corda ed il tubo neurale, però la corda inizia la rigenerazione con un cercine molto più stretto del calibro cordale anteriore al taglio ed esso cercine si prolunga in un' appendice visibilmente più sottile. Il tubo neurale a livello del taglio s' ingrossa a mo' di vescicola, dalla quale poi si prolunga una svaginazione molto più sottile, a direzione irregolare, fino a tanto che non incontra la corda medesima. Il fatto che la corda, rigenenerando, non conserva lo stesso calibro, ma si riduce ad uno più piccolo, è degno di studio. Si potrebbe spiegare, ammettendo che, nel punto in cui la rigenerazione si inizia, i singoli fattori morfogenetici assumono un notevole carattere embrionale, dando nei diversi organi lo sviluppo di quei diametri possibili in forme embrionali molto giovani. D' altro canto come si spiega la formazione vescicolare del tubo neurale, ciò che pare contravvenire direttamente alla spiegàzione testè addotta? Quivi credo molto probabile si tratti di un fenomeno meccanico attribuibile alla marcata funzione di sostegno e di guida, che esercita sul tubo la corda dorsale, come ha ben lumeggiato il Giardina, una specie di tigmotropismo esercitato dalla corda sul tubo neurale medesimo.

### Esperienza 4ª.

Un' altra esperienza analoga alla precedente, ma con resultati più complessi, consiste nel tagliare la pinna caudale al terzo posteriore. La rigenerazione si inizia e si svolge normalmente secondo le modalità testè ricordati. Se adesso, in un momento avanzato della rigenerazione, p. es. 15 giorni dopo l' operazione, si pratica una nuova recisione della coda rigenerata a livello del taglio primitivo, in altri termini asportando la sola parte neoformata, si osserva il ricorrere di fenomeni rigenerativi simili ai precedenti: prolungamento della corda con calibro più assottigliato, formazione del bottone neurale che poi si allunga nel prolungamento ulteriore a clava del tubo, assenza dei miotomi (figura 4). (1)

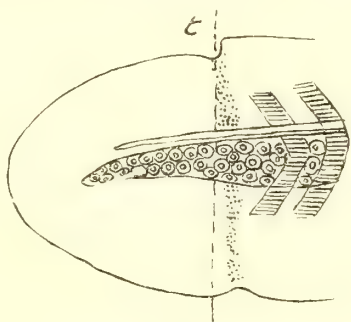



Fig. 4.

Il soggetto presentava colla massima evidenza questi fenomeni rigenerativi 15 giorni dopo il secondo taglio, quando cioè complessivamente era trascorso un mese dal primo. Io opino che mutilazioni ripetute a determinati intervalli della coda neoformatasi abbiano a presentare sempre gli stessi fenomeni rigenerativi.

### Esperienza 5ª

Un' altra esperienza da considerare come una variante della seconda da me esposta, consiste nell' incidere l' asse neuro-miocordale al terzo anteriore e nello asportare la coda

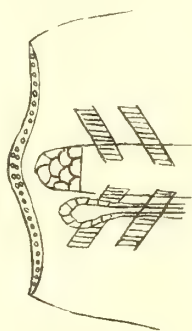



Fig. 5.

del terzo posteriore. A livello dell' incisione si manifestano fenomeni di cementazione una settimana dopo l'operazione, e 32 giorni dopo essi portavano ad una ricementazione completa delle parti incise. Nel contempo si iniziava e progrediva la rigenerazione della coda e del tubo neurale con le modalità osservate nelle precedenti esperienze.

(1) Al vocabolo miotomo intendo dare sempre il suo vero significato quale gli viene attribuito dalla embriologia cioè di segmento muscolare derivante da una *tasca celomica* e costituito da fibre muscolari striate.

### Esperienza 6ª

Se il taglio della coda si praticava al terzo anteriore, subito posteriormente all'apertura anale, due giorni dopo l'operazione si notava maggiore sviluppo nei lati della pinna caudale rispetto al centro di essa, corrispondente all'asse neuro-miocordale. Dopo quattro giorni si iniziava la rigenerazione della corda, mentre s' arrestava lo sviluppo dei miotomi. La corda in via di sviluppo, spinge in avanti il lembo caudale centrale, che da concavo diviene convesso, ( figura 6 ) e, accentuandosi il progredire di quella, avviene che in sua

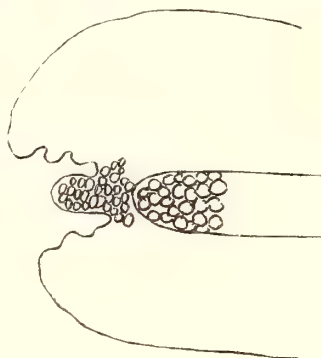



Fig. 6.

corrispondenza il lembo centrale della pinna caudale fa notevole rilievo sulle parti laterali, ciò fra il 15° e il 20° giorno dell'operazione.

Questa particolare maniera di rigenerazione del lembo caudale si può considerare come una prova dell'azione morfogenetica della corda sul lembo caudale medesimo attribuita ad essa dal Giardina, e a metterla di più in rilievo è bene ricordare che nei casi in cui l'asse cordale di prolungamento devia dalla linea mediana, abbassandosi verso l'orlo ventrale, il lembo caudale sospinto in avanti assume una disposizione ventrale, mentre dorsalmente resta un lobo meno avanzato, perchè non sottoposto all'azione meccanica della corda (figura 7). Nelle due ultime esperienze la sorte del tubo neurale è identica a

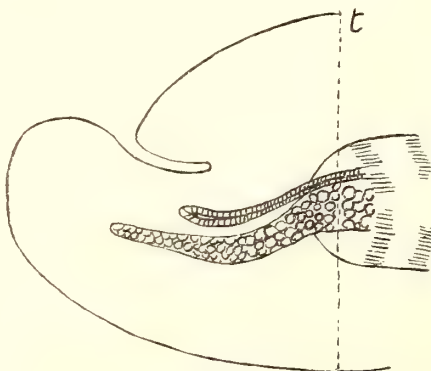



Fig. 7.

quella delle prime ricordate. Esso si prolunga nella porzione rigenerante, ma restando meno sviluppato della corda e a causa dello assottigliamento di questo, non vi striscia sopra, ma decorre libero e a clava. I miotomi, all'opposto, non si neoformano.

**Esperienza 7ª.**

Un'ultima esperienza consiste nella incisione della coda al suo terzo posteriore, interessando l'asse neuro-miocordale e in modo che la coda rimanesse ancora attaccata col lembo ventrale. Si ebbe la rigenerazione d'una piccola coda alla superficie prossimale del taglio. La superficie distale invece rigenerava i tessuti epidermici del lembo, che collabivano con quelli posteriori della larva. I miotomi regrediscono nella porzione di coda innestata, e non si neoformano nella prima (figura 8).

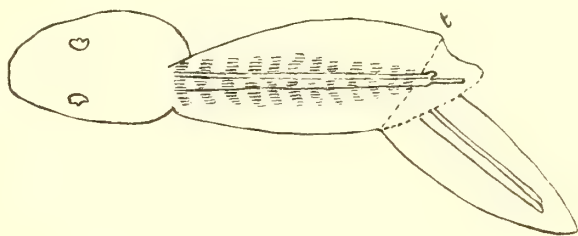



Fig. 8.

Questi i fatti da me osservati nel decorso delle mie esperienze. Se li vogliamo mettere in rapporto, poichè si prestano ad esser con essi confrontati, con quelli messi in rilievo dal Giardina in una serie di importanti e recenti lavori, troviamo che, concordemente a quanto questo A. aveva notato, non appariscono perchè inibiti nel normale, riflessi segmentali, poichè anche stimolando la porzione posteriore di una coda collabita o rigenerata si ottengono movimenti di insieme, che si iniziano dal lato anteriore. La ragione di questo fatto sta, secondo me, nell'atrofia dei muscoli metamerici della porzione distale, per cui mancando i muscoli, non è possibile un riflesso visibile nel tratto corrispondente. Nei casi di persistenza dei miotomi, come quelli osservati da Giardina, sia di conservazione nei pezzi innestati, sia di rigenerazione nelle code rigenerate, riesce molto più difficile rintracciare la causa del mancato riflesso, come del resto egli abilmente ha tentato con una serie di sottili analisi di fenomeni che non è qui il caso di ricordare. A noi d'altra parte spetta spiegare il perchè dell'atrofia dei segmenti muscolari delle porzioni caudali rigeneranti, o dell'ultimo segmento e rispettivamente dell'ultimo e del penultimo negli individui con recisione doppia o tripla dell'asse neuro-miocordale. Si potrebbero invocare due ragioni: o i processi istogenici di collabimento assorbono tali materiali nutritivi da diminuire i normali processi trofici necessarî allo sviluppo dei miotomi, ovvero, per causa della disposizione metamerica dei miotomi, non è più possibile dopo il taglio avere una rigenerazione di essi, nel senso longitudinale e segmentale a un tempo.

La prima di queste due ipotesi è atta a spiegarci l'atrofia dei miotomi nei segmenti posteriori o nell'ultimo segmento degli individui con gli organi assiali due o tre volte troncati, come anche, nel primo caso, il distacco dell'ultimo o dei due segmenti terminali.

Essa però non è sufficiente a spiegarci perchè, quando la coda si rigenera in tutte le altre sue parti, i soli miotomi non debbano neoformarsi.

La seconda ipotesi può spiegarci anche questo fatto appunto perchè, data la soluzione di continuità dei segmenti miotomici, questi non possono neoformarsi, mancando le parti omonime rigenerande. Ciò invece è agevole a verificarsi per la corda dorsale e pel tubo

neurale, che possono svilupparsi mediante una semplice proliferazione cellulare. Tuttavia è verosimile che la persistenza o la degenerazione dei miotomi si connetta con lo stato nutritivo del tratto relativo alla persistenza o alla degenerazione dei medesimi. Così p. es. negli individui bitroncati i miotomi del segmento prossimale compreso fra i due tagli si conservano senza dubbio pel rapido collabimento avvenuto fra i due segmenti del tubo neurale, per cui si ripristinano le vie nervose centrali e periferiche, queste trofiche certamente rispetto ai muscoli che innervano ma più che le vie nervose le vie vascolari più spiccatamente trofiche, mentre nel secondo segmento il collabimento avviene più tardi, quando di solito è già trascorso il tempo utile per la conservazione dei miotomi stessi. Quando la persistenza dei miotomi si realizza anche nel 2° segmento, e talora questo fenomeno si riscontra, bisogna pensare che i poteri di conservazione dei miotomi non erano scomparsi prima del collabimento. È evidente però che questo secondo collabimento avviene in subordinazione del primo, perchè si realizza dopo di esso. Così, nelle semplici rigenerazioni caudali, il sistema nervoso e l'apparato circolatorio, più impegnati nei processi della propria rigenerazione, in subordinazione a quelli della corda dorsale, non esercitano verosimilmente alcuna azione trofica miogena, almeno per il tempo in cui l' esperienza è durata. Potrebbe anche darsi che in seguito quest' azione potesse essere esplicata, specie per la formazione di fasci di miofibre a disposizione non segmentale.

Malgrado la mancanza dei miotomi, è indiscutibile che tanto la coda rigenerante, quanto quella ricostituita per collabimento, dopo averne praticato il bitroncamento, compiono movimenti di propulsione, coordinati a quelli del treno anteriore dell' animale, senza che quivi alcun movimento si compia. Qual' è l' organo che determina il movimento se i miotomi non si son formati o sono scomparsi? A parte la possibile formazione di elementi muscolari non segmentali, io credo che i movimenti di propulsione o gli altri svariati possibili siano determinati dall'azione della corda dorsale che nel girino deve avere una parte ben più importante di quella fin qui sospettata (Giardina).

Ora il Giardina ha osservato, recentemente, che attecchisce sempre al posto d' una coda tagliata d' un girino di una certa età, un' altra coda appartenente ad un soggetto di età uguale o inferiore o superiore, mentre ciò non avveniva nel caso che il porta innesto era un embrione in cui ancora la circolazione era notevolmente minore.

La coda innestata collabiva in tutti i suoi organi con quelli omonomi del moncone del porta innesto in modo da avere una ricostituzione morfologica e fisiologica.

Io credo che tale resultato, a parte la maggiore difficoltà dell' esperienza ed anche la maggiore eleganza di essa, e le differenze inevitabili pei dati diversi delle singole esperienze corrisponda essenzialmente a quelli ottenuti da me negli individui con asse, neuromiocordale troncato o bitroncato e che sia da riferire allo stato nutritivo del tratto innestato. Anche qui si ottiene il collabimento e si ricostituisce l'integrità individuale dal punto di vista morfofisiologico. Solo che qui al posto di un etero innesto si ha sempre da fare con un auto-innesto. Lo stato nutritivo più favorevole delle regioni anteriori della larva ci può anche far comprendere perchè di solito il segmento terminale o rispettivamente gli ultimi due segmenti dei girini a doppia o tripla troncatura atrofizzano, e perchè nell' ultimo caso essi cadano addirittura. Evidentemente perchè essi rappresentano degli innesti più vecchi del porta innesto e come tali non collabiscono o presentano un collabimento effimero.

Ma perchè sono più vecchi? Per la semplice ragione che essi sono meno nutriti e quindi in essi si avrebbe una notevole precocità di atrofia, per quanto nominalmente essi

dovessero rappresentarci dei segmenti più giovani. Questo fatto si presta a farci modificare il concetto dell' età relativa di una parte del corpo o di un organo.

Non è più giovane la parte ultima a formarsi; per noi è più giovane la parte la quale, pur essendo apparsa prima nella ontogenesi, gode tuttavia d' un ricambio materiale più abbondante e in cui i prodotti di rifiuto vengano smaltiti con maggiore facilità. Epperò tra i due segmenti, terzo medio e terzo posteriore — quando si tratta di avere due segmenti — il primo sarà fisiologicamente il più giovane, quello perciò che più presto si riconnette col terzo anteriore. I fatti osservati ci spiegano pure perchè sia *primum moriens* nelle esperienze da me esposte sempre l' ultimo segmento cioè il più giovane in senso assoluto. Anche i fenomeni interessanti delle culture dei tessuti possono venire da queste considerazioni convenientemente illustrati. È chiaro che in una cultura il tessuto conserva un' attitudine embrionale che si esplica con la continua riproduzione dei suoi elementi, mentre esso la avrebbe perduto *in situ*.

Il fenomeno si può spiegare colla maggiore portata del ricambio materiale di cui godono gli elementi istici in cultura.

Analogamente, con l' aiuto delle superiori osservazioni, la spiegazione di molti fenomeni degenerativi, durante i processi di metamorfosi, potrebbe assumere una nuova orientazione.

Riassumendo, dai fatti su esposti si possono ricavare le seguenti conseguenze:

1. I miotomi regrediscono negli individui operati di bitroncamento dell' asse neuromiocordale, solo nel segmento terminale, cioè in quello posteriore al secondo taglio.

2. Regrediscono pure negli individui operati di triplice recisione dell' asse neuromiocordale, a cominciare dal segmento terminale, fino ad aggredire il secondo segmento.

3. Regrediscono ancora in ogni caso di asimmetrico collabimento del segmento posteriore con la superficie prossimale del moncone, in modo che non avvenga il collabimento degli organi omonimi dell' asse neuromiocordale.

4. Non si formano miotomi in ogni caso di rigenerazione caudale, mentre rigenerano la corda dorsale e il tubo neurale, a qualunque livello sia praticato il taglio, anche se trattasi di rigenerazioni ripetute, o di rigenerazioni del segmento prossimale al taglio di cui si è fatto cenno sopra ai numeri 2 e 3.

5. Eseguendo il troncamento doppio dell' asse neuromiocordale, senza interessare il lembo caudale, si ottiene il collabimento delle superficie tagliate dapprima nel taglio anteriore, poi nel posteriore.

Coll' unità morfologica si costituisce l' unità funzionale, in quanto anche il segmento terminale, a collabimento compiuto, conduce gli stimoli.

6. Eseguendo il triplice troncamento degli organi assiali, avviene il collabimento del primo segmento colla parte anteriore, il secondo di solito non collabisce, il terzo non solo non collabisce, ma degenera e cade. Spesso cade anche il secondo segmento.

In ognuno dei due casi però la superficie divenuta posteriore presenta evidenti fenomeni di rigenerazione caudale.

*Palermo, Aprile 1917.*

Istituto di Anatomia, Fisiologia comparate e Zoologia della R. Università di Catania

Prof. BRUNO MONTEROSSO

AIUTO E LIBERO DOCENTE

# Ulteriori ricerche sull' intima struttura dell' ovaia dei Mammiferi

## NOTA I.

## Epitelio germinativo, Teca follicolare e Cellule tecali nell'ovario della Coniglia.

(con una tavola e 3 figure nel testo)

# RELAZIONE

DELLA COMMISSIONE DI REVISIONE COMPOSTA DAI SOCI EFFETTIVI

PROFF. R. STADERINI E A. RUSSO (*Relatore*).

Il lavoro presente porta indubbiamente un contributo di fatti e di idee sui punti più notevoli e nello stesso tempo più contrastati della costituzione intima e del significato di determinate strutture dell' organo sessuale femminile dei Mammiferi : l'epitelio esterno , la teca follicolare e le cellule tecali. Risalta subito come l' A. abbia tentato di mettere in nuova luce anche forme e fenomeni , in riguardo a cui ormai da tempo si era , quasi generalmente, accettato un criterio che , se pur non del tutto soddisfacente , e definitivo , pareva bastasse all' interpretazione dei fatti comuni e comunemente ammessi.

Nel lavoro dunque si è tentati di fare una prima distinzione : da una parte vanno considerati a sè i reperti morfocitologici che presentano massima attendibilità per l' evidente cura con cui sono espressi e suffragati da dimostrazioni ; dall' altra vanno poste le illazioni, delle quali alcune almeno, per la loro originalità, sebbene probabili, hanno bisogno di essere meglio confermate.

Che se ciò avvenisse pienamente, e nel senso voluto dall' Autore, non è dubbio che nuove, più ampie, e più sicure vie sarebbero aperte all' investigazione morfofisiologica dell' organo ovarico, il quale ormai e sempre più si mostra di una complessità straordinaria di forme e di funzioni.

## SOMMARIO

## 1. Origine delle cellule tecali.

Fra gli argomenti che riguardano la fine struttura e l' istogenesi dell'ovario nei Mammiferi, è appunto questo uno dei più dibattuti. Diverse teorie sono state emesse in proposito; ma pare che nessuna sia fondata su basi tanto solide, da poter essere considerata come definitiva e per ogni verso soddisfacente; chè anzi si può ben dire che fino ad ora non si è nemmeno raggiunto un accordo qual si sia. D'altra parte, la letteratura è povera di lavori specifici, mentre si possono trovare molte notizie in proposito, in tutte le memorie che trattano o che hanno relazione coll' ovogenesi, e colla struttura dell' ovario in generale o in particolare. Difatti, il problema della cellula tecale va intimamente connesso con quello, non meno oscuro e importante, sebbene anch' esso un po' trascurato, dell'origine o, per dir meglio, del meccanismo di formazione e della funzione vera della teca stessa, nonchè, come vedremo, della forma ed attività dell'epitelio germinativo e della costituzione dello stroma ovarico.

Sarà dunque necessario fermarsi a riguardare partitamente ciascuno di questi argomenti, per meglio essere in grado di interpretare la minuta struttura dell' ovaia nei Mammiferi.

## 2. Struttura dello stroma ovarico.

Una lunga pratica, acquistata con numerosissimi e reiterati tentativi, mi ha messo in condizione di poter affermare che, chi volesse avere un' esatta idea dell' argomento, evitando, al possibile, le svariate cause d' errore, deve anzitutto portare le sue ricerche su ovaie di animali molto giovani, preparate e sezionate *in toto*, con i riguardi che saranno indicati in altra parte del lavoro. Inoltre, i tagli, fatti con rasoio rigorosamente affilato, devono essere tali da affettare l' ovaia stessa preferibilmente secondo le linee meridiane ideali che si possono immaginare tracciate sulla sua superficie esterna. L' ovaia di una Coniglia giovanissima, forse anche per questo si presta meglio, perchè ha una forma più regolarmente ellittica che non sia quella che assume col crescere in età.

Certo, molte sezioni è necessario praticare; ma riuscendo nell'intento, — cosa che poi, è in maggior parte dipendente dal caso — ne bastano poche, relativamente parlando, per mettere in notevole evidenza quanto segue:

Lo stroma è costituito in massima parte da un connettivo fibrillare piuttosto compatto, rappresentato da fibrille abbastanza sottili e a decorso pressochè parallelo per lunghi tratti. Inoltre esistono zone piuttosto larghe (microscopicamente parlando) in cui le fibrille si vedono a stretto contatto le une con le altre, in modo da formare dei fasci lunghi e spessi, dei quali una caratteristica, sovente molto evidente, è appunto quella di avere gli elementi onde risultano composti, a decorso rettilineo (Fig. 1ª).

Solo qua e là, per breve tratto, essi, e quindi anche le fibrille che li formano, presentano delle leggere ondulazioni, per lo più molto regolari.

Certo, quanto siamo andati dicendo non va inteso in senso rigorosamente matematico, nè si deve credere in ogni ovaia e tanto meno in ogni sezione di poter mettere tali strutture facilmente in evidenza. Si pensi difatti a quanto piccola sia la probabilità che — vogliasi pure per un tratto limitatissimo — la lama del microtomo mantenga una direzione parallela a un fascio di fibrille, cioè segua lo spazio enormemente piccolo che intercede

ra i filamenti minuti (fibrille) che compongono una grossa matassa compatta (fascio); basta dunque una deviazione infinitesima, dovuta alla direzione del fascio, o alla situazione, rispetto al piano di taglio, del pezzo imparaffinato, elementi questi assolutamente imprevedibili ed incalcolabili, perchè la netta visione della struttura, che noi consideriamo reale, ne venga senza rimedio alterata. Basta del resto, a convincersi meglio di tale e tanta difficoltà, tener presenti le variazioni che portano gli elementi cellulari (cellule connettivali fisse) di cui è disseminato lo stroma.

E c' è ancora un' altra causa, la cui importanza si può osservare macroscopicamente. Per quanto accuratamente eseguita la fissazione, e in un liquido il migliore possibile, l' ovaia preparata *in toto* subisce un incurvamento non trascurabile se l' organo viene immerso addirittura integro nella miscela; un incurvamento notevolissimo, in modo da assumere una figura a ventaglio, se previamente si siano praticati dei tagli non estesi a tutta la sezione, tali cioè da non isolare i pezzi.

Non riteniamo sia il caso di portare altri argomenti in favore della tesi che si è espressa, la quale in fondo vuole essere intesa nel senso che, nell'ovaia giovanissima di coniglia manca, di regola, la figura di una vera e propria rete fibrillare connettiva, qual' è stata affermata o assunta ormai come dimostrata, da quasi tutti gli Autori, nè in genere le fibre dello stesso fascio si accavallano scambievolmente; piuttosto i fasci più grossi talora, s' incontrano determinando angoli più o meno acuti, o, più raramente, compenetrandosi a vicenda.

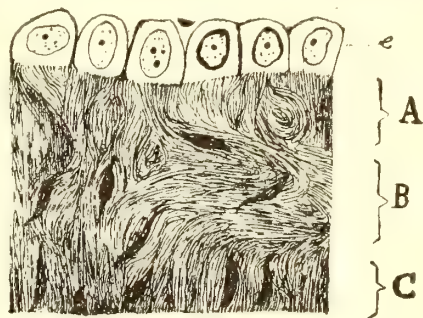
Fig. 1. (Schematica) Mostra il decorso dei fasci connettivi—*e*, epitelio esterno dell'ovaia: *A,B,C* Zone diverse dell'ovaia.

Quanto all' estensione dei fasci, essi sono così lunghi, che sovente, sebbene grossi e ben individualizzabili, riesce all' osservatore impossibile determinarne, per ciascuno, il principio e la fine.

Si nota agevolmente però che il decorso di essi non è uguale per tutte le regioni dell' ovaia (fig. I): le fibre che sono immediatamente vicine allo epitelio esterno di rivestimento, risultano spesso perpendicolari alla linea di questo, cioè nella stessa direzione dell'asse longitudinale degli elementi cellulari di cui esso è composto (Fig. I, *A*); spostando lo sguardo in senso centripeto rispetto all'ovaia, subito dopo si vedono formare un angolo o piuttosto una curva più o meno brusca, in modo da assumere ormai un decorso parallelo alla linea dello epitelio stesso (Fig. I, *B*). Questi diversi tratti si individuano bene anche a modico ingrandimento, giacchè hanno una tinta — forse dovrebbe senz' altro dirsi, una rifrangenza — differente.

Se si segue il percorso delle fibre, ove ciò è possibile, per largo tratto, si nota che dopo l' angolo o curva ricordata or ora, esse continuano ancora a decorrere parallelamente all'epitelio germinativo; ma in seguito, deviando in senso centripeto si avviano verso la regione più interna dell'ovaia (Fig. I, *C*).

In quest'ultimo tratto (*C*) dunque, ritornano ad avere una direzione quasi perpendicolare alla linea dell'epitelio esterno, ma ivi appunto la linea che costituiscono è delle meno regolari.

Il cennato comportamento non è l'unico possibile, in quanto spesso il segmento più vicino e perpendicolare all' epitelio germinativo (tratto *A* della figura) manca, sostituito addirittura dal secondo tratto (*B*), con fibre cioè a decorso parallelo all' epitelio stesso (Fig. 5 della Tavola); il terzo tratto, quello cioè con fibre a decorso centripeto esiste sempre (fig. 4 e 5).

Nella zona ancora più interna dell' organo, il decorso dei fasci poi, diviene vario e quasi incerto, specie per l' esistenza, in quella regione di numerose lacune e vasi linfatici.

Prima di chiudere questo capitolo sarà opportuno dire poche parole su gli elementi connettivali fissi dello stroma; non per farne un vero studio, per quanto superficiale, ma per ricordarne qualche carattere su cui nel corso di questo lavoro dovremo ritornare.

Una scarsezza estrema di protoplasma li distingue, (Fig. 1 e 3), laddove una quantità notevole di cromatina li fa talora parere compatti, e in ogni caso li mette in evidenza anche a piccolo ingrandimento (Fig. 5). Se osserviamo attentamente una sezione che interessi tutta l' ovaia sia longitudinalmente, sia trasversalmente, i nuclei di connettivo (cellule fisse) si mostrano differenti nelle varie regioni, sia pure per minutissimi caratteri strutturali.

Notevole diversità però sempre si nota tra gli elementi in parola, esistenti nel centro dell'ovaia, che si presentano piuttosto piccoli e corti, e quelli della periferia, i quali, sono più grossi e più ricchi di cromatina, ed anche rilevantemente più lunghi; la forma dei primi è presso che rettilinea (Fig. 1), dei secondi a sinusoide, con anse generalmente larghe (Fig. 3). Tanto nella regione interna che in quella periferica dell'ovaia, tali elementi istologici mantengono sempre un decorso quasi del tutto parallelo a quello dei fasci connettivi, con cui sono a contatto, di modo che, essendo questi disposti secondo un certo ordine, come dicemmo, le cellule fisse hanno nell' ovaia una direzione determinata.

La descrizione che abbiamo dato della struttura dello stroma connettivo ovarico, non poteva nè doveva scendere a particolari più ampii o più minuti, dovendo solo giovare per preparare il terreno a una retta interpretazione del peculiare comportamento delle cellule tecali, di cui ci si vuole occupare « ex professo » in questa Nota.

D' altra parte, la cennata regolarità di struttura nelle fibre connettive dello stroma non è tale se non nelle ovaie molto giovani. In modo del tutto chiaro e convincente si mostra in quelle tolte ad individui di circa tre mesi, e io ne conservo preparati mirabilmente dimostrativi. In seguito però, evolvendo i follicoli, accrescendosi il numero delle cellule interstiziali, nonchè tutte le formazioni, tutti i prodotti delle varie degenerazioni di cui un'ovaia è sede sempre, ma in modo particolare se appartiene ad un animale adulto, restano alterati i rapporti tra le diverse fibre, nonchè fra queste e i differenti organi dell' ovaia stessa; insomma, la primitiva semplicità di struttura, significata dalla disposizione degli elementi connettivali, come sopra è stato detto, subisce l' influsso delle infiltrazioni di elementi e ne resta, se non del tutto distrutta, certo mascherata, ad eccezione della regione periferica dell' ovaia, ove si mantiene quasi sempre più chiaramente constatabile, in ogni caso, tanto da aver fatto nascere la convinzione in molti istologi che rappresentasse una zona del tutto distinta, cui fu dato nome " albuginea "; nell' interno poi dell' ovaia, anche se adulta, si può talvolta, in condizioni quasi eccezionali di taglio e di osservazione, constatarla qua e là ancora, per brevi tratti.

### 3. Appunti bibliografici. (1).

Da molto tempo, e da quasi tutti gli Autori che ne hanno trattato, si è distinto nell' ovaia un tessuto periferico (Zona parenchimatica del Waldeyer) e una centrale (Zona

(1) Mi preme fin da ora dichiarare che con queste e colle altre noterelle bibliografiche, sono ben lontano dal presumere di accennare, sia pure fugacemente, alla storia dei singoli argomenti trattati. Ciò innanzi tutto, perchè, se nel lavoro presente saranno riconosciute come nuove alcune idee, la materia presa in istudio, è

vacuolare dello stesso) sebbene il Born (1973), citato da Van Beneden (1880) faccia notare che la distinzione non è applicabile nel cavallo e il Mac Leod (1881) non la veda nemmeno nel Pipistrello.' Del resto il Van Beneden (1880) ha potuto descrivere:

1.) uno strato fibroso, distinto in due lamine, di cui *a*) una — sottoepiteliale — sprovvista di follicoli, corrispondente a quello strato che per malintesa somiglianza con un organo testicolare, alcuni Autori, classici ormai (Mihàlkovicz, Jànosik) han chiamata albuginea — strato speciale, invero, negli organi femminili, non abbastanza meritamente preso in considerazione da parecchi osservatori, da altri (V. Wiwarter 1901) ritenuto transitorio; *b*) una lamina o stroma fibroso, interfollicolare, i cui fasci connettivi sarebbero intrecciati fra di loro.

2.) un tessuto interstiziale.

Ora, escludendo questo 2° strato, dobbiamo pur dire, in riguardo al 1° che l'albuginea è stata descritta dall'A. con precisione di termini, (strato *a*) mentre lo strato *b)* non è in realtà reticolare, ma è formato di elementi irregolarmente distribuiti, a causa della presenza dei follicoli e di altre formazioni (corpi lutei, cellule luteiniche ecc.). Ben a ragione inoltre egli afferma che non è appariscente una vera e propria membrana di limitazione tra l'epitelio germinativo e la lamina sottoepiteliale, da noi chiamata strato *a),* e che i fasci connettivi di quest' ultima sono paralleli alla linea segnata da quello. Mac Leod (1880) nell'ovaia della Talpa, a differenza di quella del Pipistrello, trova anche le due regioni, per quanto non le ritenga così nettamente delineate. Difatti, fondamentalmente, tanto l'albuginea quanto il sistema interfollicolare constano di fasci connettivi, i quali, salvo qualche modificazione secondaria, sono la stessa e identica formazione; però è assodato che cambia la disposizione degli elementi, per la presenza e il comportamento dei gruppi citoistologici che li compongono. Invece, secondo il Paladino (1887) l' albuginea " risulta di fasci di connettivo, disposti in più piani, e di diversa direzione tali, che l' epitelio possa approfondarvisi, per quanto irregolarmente. Il movimento di questo poi, troverebbe maggior facilità, dentro la porzione midollare dell' ovaia, composta di tessuto connettivo lasco. Anche l' albuginea, del resto, assumerebbe in ultimo " un aspetto reticolato e cavernoso, per la presenza delle cosidette propaggini epiteliali. "

L' idea del dotto istologo di Napoli in parte domina nella letteratura moderna, al riguardo. Si descrive l' albuginea quasi come una zona tissurale di transizione, senza, per quanto pare, assegnarvi specificità vera e propria di struttura o di funzione.

Siamo dunque ben lontani dal criterio del Waldeyer (1870) e dei suoi numerosi seguaci che tendeva ad attribuire alla presenza dell' albuginea l'impossibilità della formazione di ova postfetali.

---

quanto altra mai antica e sfruttata. Ad esempio, i due primi capitoli, a cui si è creduto far seguire questi appunti, trattano un argomento che si presterebbe a una lunghissima esposizione bibliografica — lo che oltre ad essere opera quasi vana, costringerebbe a spigolare, a raggranellare in numerosissime pubblicazioni speciali e in trattati generali, nozioni e descrizioni, in fondo, di poco dissimili le une delle altre. Difatti, chi, occupandosi dell' ovaia, non ha avuto necessità od opportunità di scrivere almeno un rigo sulla struttura intima dello stroma? Citerò, dunque, qui ed altrove, le idee più salienti, non per importanza intrinseca, ma per i riguardi di quelle che io stesso emetto o difendo. Forse, al riguardo, è tempo di isveltire il vecchio, cristallizzato accademicismo, delle minuziose bibliografie, che se da una parte facilita enormemente la via ai nuovi ricercatori, non può non influire sulla originalità delle ricerche!

## 4. Struttura dell' epitelio germinativo e fenomeni di moltiplicazione delle sue cellule — Origine dei « cordoni epiteliali ».

Mi limiterò, sull' argomento, a dire solo quanto può riguardare il presente assunto, rimettendo la descrizione di altri reperti ad un lavoro futuro; esamino dunque quì tale epitelio in ovaie sane e adulte.

L' epitelio germinativo consta di una serie di cellule di dimensioni varie nei diversi punti dell' ovaia e nelle diverse età e condizioni fisiologiche dell' individuo. Talora esso presenta elementi piuttosto alti, di forma cilindroide o addirittura cilindrica a protoplasma mediocremente spesso e ben colorabile con le tinte acide, a nucleo leggermente allungato non molto abbondante in granuli cromatinici, ma facile ad assumere i colori basici (Fig. 5). Tal'altra è basso; con cellule rotondeggianti o quasi cubiche con nucleo più o meno sferico, ma, tanto questo, quanto il protoplasma sempre bene tingibili (Fig. 4); infine può anche essere costituito di elementi bassissimi, piatti, che attraversano fasi più o meno avanzate di degenerazione (Fig. 8). Tra i sopra citati elementi, quando l' ovaia è in attività funzionale, non è difficile scorgere delle cellule con caratteri peculiari (Fig. 4). Esse hanno volume maggiore delle altre, forma quasi sferica, protoplasma chiaro, omogeneo, di apparenza, si direbbe, vitrea; nucleo, in un primo momento, irregolarmente rotondeggiante e a superficie quasi sempre intera, in seguito, a superficie lobata (Fig. 9), dovuta ad incisure or più or meno profonde e non di rado con molteplici bernoccoli. Interessante è in tali elementi, la figura che assume tutto l' apparato cromatinico. Esso difatti è ridotto a pochi granuli, piccoli, fortemente colorabili con Saffranina e specialmente con il violetto di genziana (triplice del Flemming) ovvero coll' Ematossilina ferrica (nel metodo Benda-Van der Stricht). Dette cellule mantengono in generale un livello diverso delle altre, sono cioè più basse (Fig. 3) in corrispondenza a un approfondamento dello strato di connettivo sottostante e ad un arrotondimento e ingrossamento della cellula stessa, ciò che, portandola ad occupare maggior volume di prima, la spinge, per una porzione della superficie, nello stroma sottostante. Si può dire fin da ora che questi elementi sono destinati ad aprirsi una via. per raggiungere, dopo abbandonato il luogo di origine, altri posti, nell' interno dell' ovaia. Ma questo non si verifica se non dopo attiva moltiplicazione.

Per vero, fra di essi è necessario distinguere quelli che provengono da una recente divisione da quelli che stanno per iniziarne il processo. Tale distinzione essendo tutt' altro che agevole, cerchiamo piuttosto di ricostruire le varie fasi del fenomeno. Esso comincia costantemente dal nucleo, che, dopo essersi ingrossato, quasi si direbbe gonfiato, perde il suo contorno regolare e la forma cilindroide, riducendosi a una sfera, la cui superficie è percorsa di solchi più o meno profondi. Di cotali solchi, ulteriormente, almeno uno progredisce, distinguendo il nucleo stesso in due parti (Fig. 3, *a*) che non tardano ad acquistare una forma quasi sferica o, come avviene spesso, emisferica (Fig. 3 *b*).

I granuli cromatinici fin dallo inizio del processo vengono a mostrare un comportamento caratteristico. Abbiamo visto che essi, nella cellula dell' epitelio germinativo, non sono molto abbondanti. Or quando il nucleo comincia ad arrotondarsi, per disporsi alla divisione, il numero di essi diminuisce (Fig. 2, *a*) nel mentre l' enchilema nucleare diventa meno colorabile, ciò che va inteso come una notevole alterazione del chimismo nucleare. Nello stesso momento si fanno più piccoli, più nettamente basofili, i rimanenti. Si perde-

anche quel corpicciolo (talvolta sono due) più grosso che nella cellula epiteliale normale si può considerare come nucleolo. Tutte queste trasformazioni infine portano al risultato che i granuli residui acquistano quasi la stessa dimensione. Frattanto, man mano che il processo va avanti, essi si spostano verso la periferia, cosicchè il centro del nucleo ne diventa quasi privo. Quando poi si manifesta la piega che dovrà scinderlo, di essi si trova una certa quantità lungo la superficie interna del solco divisorio, oltre, si capisce, quelli che ormai si sono ridotti quasi aderenti alla parete interna della sottolissima membrana nucleare, negli altri punti.

Il descritto comportamento dei granuli cromatinici fa sì, che essi vengano a trovarsi nettamente e quasi ugualmente separati nelle due parti, che del nucleo cellulare si sono costituite (Fig. 3, *a*). Generalmente, anche in questo momento viene a ricostituirsi, in ciascuna metà del nucleo, almeno un granulo che ha dimensione maggiore degli altri, (Fig.3, *a*), che conserva più spiccatamente la reazione basofila , e che per tutto l' insieme dei suoi caratteri può considerarsi come il nuovo nucleolo nucleinico. Certo è rilevante il numero— e noi dobbiamo farlo subito presente—di quei nuclei in divisione, dei quali in una sola parte si ritrova detto corpicciolo ; del resto può trattarsi di una constatazione indipendente dalla realtà delle cose, infatti dovuta al modo con cui è avvenuto il taglio della sezione, che dev' essere sempre sottilissima, se si vuole avere idea chiara di questi fenomeni e forme.

Nell' ulteriore inoltrarsi del processo, infine il nucleo resta distinto in due parti (Fig. 3. *b*) che hanno ancora e conservano per un lasso di tempo non calcolabile, l'aspetto di semisfere con i rispettivi piani rettilinei (piani di divisione) affacciati, cioè quello di una aderente a quello dell' altra.

Tale figura si rinviene più facilmente nelle coniglie che si trovano in determinati momenti dello sviluppo individuale, e in certe epoche dell' anno.

In questi casi insomma, sono numerose le cellule epiteliali che mostrano, nel citoplasma relativamente voluminoso, due nuclei, più piccoli di quelli degli altri elementi simili, che non abbiano ancora iniziato, o che abbiano già condotto a termine il processo amitotico. Non è facile in questo, nè nello stadio seguente, scorgere la plasmodieresi ; tuttavia dobbiamo supporla necessariamente esistente, sia perchè gli elementi polinucleati sono in certi casi molto numerosi e in altri scarsissimi , sia perchè non tarderanno a sorgere gruppi cellulari specifici , là dove suole compiersi il descritto processo di divisione, cioè nello strato della cosidetta albuginea che è posto immediatamente sotto allo epitelio germinativo (Fig. 5). Dalla descrizione or fatta si vede dunque che trattasi di un esempio addirittura notevole , per evidenza e facilità di osservazione , di quella speciale divisione diretta che è stata chiamata " amitosi da sfaldamento „ ovvero " da clivaggio, „ processo, secondo me, più diffuso di quanto forse non si creda.

Nonostante il fenomeno si compia di regola nel modo or detto, io stesso ho potuto, e non del tutto eccezionalmente, osservare cellule (dell' e. g.) molto più grosse e chiare di quanto non si rinvengano normalmente, nel cui citoplasma esistevano tre o più nuclei (Fig. 10), che in tal caso apparivano di regola piuttosto piccoli e stretti.

In determinate condizioni poi, cioè in quegli stadii in cui pare, come meglio sarà detto in un altro lavoro, che il processo di moltiplicazione diventi notevolmente più accelerato, il nucleo di dette cellule subisce, non più un semplice fenomeno di divisione per clivaggio, ma un vero e proprio processo di frammentazione. Le condizioni a cui mi richiamo sono quelle sopratutto della gravidanza (primi giorni o anche settimane).

Pare che il processo normale di moltiplicazione, una volta manifestatosi in una determinata regione dell' epitelio, attacchi ogni cellula di esso che esista in quell' intorno.

Inoltre, la presenza di cellule piccole e molto chiare situate un pò più profondamente nello stroma, e in fasi diverse di divisione, può fare intendere che un elemento, in generale, abbia capacità a dividersi replicate volte, o, per meglio dire, che gli individui cellulari, da recente originatisi, attraversino subito a loro volta fasi di amitosi. Questo criterio gioverebbe molto a spiegare l' origine di cordoni cellulari formati in massima parte di elementi che si presentano chiari e in figure varie di divisione giacchè, moltiplicandosi, le cellule chiare non perdono i tratti caratteristici che le distinguevano, anzi, in un primo momento sembra che le acquistino vieppiù e li mantengano. Così, devesi ritenere per certo che da uno di cotali elementi possa derivarne un ammasso cellulare (Fig. 5).

Però qui devesi soggiungere subito che può darsi, e ciò avviene frequentemente, per lentezza di formazione o per scarsezza numerica di prodotti, che non si determinino dei veri e proprii zaffi cellulari; ma i nuovi individui cellulari restino staccati dagli altri, preesistenti, e seguano isolatamente il loro ulteriore destino. Dirò, così di passaggio e con riserva, che anzi sembra essere proprio questa la regola nell' ultimo periodo di quella stagione che segna un temporaneo riposo sessuale per le coniglie.

Ad ogni modo, il fenomeno che deve ormai attirare più decisamente la nostra attenzione è quello, per cui le nuove cellule abbandonano il luogo di formazione e si approfondano nello stroma ovarico. Ciò deve avvenire molto agevolmente, senza tuttavia che noi avessimo potuto conoscere con sicurezza l'intimo determinismo di siffatto spostamento.

Da un esatto confronto, si può dire che il contorno delle cellule in parola sia più irregolare quando esse si trovano ancora a far parte dell' epitelio germinativo, specie se si dispongono alla moltiplicazione (Fig. 2, *a*) di quanto non lo sia quando già si sono allontanate da quello. Tale ragione esclude l' azione di forze, per dir così, intrinseche (movimenti amiboidei), inerenti cioè agli elementi che studiamo, onde dobbiamo ricercare la causa del movimento in un trasporto passivo a cui si adatterebbe la cellula, giacchè essa ne è favorita dal trovarsi sin da principio libera e indipendente.

Già l' ho detto sopra e val la pena ripeterlo: l' epitelio germinativo non presenta, in alcun caso, nè una membrana basale (inferiore) nè una membrana limitante (superiore). Le sue cellule, d' altra parte, sono libere e mantengono contatti reciproci non larghi, e spesso anche ne sono del tutto prive (Figg. 3, 4, 5). La superficie (basale) di esse, per mezzo di cui si attaccano allo stroma, non presenta nemmeno un contorno piano del tutto; essa invece poggia, quasi sarei tratto a dire, con una certa leggerezza, sulle fibrille connettive sottostanti immediatamente (Fig. 3), le quali del resto, in corrispondenza sono generalmente meno compatte, lievemente ingrossate (Fig. 3) e mantengono una direzione che nel maggior numero dei casi è perpendicolare come è stato precedentemente detto, alla linea dell' epitelio stesso, cioè è nello stesso senso dell' asse lungo degli elementi di questo, quando detti elementi non hanno ancora perduto la forma cilindrico-allungata o più o meno conica (Fig. I a pag. 3).

Non è escluso, che detto epitelio abbia rapporti così labili anche su quei tratti che, come fu pur detto avanti, risultano di fibre connettive parallele alla linea epiteliale medesima (Fig. 3 e 6).

Tutte queste cennate disposizioni rendono, com' è evidente, più agevole almeno in un primo momento, agli elementi epiteliali, di uscire fuori del tessuto (epitelio esterno) di

cui facevano parte, ma in nessuno modo ci spiegano le ragioni e il meccanismo di tale importantissimo fenomeno. Ad interpretare il quale tuttavia ci si offre un punto di appoggio nell' osservazione, già del resto riferita, che ogni elemento epiteliale, derivato dal preesistente, a sua volta e certo con notevole rapidità, intraprende il processo di moltiplicazione. Si può allora supporre che il gruppo delle cellule si spinga in dentro del connettivo per necessità di forza materiale, e tanto più internamente, per quanto più a lungo dura il processo riproduttivo negli elementi stessi che lo compongono (Fig. 5 e 4), cosicchè esso assuma, in certo modo, funzione e valore di gemma proliferante, cioè di una speciale forma di quegli zaffi epiteliali di cui l' istologia, specie embriologica, ci mostra ad ogni momento un esempio.

Ciò sarà inteso ancor meglio quando avrò richiamato le notizie già cennate sulla struttura del connettivo. È d' osservazione evidentissima, infatti, che le cellule proliferate sono incastrate fra i filamenti connettivi, i quali vengono per ciò a costituire come una guaina, tutt' attorno ad esse (Fig. 4). Così, man mano che nuove cellule si aggiungono, per nuove proliferazioni, le altre, spinte da queste, scivolano lungo codesta guaina divaricandone leggermente i fasci se pur non li trovano divaricati per il passaggio delle cellule precedenti. Pare certo che sul percorso iniziato, le cellule seguano regolarmente e compiutamente i gomiti che eventualmente si trovano sul decorso delle fibre, come quelli cui sopra si è accennato, quasicchè esse fossero guidate e spinte da una necessità meccanica (Fig. 4). Non è però rarissimo il caso di osservare che lo zaffo, giunto ad una svolta dei fasci connettivi dello stroma, ne scavalca per dir così, la linea curva, secondo una corda di essa, e si dirige, per un certo tratto, normalmente alla direzione delle fibre, finchè, come spesso anche avviene, non si incanali di bel nuovo fra altri fasci. Le osservazioni sopra descritte, specie quanto è stato rappresentato nella fig. 2, *a* e nella fig. 5, dapprima avevano suggerito a me stesso l' idea che fossero dovute a una speciale azione dissolvente (istolitica) esplicata dalle cellule, a spese delle fibre dello stroma. Invero, chi osservi una sezione d'ovaia, in cui siano capitate di cotali cellule, siccome queste ricoprono e quindi nascondono allo sguardo la parte dei fasci fibrillari che restano al di sotto di esse stesse, può facilmente essere tratto in inganno, specie se non tiene nel dovuto conto la struttura a lunghi filamenti (o fasci) dello stroma.

Difatti, se bene osservasi la Fig. 2, si può scorgere che la cellula chiara, sottostante all'altra d'uguale carattere, controdistinta con la lettera *a*, non si è aperto varco tra i fasci di connettivo disegnati nella figura, ma vi poggia sopra: prova ne sia la evidente corrispondenza di direzione tra quelli che sono a destra e quelli che sono a sinistra di essa cellula.

Sarà dunque bene aver presente quind' innanzi una evidente particolarità dello stroma, che assume in sè stessa e nei riguardi del nostro argomento, importanza non trascurabile: voglio dire che i fasci connettivali onde risulta lo stroma debbono essere, se pure non largamente, certo non del tutto fortemente uniti insieme. Di ciò avremo altre riprove, nel seguito della presente esposizione.

### 5. Origine e forma dei cordoni epiteliali.

È mio proposito, col presente paragrafo, completare e illuminare le notizie date nel precedente, allo scopo di affrontare uno dei più oscuri problemi della istologia ovarica.

Il processo succintamente esposto sopra, fornisce il mezzo di spiegare l' origine dei

cosidetti cordoni epiteliali o corticali, che anche nell' ovaia del tutto adulta, dalla superficie e precisamente dall' epitelio germinativo, si avanzano verso l' interno dell' organo e che han dato luogo a differentissime interpretazioni e a teorie molteplici.

Nell' approfondirsi, il cordone può assumere la forma di un cuneo (Fig. 5 della Tavola) ovvero di un cilindro pieno. In genere, la figura di esso corrisponde, per dir così, ad esigenze meccaniche intrinseche ed estrinseche. Difatti, esso può, nel suo primo formarsi, derivare da parecchie cellule vicine dello stesso tratto epitelio-germinativo, ed allora per lo più dà luogo ad un cordone compatto e di calibro uguale in ogni sua parte, ma se interessa pochissime (Fig. 3) e forse anche una cellula sola, si ha, di frequente, la forma di cono (o cuneo) con l' apice verso l' interno dell' ovaia (Fig. 5)..

Spesso, in questo caso, il nucleo di tale cellula proliferante si divide in diverse parti, quasi contemporaneamente, (Fig. 10) ovvero alla divisione del nucleo non si accompagna quella del protoplasma. In questo modo si vengono a formare figure speciali che assumono forme caratteristiche (Fig. 11).

Del resto, tali cordoni risultano anche più o men lunghi, più o meno robusti, a seconda di particolari disposizioni, non altrimenti specificabili, dell' individuo (coniglia) in cui vengono osservati, e, massimamente, in riguardo al tempo (età e stagione) e alle condizioni fisiologiche (nutrizione, gravidanza) in cui esso venga a trovarsi. Lo studio minuto e possibilmente completo delle variazioni di essi (in stato normale, patologico, sperimentale) farà parte di un lavoro per il quale sto raccogliendo i dati, diretto a dimostrare ancora una volta le molteplici modificazioni e la facilità con cui esse si manifestano in questo organo (ovaia), che risente fortemente e, pare anche, rapidamente, le più piccole variazioni dell' ambiente interno od organico e, per conseguenza, dell' esterno, voglio dire del mezzo in cui vive l' animale.

E qui mi sia concesso ricordare come la conoscenza dell' estrema plasticità dell' ovario debba il suo principale inizio e il massimo sviluppo ai lavori del mio illustre Maestro e ai reperti che la sua scuola è andata facendo, e come a gran torto tale variabilità in un organo di sì fondamentale importanza nella vita delle specie e di tanta delicata e complessa costruzione, sia stata e continui ad essere, nonostante tutto, tenuta in poco conto da chi si accinge a studiarlo.

Ma vogliamo ancora soffermarci brevemente su alcuni caratteri specifici del cordone epiteliale.

Nella compagine dello stroma, un cordone epitelio-germinativo facilmente si distingue, perchè esso resta costituito da elementi ben differenti da quelli che lo circondano (connettivo fibrillare e nuclei connettivali) (Fig. 4). Un particolare importante e probabilmente a nessuno ignoto, sebbene troppo trascurato, consiste nell' assenza di qualsiasi membrana involgente l' accumulo cellulare in parola. Ciò si intende, tenendo presente anzitutto l' assenza di membrana basilare nell' epitelio germinativo stesso; l' intima costituzione dello stroma già da me avanti messa in evidenza, e sopratutto il modo di formazione — che potremo anche chiamare " formazione libera „ — delle cellule che lo individuano. S' intende anche agevolmente fin da questo momento come il cordone in parola debba rappresentare una formazione temporanea e contingente.

Il percorso dei cordoni è vario: Generalmente diritti, normali alla superficie ovarica, essi possono spesso presentarsi obbliqui, in modo da determinare un angolo più o meno acuto con questa direzione ideale (Fig. 4). Se poi i fasci connettivi entro cui sono sta-

biliti, si mostrano ondulati (1) caso non del tutto raro, — anche il cordone segue perfettamente detto corso. (Fig. II nel testo).

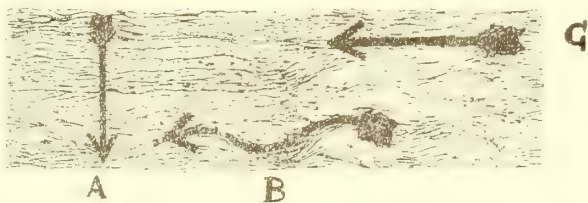
Ciò del resto vale a mostrare sempre meglio la sua dipendenza (meccanica) dalla guaina connettiva in cui si incastra. Non è rarissimo il caso, specie in certe condizioni fisiologiche dell' animale, di rinvenire cordoni che si infiltrino nello stroma seguendo una curva (circolare o parabolica) più o meno netta, in modo che il cordone dipartendosi da un punto dell' epitelio, con una estremità resti impegnato in questo, o vicino ad esso, e con l' altra, dopo un certo tragitto, tocchi o si approssimi ad un altro punto dell' epitelio stesso.

**Fig. II.** (Schematica) — Mostra i rapporti morfologici tra i cordoni epiteliali e lo stroma. Le frecce rappresentano i cordoni.

Spesso anche avviene che esso assuma una direzione parallela addirittura alla linea dell' epitelio germinativo; ciò si verifica quando segue i fasci connettivi della albuginea, che sono paralleli ad esso epitelio, come è stato precedentemente dimostrato. Ancora, talvolta, specie quando il cordone è di grosso calibro, giunto ad un certo punto, si biforca, dando luogo a due formazioni che proseguono ormai per vie distinte. Così dev' essere di quello rappresentato nella Fig. 4. Allora si dovrebbe pensare a qualche ostacolo, dovuto sopratutto ad una peculiare disposizione divergente delle fibre del fascio connettivo, o dall' incontro di esse in modo che, pur non unendosi a reticolo, possano tuttavia attraversarsi scambievolmente; o infine ad altre cause non sempre, anzi difficilmente investigabili, ma che si possono immaginare, riferendosi alla nota struttura dello stroma. Ho visto talora, per esempio, dei cordoni con rami laterali (forme dendritiche). Del resto, non ho intenzione nè interesse di intrattenermi su queste variazioni che mai si potrebbero costringere in categorie, apparendo sempre varie. Bastami aver ribadito l' idea che le produzioni derivanti dall' epitelio germinativo si comportano sempre con relativa ma notevole libertà.

### 6. Cellule epiteliali isolate nello stroma.

Osservando una sottile sezione di ovaia, qualunque essa sia, di Coniglia, si noterà che un certo numero di speciali cellule sono sparse nello stroma (Fig. 1). Esse risaltano subito, perchè non sono elementi fissi del connettivo, nè tampoco cellule interstiziali o luteiniche. I caratteri di esse invece sono quelli stessi delle cellule che fanno parte dei cordoni epiteliali già approfonditi. Orbene, ho potuto constatare che la formazione di esse è identica a quella delle altre or ricordate. Per trovarsi in qualsiasi parte dello stroma quindi, è ovvio che si sono spostate dal luogo d' origine. Esse dovranno dunque aver seguìto le stesse vie percorse dai cordoni, secondo quanto si è detto nei paragrafi precedenti: unica differenza è che son rimaste sole.

Il problema delle forze che hanno causato detto spostamento diventa certo più intri-

(1) Dalle precedenti descrizioni e dalle figure annesse a questo lavoro, appare certamente come le fibre connettive isolatamente prese, in tutto il loro percorso raramente siano delle vere linee rette: anzi sono sempre lievemente ondulate. Qui dunque si intede parlare delle ondulazioni rilevanti.

cato, più difficile a risolversi, con la semplice osservazione microscopica, di quanto non sia l'analogo per il movimento dei cordoni; quali forze difatti possono spingere le cellule isolate o a gruppetti di 3-4 a discendere fin nella zona centrale dell'organo? Forse non si dovrebbero escludere dei movimenti intimi nell' ovaia, movimenti, che in riguardo al nostro argomento, dovrebbero far supporre un trasporto passivo delle cellule isolate d'origine epitelio-germinativa; le quali, spinte da pressioni laterali, scivolerebbero lungo e fra i filamenti connettivali dello stroma, come si è accennato parlando dei cordoni. Ma sino a quando siffatti movimenti, del resto probabilissimi, non saranno posti in evidenza con dati dovuti all' osservazione, sarebbe troppo corrivo ammetterli senz'altro, per il solo fatto, non bene del resto ancora noto, dell'esistenza di fibre di natura muscolare nell'organo sessuale femminile dei Mammiferi.

Dovremo dunque supporre uno speciale chemiotattismo negli elementi sopra notati?

Riserbando a più tardi di prospettare tale ipotesi, ci basti, come dato di fatto, aver richiamato l' attenzione sulle cellule che si trovano isolate in mezzo alle fibre dello stroma, (specialmente nella zona di questo, che contiene il più dei follicoli in stato di sviluppo) e che conservano struttura quasi assolutamente simile a quella delle componenti i diverticoli epitelio-germinativi.

E qui alfine cade acconcio intrattenerci un po' più a lungo sulla struttura citologica degli elementi derivati dall'epitelio germinativo, in processo di approfondamento nello stroma, siano essi riuniti a cordoni (Fig. 3, 4, 5), siano del tutto isolati (Fig. 1 e 6).

Il protoplasma è di mediocre volume e si stende tutto attorno al nucleo, mantenendosi omogeneo, piuttosto chiaro, normalmente sfornito di qualsiasi prodotto o incluso secondario. In nessun caso la cellula di cui si parla mostra i segni di un'attività secernente.

La sua forma nell'insieme è pressochè sferica, ma può essere anche allungata (Fig. 2, *a*) più o meno ovale, spesso conica: in altri termini, plastico com' è, il citoplasma si adatta ogni volta alla somma di pressioni meccaniche, che subisce dai varii fasci connettivi che lo circondano. Ad ogni modo è sempre e bene visibile e sopratutto si differenzia facilmente dal tessuto che lo circonda (Fig. 1 e 6), tanto più che ha abbandonato quell'apparenza chiara, trasparente, che aveva, quando la cellula si era appena differenziata, pur restando ancora nell' epitelio germinativo, dalle altre, e nei primi istanti del processo ulteriore di approfondamento nello stroma.

Va notato però che la capacità a colorarsi maggiormente non viene acquistata tutta d' un tratto, nè contemporaneamente per tutti gli elementi, e nemmeno ad una distanza determinata dall' epitelio germinativo. Son differenze queste, la cui causa ci sfugge del tutto: devono però dipendere da condizioni speciali degli elementi dei singoli cordoni, in parte intrinseche ad essi, specialmente in connessione con lo stato di sviluppo, in parte estrinseche. Difatti si osservano cordoni brevissimi, con cellule già ben colorabili, e cordoni lunghi, con cellule ancora chiare.

Il nucleo della cellula immigrata già in mezzo allo stroma, ha anche esso acquistata un' affinità maggiore per le tinte (basiche), affinità che mantiene ed accresce sino a quando arriva al suo destino ulteriore. La sua forma è piuttosto sferica o leggermente ovale; raramente esso presenta alla superficie, delle incisure o bitorzoli, com' è il caso nelle cellule appena proliferate dallo epitelio esterno. È sempre unico, nella cellula profondamente posta.

I nucleoli possono invece essere in numero di due per ogni nucleo.

I granuli di cromatina, pur non essendo abbondantemente rappresentati, sono tuttavia mediocremente numerosi, e sparsi per l' ambito nucleare, avendo abbandonato quasi del tutto la tendenza a spostarsi verso la periferia. Possiamo affermare, fatto il confronto con le condizioni precedenti, che siasi esplicato e continui ad esplicarsi un fenomeno di ricostituzione della sostanza cromatica, la quale, come fu detto, si riduce durante il processo di moltiplicazione cellulare.

Un' obbiezione, a prima vista molto seria, potrebbe forse esser fatta a quanto sono venuto affermando.

Non potrebbero cioè cotali elementi essere linfociti, o ad ogni modo cellule provenienti d' altra origine che non l' epitelio germinativo? Tale dubbio del resto potrebbe aver valore se sollevato a proposito delle su cennate cellule isolate, in quanto, gli elementi che restano a formare i cordoni, di cui l'origine è quant'altra mai chiara, non possono andarvi sottoposti.

Ebbene, nessun dubbio che gli elementi sparsi nello stroma siano specifici; difatti, anche dai caratteri che siamo venuti brevemente descrivendo è ovvio notare la differenza grandissima che esiste tra di essi e i linfotici, i quali del resto, si trovano anche talvolta e in quantità non addirittura trascurabile, frammezzo ai fasci del connettivo ovarico; d'altra parte, essi caratteri sono simili a quelli delle cellule dell' epitelio germinativo e del tutto identici a quelli delle cellule facenti parte dei cordoni; sicchè, avendoli già nelle precedenti pagine brevemente illustrato, non starò a ripetermi e finirò questo paragrafo confermando che gli elementi di cui vi è parola sono di natura epiteliale e provengono dallo strato periferico dell'ovaia.

## 7. Appunti bibliografici (§ 2, 3, 4, 5).

I più antichi osservatori ritennero che l'epitelio germinativo fosse costituito da elementi cilindrici (Waldeyer) uguali sempre, in qualunque animale, in qualunque condizione e in ogni parte dell' ovaia.

Van Beneden (1880) Schulin (1881) Bertè e Cuzzi (1884) Romiti (1885) e specialmente Paladino (1887) dimostrarono erronea tale affermazione, descrivendolo talora come cilindrico, talora cubico; ora semplice, ora stratificato. Il Paladino (1887) e il Van Beneden (1880) riconobbero uno speciale epitelio di transizione costituito di cellule basse, appiattite (epitelio senile o di pieno riposo), e sostennero la variabilità di forma, non soltanto da un animale all' altro, da un genere all' altro, ma anche, nello stesso individuo, da regione a regione, tanto da passare insensibilmente da cilindrico a pavimentoso. Lo stesso A. (Van Beneden 1880) poi, in alcuni chirotteri rinviene un epitelio che nella maggior parte della sua estensione è polistratificato, mentre nella rimanente si presenta formato d'una sola assisa di cellule. Il Wagener, citato da V. Beneden (1880) riconosce in esso la possibilità di trasformarsi fino a diventare uno speciale endotelio. In seguito, che tale tessuto non abbia una forma fissa e definitiva, è stato intravisto da molti istologi

Senza voler soffermarci all' idea espressa dal Papoff (1911) per cui la Donnola, in certe epoche dell'anno ha nell' ovaia uno strato di epitelio a costituzione sinciziale; si può ricordare come quest' ultimo A. affermi essere le cellule componenti l'e. g. molto assottigliate in corrispondenza di un corpo luteo, e Russo (1907) scopra caratteri di glandularità nella costituzione morfologica degli elementi.

Quanto ai fenomeni di moltiplicazione, Paladino (87) ne sostiene vivamente l'esistenza

contro Flemming, dimostrandoli in una cagnetta di 10 giorni. Di seguito, pressochè tutti gli Osservatori hanno ammesso la mitosi negli elementi di esso, specie se l' hanno studiato in relazione colla formazione dei cordoni epiteliali e degli ovuli, e tanto più se in embrioni, in neonati o in soggetti ancora d' età giovanissima. Si consiglia al lettore che avesse volontà di approfondire l' argomento , di rivedere i lavori pubblicati dal V. Winiwarter e Sainmont nel 1901.

Per quanto risulta allo scrivente, nessun autore ha di proposito accennato a divisioni amitotiche dell' epitelio in parola.

Gli elementi , che nel corso dei capitoli abbiamo spesso chiamato " cellule chiare „ sono state indubbiamente visti , e variamente interpretati da diversi osservatori. L' argomento però, che meriterebbe da sè solo una lunga rivista bibliografica, è quant' altri mai intricato e, per così dire, malfido.

Esso ha molta attinenza con il problema tanto vessato dell'origine degli ovuli, della glandula interstiziale e della granulosa. Fin da ora crediamo dover escludere ogni vera identità fra le nostre " cellule chiare „ e gli ovuli nei primi stadi di formazione, contro gli Autori che tale confusione hanno fatto.

Del resto, siccome sembra ormai assodato per serii studii recentissimi (V. Winiwarter 1901), che non si costituiscono altre cellule-ovo dopo la nascita o dopo pochi mesi dalla nascita ; giacchè noi abbiamo trovato le " cellule chiare „ in ovaie completamente adulte, crediamo poter legittimamente affermare che le cellule descritte nelle pagine precedenti nulla hanno che vedere con gli ovociti.

Il Van Beneden, con quella precisione che caratterizza i suoi studi, riconobbe però nel 1880, nell' epitelio germinativo " alcune rarissime cellule, più grandi delle altre, sporgenti nella cavità della sierosa, attorno alle quali le cellule endoteliali erano un po' allungate e incurvate senza tuttavia ricoprirle completamente „. Egli si domanda se trattasi di ova in formazione, ma siccome non trova stadii di passaggio che autorizzino tale ipotesi, pare che finisca coll' escludere l' identificazione.

Bertè e Cuzzi (1884) descrissero nell' epitelio germinativo alcune cellule più grosse da loro dette " elementoni „ che per i loro caratteri pare si avvicinino molto alle nostre " cellule chiare. „ Però gli Aa. le considerano quali ova in formazione, e cercano di creare una teoria del modo di genesi dei follicoli ovarici nell' età adulta, teoria già ritenuta errata dal Baiardi (1886), il quale del resto detti elementoni non seppe trovare, nelle 24 ovaie gravidiche, che gli fu dato osservare.

Il Kaff (1862) e lo Schrön (1862) (citati da Bertè e Cuzzi) hanno notato , pare per i primi, detti " elementoni „ e Kaff li ha interpretato come cellule nutritive dell'ovario.

Dobbiamo infine ricordare che il Van Beneden (1880), era già sulla buona via per l' osservazione, secondo noi esatta, della moltiplicazione di cosiffatti elementi (cellule chiare), quando studiava i cosidetti noduli epiteliali " plus o moins engagés dans la couche conjonctive périphérique de l' ovaire. „

Egli però non se ne seppe spiegare l' origine e il significato.

Solo notò che bisognava escluderne l' intervento nella generazione dei follicoli ovarici dell' adulto.

Anche Mac Leod (1880), che nello epitelio della Talpa ha notato di tanto in tanto una cellula più grossa delle altre , a sua volta si riserba il giudizio se trattisi di ovulo primordiale.

Prima di passare alla formazione dei cordoni epiteliali, val la pena notare che quasi tutti gli istologi hanno ammesso senz' altro la mancanza di una membrana basilare nello epitelio germinativo, però non vi hanno dato l' importanza che pare abbia realmente questo particolare.

Lo studio della origine, della formazione e del significato dei cosidetti cordoni epiteliali, ha dato luogo a pareri disparatissimi. Basti ricordare che mentre le scuole antiche assegnavano ad essi una grande importanza nella genesi dell' elemento essenziale dell' ovaia, cioè dell' ovo, più recentemente si è dimostrato che essi, almeno nell' animale adulto, non hanno parte alcuna in tale funzione.

Non è mancato chi ha ritenuto che dette formazioni siano il residuo di organi già stabilitisi nell'ovaia, e chi ha creduto in base a consimili criteri dover considerarle come puri e semplici ricordi ancestrali, sprovvisti di qualsiasi funzione o significato (Waldeyer, 1870).

Le ricerche moderne istituite in proposito , per quanto abbiano dato risultati più attendibili e più precisi, hanno, per ciò stesso, confuso e sopratutto complicato le nozioni, che precedentemente si avevano al riguardo.

Difatti hanno mostrato che le proliferazioni cellulari a forma di cordoni, esistenti nell' ovaia dei mammiferi, non sono tutte uguali fra loro, sia per costituzione, che per origine e significato, e sono in stretta relazione con le condizioni vitali dell' organo (ovaia embrionale, fetale, adulta).

Ad ogni modo non vanno, nell'adulto, come spesso si è fatto, confusi nè con i tubi del Pflüger nè con i tubi midollari.

Riassumiamo brevemente pertanto le vedute, per il nostro riguardo, più notevoli, mantenendoci nei limiti assegnati a questo Capitolo ; del resto una estesa bibliografia hanno dato Mac Leod (1880) Paladino (1887) V. Winiwarter (1901) ed altri.

Tralasciando i dati anteriori, il Waldeyer nel 1870, seguito da una scuola numerosa riconosce che l' epitelio superficiale dell' ovaia si approfonda, mentre lo stroma connettivale si innalza. Ciò avviene nello embrione, perchè immediatamente dopo la nascita, essendosi sviluppata l' albuginea, questa impedirebbe l' ulteriore approfondirsi dello epitelio, benchè i cordoni già approfondatisi, continuino per un certo tempo a svilupparsi. La maggior parte degli Osservatori seguenti, hanno confermato l' asserto del Waldeyer, solo modificandone il criterio che riguarda l' azione dell' albuginea e l' età nella quale le dette proliferazioni riescano sterili, cioè incapaci di produrre ovocellule.

Il Paladino, in una serie di lavori, che culmina col libro, ormai classico, del 1887, contrapponendosi alle idee del Waldeyer, sostiene che dette formazioni siano d' origine dall' epitelio e valgano per la produzione di nuove uova ***durante tutta la vita dell' ovaia***, organo a struttura tubulare e in cui si avvera un continuo e contemporaneo lavorio di neoformazione e di distruzione delle sue stesse parti.

Riconosce anche, che la produzione di essi cordoni è differente nei varii punti e nelle diverse ovaie, ed aggiunge che " l' approfondirsi di essi e il loro crescere, non è in linea regolare, come perpendicolare al centro o che so io. In cambio avviene dove e come meglio si può, tra i piani e i fasci connettivali dello stroma ovarico sottostante; „ dimostra anche che sono sforniti di pareti, contrariamente a quanto altri aveva assicurato.

Anche il Paladino, in queste sue osservazioni, ebbe seguito numeroso di studiosi, i quali del resto poco seppero mettere di nuovo, alla luce.

Vi sono però dei lavori per altro notevolissimi. Quello del Russo (1907) che fa dell'e-

lemento epiteliale dell' ovaia uno studio molto accurato e mette in evidenza nelle cellule di esso una importante funzione glandulare, non si occupa di proposito dei cordoni in parola. Veniamo quindi all' opera del Von Winiwarter (1901), che studia le invaginazioni e i *bourgeons* che ne risultano, e che sembrano " perforare „ lo strato di tessuto connettivo sottostante. Esse alla sesta settimana sono tanto numerose che " à faible grossissement le bord de l' ovaire paraît dentelé, déchiqueté „. Ma, in seguito vengono a mancare.

Nella coniglia di 4 mesi però si ritrovano, secondo Von Winiwanter et Sainmont (1901) rigogliosissime, costituendo una nuova proliferazione — Senza entrare in merito alla questione, quale la prospettano—certo con verità, ma non senza una sensibile sottigliezza, che finisce coll' ingenerare confusione, i due notati Autori, diremo di passaggio che il Giannelli 1905 non trova più traccia di esse invaginazioni, già nella Coniglia di due mesi.

In queste, come in moltissime altre memorie che si occupano dell' argomento, invano abbiamo cercato un netto accenno all' intimo determinismo del fenomeno di approfondimento, il quale, in fondo, può dirsi che da quasi tutti gli Aa. è stato interpretato secondo la legge Kölliker-Remak della invaginazione, quale è nota nelle glandule comuni, ovvero ammettendo la costituzione di pieghe (incisure crateriformi del Waldeyer e Paladino) i cui elementi epiteliali modificherebbero la posizione (Von Winiwarter 1901) primitiva, in seguito alle nuove necessità morfologiche e forse meccaniche. In seguito essi vanno approfondendosi a guisa di radici (Paladino 1887) in un terreno.

Quanto alle osservazioni, riferite nel paragrafo 5 di questo lavoro, scorrendo la letteratura antica e recente, allo scopo di ricercarvi qualche notizia specifica sull'argomento, abbiamo potuto conoscere, come numerosi sono gli accenni e non poche le descrizioni di cellule isolate o riunite in gruppetti entro la massa dello stroma ovarico nei mammiferi. Tali cellule però sono state considerate di natura diversa: epiteliali dagli uni, mesenchimali dagli altri, comprendendovi, com' è naturale, in quest'ultima denominazione gli elementi sanguigni (linfociti).

Nessun autore, per quel che sappiamo, ha tenuto in vero e debito conto, il fenomeno di una migrazione isolata di elementi dell' e. g. specie nell' adulto. E qui va fatta subito una dichiarazione: tutti questi Osservatori, e sono moltissimi, che hanno descritto e figurato la formazione delle ova primordiali, hanno, salvo poche eccezioni, inteso che delle cellule epiteliali esterne, approfondendosi isolate o quasi, diano origini a quelle. Però avendo così, fin da principio, dato un carattere ben definito, ad esse, rappresentandole quali elementi specifici (ova primordiali) non si potrebbero affatto indicare come sostenitori dell' idea da noi avanti espressa.

Ad esempio, ricordasi che il Van Beneden (1880) nell' epitelio germinativo, secondo lui polistratificato, del Pipistrello, trovò nella zona profonda, ma anche nella superficiale i cosidetti " noduli epiteliali „ risultanti da una grossa cellula con diversi nuclei chiari (*peu avides de matières colorantes*). Più spesso però essi noduli—sempre sulla fede dell'A.—si trovano al limite del tessuto connettivo sottostante all' epitelio, o più o meno approfonditi (*engagés*) in questo. Infine se ne osservano in seno a tale zona ovarica.

Sul significato e sull'origine di siffatti elementi, nulla sa dire l'A.; pare a lui tuttavia che non partecipino in alcun modo alla formazione dei follicoli (nell'adulto). Dobbiamo rammaricarci che ci manchino gli elementi sufficienti per fare un confronto esatto con le formazioni da noi messe in evidenza in questo e nel capitolo precedente; tuttavia siamo proclivi ad ammetterne la identità, tenuto anche il debito conto del differente materiale d'osservazione.

Paladino nel 1887 afferma ripetutamente, come avanti fu detto, che le cellule componenti l'e. g. non sono fra di loro uguali. D' altra parte egli rinviene e descrive, nello stroma ovarico, elementi diversi. Dobbiamo dunque ritenere che fra di questi fermò lo sguardo anche sulle cellule da noi dette " chiare. „ Forse anche l' insufficienza dei metodi tecnici adoperati (1), forse il proposito determinato nella sua mente, di ricercare gli stadii primordiali delle ova nell'organo adulto, gli impedirono di trovare il nesso specifico tra determinate cellule dell' epitelio esterno e le corrispondenti dello stroma.

Scrive difatti: " in mezzo alle cellule epiteliali cubiche e cilindriche.... con un nucleo più o meno ellissoidale ed un distinto strato di protoplasma, si trovano di tanto in tanto elementi sferoidi risultanti di un bellissimo nucleo e di pochissimo protoplasma intorno, quasi talora da non vedersi. „ Egli ravvisa in essi gli ovuli primordiali; noi, a parte le differenze, dovute certamente alla tecnica usata, vi scorgiamo se non sempre, in alcune almeno, le cellule " chiare. „

Il V. Winiwarter (1901), descrivendo con la massima precisione le produzioni citologiche dell' epitelio germinativo, ci dà a divedere come nessuna di queste possa identificarsi con le nostre cellule " chiare. „ Ciò non deve recar meraviglia, pensando che esse caratteristicamente appariscono nell'ovaia adulta, mentre il citato Aurore studia la gonade femminile in embrioni o in feti di mammiferi, sicchè l' argomento potrebbe anzi interpretarsi come una conferma indiretta dei nostri reperti.

## 8. Ulteriore destino dei cordoni epiteliali.

Comunque e dovunque sorto, il cordone, che ormai ci è noto, si approfonda, abbandonando l' epitelio germinativo e raggiungendo la " zona follicolare „ dell' ovaia. Nel contempo, e in conseguenza del suo spostamento, esso finisce col perdere qualunque rapporto colla lamina tissurale onde proviene. Riesce oltremodo difficile, a coloro i quali, seguendo la vecchia teoria, intendono il formarsi dei cordoni epiteliali coll' ammettere che alla superficie dell' ovaia si costituiscano delle semplici pieghe, destinate ad approfondirsi, spiegare in qual modo tali cordoni ad un certo punto interrompano ogni continuità coll' epitelio germinativo, rimanendosene del tutto e isolatamente compresi nella massa dello stroma connettivo.

Dopo quanto abbiamo esposto in questo lavoro, credo possa darsi, alla questione, sinora oscura, una semplice ed esauriente soluzione.

Le cellule dunque, o si dica pure i cordoni, prodotti per proliferazione degli elementi dello epitelio germinativo, non mantengono, con esso, alcun rapporto di continuità, nel senso che la morfologia dà alla parola, ma una mera vicinanza, un nesso, diciamo così, di contiguità. Sicchè allontanandosi nel prosieguo dello sviluppo, dall' epitelio stesso, possono al massimo lasciare, in questo, una soluzione di continuità, (Fig. 5) che è d' altronde temporanea, perchè gli elementi vicini appartenenti allo stesso tessuto hanno capacità di ricolmarla, per via di successive moltiplicazioni o per altro processo. Del resto, i varii modi di reintegrazione e di sostituzione che seguono ai continui, per quanto limitati, fenomeni

(1) Anche a noi in preparati della stessa ovaia, ottenuti con fissazione o colorazione diversa è capitato spesso di non poter nettamente individuare gli elementi « chiari. »

di decadenza e di perdita degli elementi dell' epitelio germinativo, saranno oggetto di un altro lavoro che spero dare alla luce fra breve.

Man mano dunque che il cordone si approfonda, si avvicina sempre più alla zona dei follicoli e finisce generalmente per incontrarne uno, che può essere o primordiale o giovanissimo, sebbene non sia affatto esclusa la possibilità che, spingendosi sempre più indentro, si porti verso un follicolo maturante o fors' anche maturo. Nel primo e nel secondo caso, ad un certo momento viene ad addossarsi alla formazione follicolare, urtando, per dir così nella membrana esterna (m. di Slawiansky) e appiattendosi ulteriormente sempre più su di essa. In certi casi, il cui determinismo per ora mi sfugge, lo stesso cordone, che si approfonda, prima di arrivare a un follicolo, si dissocia negli elementi cellulari onde risultava composto e gli elementi, cioè le cellule componenti, si avviano innanzi indipendentemente — almeno così sembra — le une dalle altre, portandosi per lo più verso uno o più follicoli ovarici.

Tra un cordone ancora in piena integrità morfologica e le cellule isolate, si trovano tutti gli stadi di passaggio. Già, sempre quando il cordone si trovi ad una certa profondità, non presenta più la compattezza — relativa — che aveva in vicinanza dell' epitelio germinativo da cui si origina. Le sue cellule sono insomma più distanziate le une dalle altre nel senso della lunghezza del cordone , il calibro di esso è più stretto , e talora gli elementi stessi, che lo compongono, sono disposti su un'unica fila. L' azione di disgregamento è cominciata e andrà sempre più avanti, quanto più il cordone si approfondisce.

Tale constatazione, se pure non di importanza notevole per l' andamento generale e per la storia dei cordoni epiteliali , è di grandissimo interesse per l' interpretazione delle cause che spingono le cellule provenienti dall' epitelio, a spostarsi.

Difatti, ancora una volta si affaccia l' ipotesi, che in tale movimento il follicolo abbia una certa influenza; si potrebbe supporre che esso, a rispetto delle cellule isolate dello stroma, esplichi una speciale energia d'attrazione, per la quale si può dire che il non poter metterla materialmente in evidenza, potrebbe anche non essere motivo sufficiente per negarla *a priori*, del tutto. Allora, nel caso presentemente considerato, si potrebbe supporre che le produzioni epiteliali (cordoni) spinte, in un primo momento, dalla *vis a tergo* derivante dalle nuove cellule, come sopra fu detto, che continuamente si formano, si allontanerebbero dalla superficie ovarica , finchè aggredite , per dir così, dall'azione (chemiotropica ?) esplicata da qualche follicolo vicino, sarebbero attirate verso di questo, guidate sempre dalla peculiare struttura dello stroma, quale è stata descritta nelle precedenti pagine del presente lavoro. È vero che alcuni cordoni oltrepassano la zona follicolare, e si portano più indentro nella compagine dell'ovaia. In tale caso i loro elementi componenti hanno disposizione e caratteri peculiari, consistenti sopratutto in una maggior colorabilità delle parti di cui citologicamente risultano. Il reperto però, secondo noi, andrebbe spiegato agevolmente con l' ammettere che essi cordoni seguendo la guida dei fasci fibrillari, non abbiano incontrato dei follicoli, nel loro percorso, cosa non difficile essendo spesso nell' ovaia spazii relativamente larghi sforniti di follicoli. E che realmente essi seguano nella gran maggioranza dei casi, tale guida, in modo da far apparire che vi siano meccanicamente costretti, si può, se non altro, provare ancora con la seguente particolarità di osservazione agevole a farsi, ove si disponga di buoni preparati, le cui sezioni siano opportunamente capitate: i cordoni hanno generalmente la stessa direzione dei fasci connettivi (cfr. anche la Fig. 5).

L' asse longitudinale, cioè, dei cordoni è, salvo rare eccezioni, parallelo al decorso

delle fibre di natura connettiva da cui sono circondati e quasi rinserrati da ogni parte. Cosicchè siccome i fasci, a una certa distanza dallo epitelio esterno, conservano una direzione pressochè perpendicolare ad esso, (vedere strato C nella schematica, I) anche quei cordoni hanno *quasi costantemente* una tale direzione. I cordoni invece, che si trovano nella zona più periferica dell' ovaia (albuginea, strato B della stessa figura) sono *per lo più* paralleli ad esso, perchè le fibre connettive hanno tale direzione.

A questa regola non mancano delle eccezioni. Difatti si possono osservare di cotali formazioni dirette in senso normale o quasi ai fasci connettivi con cui sono a contatto. Ciò è probabilmente in relazione con una più vigorosa spinta o meglio con una maggior energia di spostamento, per la quale il cordone attraversa, sfonda, per così dire, i fasci connettivali, invece di infiltrarsi regolarmente in essi, seguendone il percorso. Difatti il caso in parola è d' osservazione più frequente alla periferia dell' ovaia, in cui devesi ammettere un rigoglio maggiore di questi cordoni.

### 9. Cariocinesi delle cellule epiteliali dello stroma.

Giunte pertanto, le cellule che compongono il cordone epiteliale o le cellule isolate, in vicinanza del follicolo, (Fig. 7) non tardano ad andare incontro a un processo di moltiplicazione, che, se non si può affermare che le interessi tutte, viene senza dubbio subìto dalla maggioranza di esse.

Tale fenomeno si compie per cariocinesi, attraverso le classiche fasi, che, data la grossezza della cellula e la dimensione del suo nucleo, riescono d' una bellezza e di una evidenza non ordinaria, specie nei pezzi d' ovaia fissata in liquido Flemming *forte* e colorata sulle sezioni con la Saffranina Pfitzner o con la *Triplice* del Flemming. Quanto al significato di cotali divisioni non c' è alcun dubbio: esse valgono a rendere sempre più numerose le cellule epiteliali che sono venute a stabilirsi attorno al follicolo.

Non è qui il caso di investigare quale intima trasformazione, quali nuove capacità abbiano reso possibile alla cellula che, nell' epitelio germinativo o in prossimità di esso, si moltiplicava rapidamente per mezzo di uno speciale processo di frammentazione o di sfaldamento, di dividersi per cariocinesi or che è giunta in altro posto e quindi in un ambiente diverso ed ha età certo differente.

Il problema del significato fisiologico dell' amitosi e della cariocinesi, le tante volte prospettato a riguardo di numerosi tessuti, resterà di sicuro insoluto finchè non avremo appreso a conoscere intimamente le cause dei due processi moltiplicativi e le condizioni in cui essi si avverano. Aggiungiamo di fatti fin da ora, che, pervenute le cellule nella zona più prossima ancora al follicolo (teca), abbandonano o rendono più raro qualunque processo di moltiplicazione; cioè subiscono come un ristagno nella loro attività riproduttiva, finchè il follicolo non abbia raggiunto uno stadio avanzato di accrescimento. Allora iniziano nuovamente, e forse con maggior lena, le moltiplicazioni, formando così il materiale istologico che nell'ulteriore sviluppo fornirà la cosidetta glandola interstiziale.

Accenno, prima di chiudere questo capitolo, ad un' osservazione, non veramente comune, ma che mi è occorso fare qualche volta.

Le cellule profonde (più interne) di un cordone epiteliale, appariscono talora in cariocinesi, mentre le più superficiali dello stesso cordone attraversano le fasi del processo di sfaldamento. Il fenomeno sembra degno della massima attenzione non solo in riguardo

all'argomento di cui ci occupiamo presentemente, ma sopratutto per la luce che può eventualmente spargere su alcuni problemi di citologia e fisiologia generale.

### 10. Rapporti tra il follicolo ovarico e le cellule originate dall' epitelio germinativo.

Il punto senza dubbio più importante di tutto l' argomento di cui la presente Nota, ma che non potevasi trattar prima d' aver messo bene in evidenza quanto nelle pagine precedenti si è venuto esponendo, consiste nell' interpretazione di tali rapporti. Certo è che alla più superficiale ispezione di preparati microscopici ben riusciti , spesso l' attezione è attirata subito dall'esistenza, specie intorno a follicoli giovanissimi, e in vicinanza di alcuni follicoli primordiali, di un accumulo a forma di cordone o di mucchio irregolare, costituito in ogni caso da elementi istologici che si rivelano di natura identica a quella, propria delle cellule, che compongono l' epitelio germinativo e quindi anche dei cordoni epiteliali , già descritti e seguiti nel processo di approfondamento.

Inoltre, attorno al follicolo primordiale e giovane fin dai primi, ma non dai primissimi stadi si trova, di fuori dalla zona costituente la granulosa, almeno una linea di cellule, che per i loro caratteri facilmente si distinguono da quelle della granulosa stessa e, si capisce, dalle altre facienti parte dello stroma connettivo. Esse sono state indicate col titolo generico di *cellule tecali.* Risulta frattanto che siffatti elementi si trovano sia quando è presente anche l' accumulo di che or ora abbiamo parlato, sia quando tale accumulo non esista o non si presenti all' osservazione. Orbene, tanto le cellule dell'accumulo, quanto queste altre, che, presentemente, allo scopo di non pregiudicare la questione della loro natura chiameremo " perifollicolari „ (in vece di *tecali*) hanno presso a poco gli stessi caratteri, vuoi per aspetto del loro corpo e delle parti componenti, vuoi per comportamento di fronte ai reattivi microtecnici, vuoi per le dimensioni: solo in queste ultime si nota una tendenza a colorirsi, più accentuata, nonchè la presenza, nel citoplasma—carattere del resto tutt' altro che costante—di minutissimi granellini di sostanza metaplasmatica, messa in evidenza dall' Ematossilina Ferrica nelle ottime preparazioni, ottenute con liquidi cromosmici.

Cosicchè avendo potuto stabilire nettamente la identità tra gli elementi dell' epitelio germinativo e quelli dei cordoni epiteliali (vedere capitoli precedenti); tra questi e quelli formanti l' accumulo contiguo al follicolo, tra questi ultimi, infine, e le cosidette cellule perifollicolari, crediamo essere autorizzati senz'altro, ad enunciare il corollario seguente: *l'epitelio germinativo, nell' ovaia post-embrionale dà luogo, per via di proliferazioni, ad elementi che si portano, attraverso lo stroma ovarico, presso i varii follicoli in accrescimento e finiscono collo stabilirsi attorno ad essi, originando peculiari formazioni.*

Nè deve meravigliare la esistenza di follicoli primordiali attorno ai quali sono presenti le cellule perifollicolari, ma non contemporaneamente l' accumulo sopraricordato. Difatti si è dimostrato come il cordone, prima di arrivare al follicolo, spesso si scinda nei suoi elementi cellulari, dei quali ciascuno per conto proprio segue la via ulteriore. Ora, per spiegarci meglio i fenomeni che ci accingiamo a descrivere, è d' uopo intendere bene una particolarità, in sè non ignota, ma che ha attirato troppo poco l' attenzione degli osservatori: nei mammiferi (coniglia) *ogni follicolo ovarico ha due poli pressochè opposti.*

Spiego subito quest' affermazione che potrebbe dar luogo ad interpretazioni lontane

dal mio intendimento: L'osservazione più accurata e più ampia, mi ha condotto ad ammettere per lo stroma connettivo che circonda il follicolo ovarico, una struttura non dissimile da quella che esso presenta altrove, quando non sia mascherata da formazioni secondarie (cellule interstiziali, cellule luteiniche, corpi lutei, follicoli in degenerazione). Esso insomma risulta anche qui di fasci fibrillari, più o meno strettamente aderenti, ma con disposizione concentrica, sicchè il follicolo resta avvolto da tutte le parti come da un *mantello* di fibre connettive, le quali appariscono a forma di lunghi filamenti.

È ovvio pensare, e constatare, che così essendo le cose, c'è un punto (*polo* o *ilo*) in cui le fibre si divaricano, si allargano, tutte contemporaneamente, per accogliere, costituendo appunto il detto mantello, l'ovisacco; e che, dopo averlo circondato da tutte le parti, si avvicinano nuovamente, quasi convergendo da almeno due lati verso uno stesso punto ideale; indi continuano il tragitto in linea relativamente retta.

Fig. 111. — Semi-schematica. Mostra il decorso delle fibrille connettive attorno all'ovisacco — A: uno dei *poli* del follicolo.

La dimostrazione di ciò necessiterebbe molte figure, almeno tutte quelle che rappresentassero la serie completa delle sezieni appartenenti ad un follicolo intero, ciò che in questo lavoro mi riesce impossibile per esigenze facili a comprendersi. Basterà, spero, aver inserito la figura semi-schematica qui a canto, in cui la lettera A è stata segnata in corrispondenza di uno dei due poli presenti nella formaziene estraovarica (1).

## 11. Appunti bibliografici (§§ 6, 7, 8).

L'ulteriore destino dei cordoni epiteliali è stato oggetto di non poche controverse opinioni, non pure nei tempi meno recenti, ma anche attualmente. Escludendo l'opinione, dagli antichi istologi più strenuamente difesa, che i tubi corticali dessero origine agli ovuli e quindi ai follicoli, per via di strozzamenti, subiti per l'intervento del tessuto connettivo proliferante; non volendo soffermarci sulla confusione che molti osservatori hanno fatto tra tubi di Pflüger, tubi midollari e corticali, studiati senza spesso tenere il menomo conto dell'origine di essi e dell'età dell'ovaia in esame; possiamo concretare nei seguenti punti le altre opinioni: 1°) i cordoni, quali residui di formazioni embrionali, non hanno valore nell'adulto. 2°) Essi cordoni formano la granulosa (Kölliker nel 1882), Clivio (1903), Ganfini (1906) (2). 3°) essi dànno origine alle cellule interstiziali, 4°) o alle cellule tecali (Ganfini 906).

(1) Vedere Nota II in questo stesso Volume degli *Atti*.

(2) Il GANFINI nel suo lavoro del 1906 sostiene un'opinione non priva di interesse e sulla quale dovremo in altra Nota intrattenerci a lungo: egli, studiando l'ovaia del Pollo viene alla conclusione che durante lo sviluppo di questa, l'epitelio germinativo prolifera, originando i tubi di Pflüger, e i cordoni midollari. Si formerebbero insomma delle propaggini cellulari i cui elementi più superficiali darebbero luogo ai tubi di Pflüger, i più profondi ai cordoni midollari, dalle cui cellule proverrebbero la cosidetta glandola interstiziale e la granulosa follicolare.

Tralasciasi qui di far molte citazioni, notando solo che il lettore può trovare una estesa e, quasi completa bibliografia al riguardo, fino al 1880 in Mac Leod (1881), specie per quanto riguarda le omologie e la derivazione embriologica di detti organi; fino al 1887 in Paladino, nell' opera più volte citata; infine per la letteratura più recente può consultare V. Winiwarter che nel 1901, con il Sainmont, ne dà le più ampie notizie a riguardo specialmente dei cordoni midollari ed anche delle cosidette invaginazioni epiteliali.

Vuolsi subito notare che non è sempre facile, anzi talora riesce del tutto impossibile, ricercare le opinioni che i vari osservatori hanno avuto sul destino degli elementi appartenenti ai VERI cordoni di origine epiteliale nell'ovaia postembrionale, stante la confusione che, tra queste e le varie altre formazioni, moltissimi Aa. hanno fatto.

I rapporti di contiguità tra dette propaggini e i follicoli, sono stati messi in evidenza da non pochi Autori, tra i quali il Paladino (1887) il Winiwarter nel 1901 (per i follicoli primordiali) il Popoff nel 1911 ed altri molti. Il Clivio, nel 1903, sembra che abbia osservato il caso di un cordone a contatto con la formazione follicolare, capitato nel taglio, nel modo migliore possibile per conoscerne i particolari.

Abbiamo riserbato per ultimo d' accennare che l'argomento trattato nel § 7 di questo lavoro, nulla presenta in sè di nuovo, ove se ne tolga l' interpretazione. Difatti che vi siano attorno ai follicoli giovanissimi delle grosse cellule in moltiplicazione è stato osservato da molti (vedere Levi 1913), solo che queste furono riguardate come cellule tecali, senz'altro.

Non fu, per quanto ne sappiamo, intravisto il periodo di stasi nella riproduzione di dette cellule, quale è stato notato nelle pagine precedenti.

## 12. Origine della teca follicolare.

In un follicolo primordiale, in cui la granulosa è appena individuata, limitandosi ad alcune poche cellule molto piatte, incastrate tra la membrana ovulare e quella di Slawiansky, non si può parlare di una teca, in qualunque senso voglia intendersi la parola. Ma essa non tarda a formarsi, ripetendo la sua origine da due processi: *a*) infiltrazione di elementi derivati dall' epitelio germinativo, *b*) movimenti di assettamento e particolari modificazioni del connettivo perifollicolare.

In un' ovaia in attiva funzionalità specifica, è d' osservazione frequente un cordone epiteliale incuneato, come avanti s' è accennato, tra i fasci che circondano, dal lato esterno, la membrana follicolare primitiva. Talora il cordone è, per dir così, appuntato verso di questa, talora invece ne è a contatto, restando però in direzione più o meno nettamente tangenziale ad essa.

In quest' ultimo caso specialmente, può anche esercitare una sensibile pressione meccanica, sì che vi imprime una deformazione, a volte rilevante, che può diventar causa financo di degenerazione per tutto il follicolo.

Nella maggior parte dei casi, il cordone stesso scivola lungo la membrana primitiva (o di Slawiansky) fino talvolta a circondarla per un buon tratto. In queste condizioni ben di rado esso cordone conserva la comune forma cilindroide, chè anzi i suoi elementi costitutivi si dispongono, almeno in un primo momento, in modo tale da formare degli ammassi, diremo così secondarii, irregolari, di cellule, prossime al follicolo stesso.

Va annesso interesse maggiore appunto al seguente particolare: I detti cordoni che si avviano verso il follicolo, penetrano nel mantello di connettivo quasi costantemente in

corrispondenza dell' ilo (polo, vedi in proposito pag. 21 e fig. III nel testo) e scivolano poi lungo le fibre connettive. La ragione meccanica di siffatto movimento riesce chiarissima quando si pensi alla costituzione intima del connettivo stesso, il quale (torna il conto di ripeterlo ancora una volta) presenta dei luoghi di minor resistenza in corrispondenza degli intervalli interfibrillari (Vedere § 3).

D' altra parte, siccome in fondo altro non è l' ilo che un punto di convergenza e quindi di concentramento delle fibre, si capisce come ivi con maggior probabilità e più numerosi vi si debbano trovare i cordoni, derivati dall' epitelio germinativo. Noi al riguardo possiamo pensare a due fatti: o il follicolo rappresenta un semplice ostacolo meccanico, per cui un cordone epiteliale che si sposti frammezzo allo stroma, si fermi solo quando o sopratutto quando incontra detto ostacolo; seconda ipotesi: o il cordone raggiunge, per dir così, lo scopo del suo movimento, quando viene a contatto col follicolo, da cui sarebbe stato quasi attirato. Questa seconda ipotesi, a prima vista più inattendibile, perchè teleologica, presenta invece una probabilità maggiore, in quanto altri indizii, che a tempo opportuno saranno illuminati, ci fan ritenere verisimile l'esistenza di un prodotto di secrezione, derivante dal follicolo e che potrebbe benissimo assumere l' importanza e la funzione di una sostanza chemiotropica.

Del resto, se il caso di un cordone che si avvicini più o meno al follicolo è quello appunto che più facilmente riesce visibile, non è proprio il più comune. Generalmente invece, l'osservazione, minuta e ben condotta, ci mette in grado di scorgere vicino ai detti follicoli, un numero talora relativamente grande di cellule isolate, sempre di natura epiteliale, e derivanti dallo epitelio germinativo. E, cosa notevole, siffatte cellule non soltanto sono visibili, nelle condizioni dovute, vicino ai follicoli presso cui non è arrivato intero alcun cordone, ma anche attorno a quelli che già si presentano quasi contigui ai cordoni predetti. Insomma deve credersi che il cordone, in vicinanza del follicolo verso cui s' è avviato, si suole scomporre, in tutto o in parte, nei suoi elementi, i quali allora circondano l'ovisacco. Tutto questo processo coincide col risvegliarsi della formazione follicolare dallo stato di vita ridotta (latente?) in cui l' ovulo primordiale che si origina nella ovaia fetale, certamente resta durante un periodo vario e talvolta notevole, permanendo cioè invariato per un tratto di tempo più o meno lungo mentre l'ovaia è adulta. Allora le cellule, di cui si è discorso, seguendo la via segnata dall' ilo e scivolando sui fasci connetti perifollicolari o addirittura sulla membrana di Slawiansky, si stabiliscono a guisa di corona, per ovvie ragioni, non continua nè regolare, anzi a diversi livelli e disordinatamente sparsa, attorno all' ovisacco.

Nasce spontanea la domanda, se le dette cellule, dopo essersi avvicinate al follicolo, si allontanino nuovamente. Ciò pare molto improbabile: difatti, mentre il follicolo si va accrescendo di volume, si circonda di un numero sempre maggiore di tali elementi.

I quali, difatti, continuano a comparire più numerosi in modo costante o quasi, in corrispondenza dell' ilo, ove spesso si vedono ammassarsi e strisciando poi attraverso le fibre estrafollicolari, si distribuiscono ancora tutto attorno all' ovisacco, o per meglio dire, attorno ed esternamente alla sua granulosa.

Da questo momento e da cotali elementi ha inizio la teca follicolare. Essa distinguesi anzitutto per la presenza, nel connettivo perifollicolare, di elementi cellulari epiteliali, che mancano nel resto dello stroma, o vi si trovano troppo scarsi e raramente raggruppati in numero tale da farsi notare.

Altri caratteri non tardano a comparire. Già fin dal primo momento, contemporaneamente, o, forse, poco dopo la apparizione *in situ* delle cellule derivate dall'epitelio germinativo, i nuclei del connettivo (cellule fisse connettivali) specie quelli che si trovano in corrispondenza del cosidetto ilo follicolare, diventano più grossi e più corti degli altri, probabilmente in conseguenza di uno speciale processo che li aggredisce, trasformandoli. Man mano che il follicolo cresce, le cennate modificazioni si estendono, interessando tutti gli elementi connettivi che si trovano a contatto dell'ovisacco, mentre, come si disse, in mezzo ad essi elementi, sempre più numerose vengono ad infiltrarsi e a stabilirsi le cellule derivate dall' epitelio germinativo.

Pochi mutamenti intimi ormai queste subiscono, ma devesi supporre che con la loro presenza influiscano sulla ulteriore disposizione dei nuclei connettivi e dei fasci di fibre che si trovano ad immediato contatto col follicolo.

Riassumendo: la presenza delle cellule infiltratesi — che ora possiamo senz' altro chiamare cellule tecali — le modificazioni morfologiche e strutturali delle cellule connettive, nonchè un contemporaneo, nonchè lieve, spostamento delle fibre, le une rispetto alle altre, come diremo meglio fra breve, riescono, nell' insieme, a distinguere una zona a caratteri diversi e quindi agevolmente differenziabile dal resto dello stroma; tale zona fu denominata *teca* o *tunica* follicolare, sebbene l'espressione sia tutt' altro che felice.

In seguito, com'è noto, essa si distingue in due zone, che furono nominate: *theca interna* o di *Henle* l'una, e *theca externa* o *fibrosa*, l'altra. Pare però che da questo momento e forse per tutto il resto della esistenza del follicolo, la penetrazione delle cellule epiteliali, nella teca, ormai definitivamente costituita, vada limitandosi notevolmente.

Vediamo quale meccanismo di formazione possa assegnarsi a detta distinzione, secondo i presenti studii.

Premettiamo, che la teca esterna si distingue dall' interna e dal resto dello stroma, sopratutto per una disposizione speciale delle fibre, le quali sono più strettamente connesse, più rigorosamente concentriche (e quindi parallele fra di loro, nei diversi tratti della curva), delle altre e specialmente, molto più povere di elementi cellulari connettivi (cellule fisse) e di cellule tecali. Per queste ragioni appunto, essa fu denominata: " strato o tunica fibrosa „ quasicchè fosse priva di elementi cellulari. Molti confronti mi fanno ritenere che tale scarsezza, sebbene reale, sia stata un po' esagerata. Il fatto si spiega, perchè le cellule connettivali della teca esterna sono rilevantemente più chiare, quindi meno facilmente individualizzabili. Con ciò non vogliamo escludere che i detti elementi siano in modo notevole, numericamente ridotti. Difatti pare dover ammettersi in molti di essi un fenomeno di dissoluzione, visibile nella progrediente perdita di colorabilità e nella graduale, ma sensibile riduzione dell' elemento cromatinico dei nuclei. Che i fasci, in questa regione, siano più strettamente in contatto, dipende senza dubbio dall' azione meccanica che l'ovocellula e la granulosa svolgono tutt'attorno, man mano che crescono. Nessuna prova diretta fin'ora viene in suffraggio di questo criterio; ma se consideriamo che l'ovisacco è un corpo chiuso completamente di fuori, dallo stroma, e che, anche quando ammettessimo in quest'ultimo un processo intrinseco che lo facesse crescere di volume, non potremmo mai supporre che esso lo facesse contemporaneamente, relativamente ai numerosi follicoli che contenga; se consideriamo che talora, in vicinanza di un grosso follicolo ce ne sono altri più piccoli, schiacciati in modo tale da legittimare il superiore asserto, dobbiamo di sicuro ritenere che il volume e sopratutto la forma di un follicolo sia la resultante di due

forze antagonistiche: una d'espansione, data dall'ovisacco in crescita, l'altra di contrazione, dovuta all' elasticità (diremo in seguito qualche cosa sul riguardo) dello stroma, o in ogni caso, allo sforzo di resistenza che questo tessuto, per sè stesso compatto, esercita.

Tutto ci induce a credere che l' azione di compressione di cui or ora abbiamo parlato, si esplichi su tutte e due le zone tecali, ma sia e si renda maggiormente evidente sulla esterna, anzitutto perchè questa è più omogenea, riguardo alla interna che finisce coll' essere quasi infarcita di grosse cellule (cellule tecali); in secondo luogo, perchè se si studia dal lato meccanico il sistema: follicolo — teca interna — teca esterna, nasce la convinzione, che risenta maggiormente l' azione di compressione l' ultimo dei tre elementi or nominati, in quanto il penultimo si trova sempre a contatto con un corpo più facilmente deformabile e maggiormente elastico, qual'è la membrana di Slawianski, specie nei follicoli avanzati di sviluppo, nei quali, al di dentro di questa membrana c' è uno strato di cellule lassamente riunite (cellule della granulosa) e a contatto con un liquido (liquor folliculi).

Per questo modo di vedere, la teca esterna sarebbe un differenziamento puro e semplice della interna, o diciamo meglio, della " teca „ in senso lato; in fondo, le due zone hanno difatti caratteri molto simili, e, nei riguardi puramente strutturali, addirittura identici, escludendo le cellule specifiche. Aggiungiamo a maggior conferma dell' asserto, che la prima (esterna) può, in molti casi, mancare o essere ridottissima, e ciò specie quando lo strato contiguo dello stroma si infarcisce di cellule della glandula interstiziale, in modo che il connettivo perifollicolare che dovrebbe costituire la teca in genere, si riduce al minimo di estensione.

## 13. Appunti bibliografici (§ 9).

Moltissimi Autori hanno cercato di investigare l' origine della teca, seguendo varii criterii. Possiamo, ad ogni modo, affermare che fin oggi una sicura conferma non si è avuta ancora per nessuna delle teorie avanzate. Allo studio di tale formazione per vero, si sono interessati sopratutto coloro, che hanno in modo qualsiasi portato le loro ricerche sulla edificazione del corpo luteo o sulla degenerazione atresica del follicolo. Si potrebbero citare i lavori del Bischoff, Funke, Coste, Pflüger, v. Baer, Pouchet, Valentin, Zwicky, van Beneden, Kölliker, His, Slawiansky, Paladino, Cristalli, Sobotta, Cesa-Bianchi etc., sebbene nessuno si sia fermato di proposito od esclusivamente su di essa.

Van Beneden (1881) descrive attorno al follicolo: 1°) un sottile strato fibroso interno; 2°) uno strato medio formato di cellule interstiziali, separate da tramezzi fibrosi; 3°) uno strato fibroso esterno. Egli però ritiene che se non fosse la disposizione concentrica di questi strati, essi non si distinguerebbero dai tessuti circostanti.

Di nuovo dunque non trova che la disposizione degli strati, distinti dalla maggior parte degli Aa. precedenti soltanto in due ***tuniche***: la esterna, detta da Henle " tunica fibrosa „ e la interna chiamata " tunica propria „, ben differenziabile dall'altra per la presenza di elementi speciali.

Anche Mac Leod (1881) accetta la doppia divisione della teca, ma nulla dice quanto all' origine d' essa; afferma solo che la tunica fibrosa, durante lo sviluppo del follicolo non subisce mutamento di sorta. Lo stesso Autore però descrive nel Pipistrello una teca senza la detta distinzione. Pare che anche il Van der Stricht (1912) osservi nel V. murinus

che la teca follicolare sia soltanto distinta dalla presenza delle cellule tecali e non da speciale forma del connettivo.

Paladino (1887) conferma la divisione cennata, correggendo l' idea di Henle, secondo cui la teca interna dipenderebbe dalla granulosa.

Egli viene seguito senz' altro dal Cristalli (1912) e da moltissimi, se non tutti quasi gli Aa. posteriori.

Quanto al meccanismo, in sè stesso considerato e dal lato, per dir così, fisico, la formazione della teca follicolare è stata poco studiata.

Il Van Beneden accenna a qualche cosa, quando afferma che il follicolo primordiale, nel crescere, caccia innanzi a sè uno strato di tessuto connettivo fibroso o lamelloso, e, qualunque sia il suo volume, esso resta sempre avvolto da tale strato fibroso, a spese del quale si sviluppano tutte le tuniche della teca follicolare.

Waldeyer (1870) mette la formazione delle due tuniche in relazione con lo sviluppo del sistema vascolare, presumendo che dei vasi penetrando, insieme con gittate di connettivo lasso, ma ricco di elementi cellulari, fra cui leucociti, dalla t. fibrosa, verso l'interno della formazione follicolare, darebbe origine alla t. propria.

Bertè e Cuzzi (1884) solo dicono che la corteccia dell'ovario, circostante alla granulosa, si atteggia più tardi a teca follicoli. Anche qui, questi due Aa. seguono le idee del Paladino, secondo il quale la teca si svolge intorno al follicolo, " del tutto a spese del connettivo limitante „ il quale diventa florido, cioè più ricco di elementi cellulari, distinguendosi per ciò stesso dal restante stroma ovarico. Va accennata l' importanza, che ammette quest' A. a tale formazione, non solo in quanto servirebbe, secondo i suoi criterii, ad isolare il follicolo dalla rete dei cordoni o tubuli ovarici, ma anche perchè accompagna e indica, con speciali fenomeni, la maturazione del follicolo, la quale è resa evidente dall' accumularsi di grosse cellule in entrambi gli strati della teca stessa. Ora, sebbene, come è stato detto nelle pagine precedenti, la costituzione della teca follicolare rappresenti un nuovo assestamento dei fasci connettivali perifollicolari d' una parte e la comparsa in mezzo ad essi di cellule speciali, dall' altra, non crediamo poter accettare l'opinione del geniale istologo, salvo in riguardo alla quantità: in altri termini siccome cotali elementi si stabiliscono quasi contemporaneamente al manifestarsi dei fenomeni di assestamento, sopra cennati, riteniamo che il follicolo è maturo solo quando il numero di essi elementi ha raggiunto il massimo possibile o è vicino a raggiungerlo.

Non meno chiaro, sebbene più sviluppato, è il problema della intima essenza delle cellule tecali.

Van Benden nel 1881, ritiene che le cellule tecali siano delle vere e proprie cellule interstiziali; il loro numero nonchè la dimensione loro cresce a misura che il follicolo ingrandisce. Va aggiunto che secondo l' A. le cellule interstiziali hanno origine connettiva.

È noto invece che già, secondo il Waldeyer (1870), erano state considerate se non tutte, in parte, come cellule bianche del sangue.

Da altri (citati da M. Leod) sono state prese per cellule connettive. (Körnerzellen di His). Robin, sempre per fede dello stesso A., le chiama, per non pregiudicarne l' essenza " cellules de la paroi propre de l'ovisac „ e Tourneux le considera " analogues aux cellules interstitielles de la trame de l' ovaire „. Mac Leod poi, studiando l'ovario di *Hermine* trova giustificato quest' ultimo asserto, entrando in particolari che qui non è il caso di riferire, sebbene sembrino non molto verisimili.

Bertè e Cuzzi nel 1884 le riguardano come elementi modificati dello stroma ovarico, mantenendo del tutto invariata la opinione del Paladino (1887).

Cesa-Bianchi nel 1907 crede poter identificare le cellule tecali con le interstiziali dello ovario.

Pinto (1905) che chiama le cellule tecali " epitelioidi, „ nega la loro trasformazione, affermata da moltissimi Autori, in cellule luteiniche (eccezion fatta della ovaia molare).

Insieme col Rabl ammette che siano d'origine epiteliale, onde il loro passaggio a cellule luteiniche — che sono d'origine mesenchimale — sarebbe, come vuole il Rabl, una " metaplasia „.

V. Winiwarter et Sainmont, (1908) insistono nell' idea che le grandi cellule, che esistono nella teca interna di tutti i follicoli, in qualunque stadio di sviluppo o di regressione, non sono che elementi connettivi differenziati e Popoff nel 1911, nei suoi studii sull' ovaia di diversi Mammiferi, chiama questa formazione sempre " teca connettiva „.

A questa opinione aderiscono moltissimi, la gran maggioranza cioè degli Autori recenti e moderni.

Ciaccio (1910) dopo avere notato che gli Autori considerano le cellule tecali della stessa natura delle interstiziali, avanza l'idea, pur senza affermarla del tutto recisamente, che queste ultime siano di natura mesenchimale; egli dà un' estesa bibliografia in proposito.

Non crediamo occuparci dei minuti particolari citologici delle cellule tecali, che solo hanno importanza secondaria per questo lavoro e sui quali del resto si possono consultare quasi tutti gli Autori fin qui citati e in modo speciale lo Zalla (1907), il Levi (1913), il Ciaccio.

Lo stesso dicasi per quanto riguarda la moltiplicazione di esse, riconosciuta da quasi tutti gli Autori. Però, per quel che risulta a chi scrive queste parole, nessuno ha accennato di proposito e con precisione al fatto che sull' attività riproduttiva delle cellule tecali influisca l' età del follicolo.

### 14. Di una probabile secrezione follicolare.

Giacchè ho accennato, per intendere certi fenomeni, alla opportunità di accettare un criterio del tutto nuovo, quello di una secrezione follicolare, è bene che mi vi soffermi, in modo da esporre succintamente, ma ordinatamente, le ragioni principali che mi hanno consigliato a prospettarlo.

*a*) È stato già da tempo affermato che l' ovo può paragonarsi a una cellula secernente, anzi da qualche Autore è stato ritenuto, secondo me con pieno fondamento, addirittura come tale. Ora, per quanto l'ovocellula costituisca un elemento a metabolismo speciale e produca sostanze metaplasmatiche atte ad essere accumulate, nel proprio citoplasma, quali materiali di riserva, da servire all' ulteriore suo sviluppo, dobbiamo supporre che essa non si sottragga alla legge generale cui sottostanno tutti gli elementi glandulari, nei quali, al processo di secrezione va intimamente e necessariamente connesso quello di escrezione. Il prodotto di questa ultima fase non materialmente evidente, o per lo meno non ancor differenziato morfologicamente con i mezzi di cui in atto la microtecnica dispone, diffuso come è probabile, attorno all' ovocite non può non influenzare a sua volta il metabolismo delle cellule della granulosa per le quali del resto è nota, ed è stata recentemente messa meglio in evidenza l' attività glandulare; nonchè probabilmente anche la zona connettiva

perifollicolare. Esso verrebbe tanto più facilmente diffuso, in quanto lo stroma ha la costituzione fibrillare, che dicemmo avanti. Prova ne sia la osservazione seguente: Ogni follicolo, man mano che si sviluppa, esplica una speciale, innegabile influenza sullo strato di epitelio germinativo corrispondente, cioè posto precisamente sopra di esso. Tale zona epiteliale subisce dei mutamenti notevoli, e quando il follicolo ha raggiunto un volume rilevante, prima ancora che esso venga a sporgere dalla superficie della ovaia, l'epitelio di quella zona e soltanto esso, si appiattisce e finisce col desquamare. Alla interpretazione di questo reperto, già in parte noto e messo ancor meglio in evidenza da me stesso in altro lavoro, si potrebbe fare una obbiezione naturale; sostenere cioè che il tratto di epitelio, che si trova in corrispondenza ad un follicolo in accrescimento, degeneri perchè i suoi elementi avrebbero espletato il compito di secernere una sostanza utile all'ovaia, o a determinati suoi organi; e ciò tanto più che una attività secretoria dell'epitelio germinativo è stata dimostrata in modo sicuro già da tempo. L'obbiezione anche a voler accettarla, nonostante lo spiccato carattere di teleologismo, cade però da se, pensando alla corrispondenza netta evidentissima e costante tra le modificazioni che subisce nella forma, nella struttura, nella funzione, l'epitelio, e le modificazioni che subisce il follicolo sottostante (anche se ancor situato a una certa profondità) rispetto ad esso. In caso diverso si dovrebbe sostenere, ognun vede con quanta poca verisimiglianza, che l'epitelio segreghi soltanto a tratti, proprio in corrispondenza dei singoli follicoli in accrescimento. Nè segregherebbe a caso or quì or là, perchè i fenomeni di cui si discorre sono evidenti solo in relazione all'esistenza di follicoli sottostanti. Dovrebbe quindi contemporaneamente ammettersi che stimoli — interni o esterni — agissero su determinati tratti di epitelio, facendo a questo emettere una sostanza che, arrivata al follicolo sottostante, lo farebbe crescere. In tal modo evidentemente si andrebbe a finire in un campo ancor più malfido, e lontano dalle illazioni, che la scienza sperimentale ha legittimità di fare. Ripetiamo, prima di andare innanzi nella discussione: materialmente si constata una corrispondenza tra il follicolo e il tratto di epitelio germinativo *corrispondente*. Crediamo dover ammettere come intermediario uno stimolo. Lo stimolo — che in ogni caso sarebbe rappresentato da una secrezione, non può venire dall'epitelio germinativo—salvo prova in contrario; si è quindi costretti almeno come presente " ipotesi di lavoro „ ad ammettere uno stimolo partente dal follicolo e capace, se non altro, a far sentire (diciamo così) la presenza del follicolo stesso, allo epitelio sovrastante.

*b*) Abbiamo messo in luce il fenomeno per cui le cellule derivanti dell'epitelio germinativo si avvicinano ai follicoli, anche quando per raggiungerli debbano attraversare spazii relativamente notevoli. Abbiamo accennato alla impossibilità di dare una spiegazione puramente meccanica al processo, quando dette cellule si avviano solitarie fin da principio staccandosi dall'epitelio germinativo, indipendentemente le une dalle altre, o nel seguito, dissociandosi dai primitivi cordoni epitelio-germinativi.

Va notato chè è da escludersi quasi assolutamente l'ipotesi di movimenti ameboidei di tali elementi, sebbene talora questi si mostrino a contorni varii. D'altra parte, essi non potrebbero sviluppare, nè avvantaggiarsi di un notevole polimorfismo, costretti, come sono, sempre, in mezzo alle fibre di un tessuto indubbiamente compatto, quale è lo stroma ovarico. L'ipotesi di una soluzione, causa di uno speciale tattismo (chemiotassi positiva) se pur non si impone, potrebbe certo essere presa in seria considerazione.

*c*) Il costituirsi di una differenziazione (teca) quale è stata descritta, attorno ad ogni

follicolo, non può dipendere soltanto da azione meccanica, sebbene questa, come abbiamo visto, non sia da escludersi; ma piuttosto da azione chimica. Difatti, a voler tacere qui degli elementi nuovi di cui parlammo anche al paragrafo *a*), cioè delle cellule tecali, in fondo si constata che la teca è costituita da fasci comuni del connettivo perifollicolare preesistente, che hanno assunto, essi e in special modo le cellule fisse, caratteri nettamente differenti, e va notato che tali caratteri si manifestano col risvegliarsi dello oocite a vita attiva di sviluppo, e progrediscono in corrispondenza delle varie fasi che l'oocite stesso attraversa nel crescere.

*d*) Una prova ancora e, secondo il mio criterio, di non scarso valore si ha poi nella osservazione seguente, che ho accennato già a suo luogo, ma che voglio sviluppare meglio in questo punto: la formazione della teca follicolare, almeno per quanto riguarda il connettivo, si inizia in via generale agli ili del follicolo. Difatti, quando ancora essa non si è stabilita intorno al follicolo tutto, si notano negli elementi fissi e nelle fibrille poste in quelle regioni dell' ovisacco, le stesse modificazioni citologiche, che appariranno più tardi, e per vero rapidamente, nel resto del tessuto perifollicolare, dando così luogo alla teca. In altre parole, le cellule connettivali che si trovano proprio in corrispondenza dei poli, nel follicolo primordiale che inizia il suo sviluppo, si ingrossano quasi per un processo di inturgidamento, e diventano nel contempo più chiare: or appunto queste sono le proprietà inerenti come fu detto, alle cellule della teca, che non tarderà a costituirsi nel suo complesso e nella sua interezza.

Coll' ammettere l' intervento di una sostanza chimica procedente dal follicolo, si consegue l' unico mezzo per dare una spiegazione del fenomeno or descritto.

Difatti, è vero che ove una secrezione dell' ovisacco realmente ci fosse, essa dovrebbe manifestare i suoi effetti costantemente attorno a tutta la formazione follicolare e non soltanto da due lati (poli); però è evidente che il prodotto di essa, nel diffondersi, venga per così dire in un primo momento, ad incanalarsi nello spazio (virtuale o quasi) intercedente fra la membrana di Slawinskj del follicolo stesso e il *mantello* fibrillare che circonda quest' ultmo. Allora questo prodotto, man mano che si accumula, ***primamente si spinge attraverso l' ilo*** e in seguito trabocca (mi si passi la espressione) da tutti i lati, gemendo dagli interstizii (spazi interfibrillari) del mantello stesso.

Ecco come si potrebbe interpretare l'osservazione materiale che gli effetti di esso si manifestano al principio sugli elementi posti nell' ilo e subito dopo su tutti gli altri, dando luogo a quelle modificazioni che, negli ulteriori momenti, originano la teca follicolare.

### 15. Appunti bibliografici (§ 10).

Le attività glandulari dell'ovisacco non sono conosciute se non singolarmente e rispettivamente per gli elementi della teca, per l' epitelio della granulosa, per l'ovocite. Esse stesse come tali, non hanno poi fatto sorgere molte ricerche e sono di conseguenza ancora poco esplorate nella loro origine precisa, nella essenza e negli effetti.

Che gli elementi della teca elaborino un prodotto glandulare, è noto già da molto tempo e solo vi è disparità, relativa, nel fissare il momento in cui iniziano tale processo. Il prodotto di esse sarebbe devoluto a funzioni speciali per anco ignote, versandosi nel circolo sanguigno. L' idea che esso invece venisse utilizzato per la ragione da noi sopra difesa, parrebbe non essere stata avanzata da alcuno. La glandularità dell' ovocite cercò di dimo-

strarla il Comes nel 1905, e nel 1908. L' ovo stesso però non fu considerato come una glandula a secrezione esterna, nel senso comune della parola!

La granulosa, fino almeno dal Paladino (87) ebbe assegnata analoga funzione. Recentemente è stata studiata dal Russo (1918) e da me (1912 e 13).

In una pubblicazione di qualche anno addietro accennavo appunto all' osservazione da me stesso fatta che una sostanza non ben definita passa, attraverso la membrana di Slawiansky del follicolo ovarico del Maiale, per essere portata al di fuori dell' ovisacco e ricevuta dalle cellule tecali. Ciò, si intende per riguardo ad ovisacchi avanzati in età; ad ogni modo, ove confermato, tale reperto potrebbe assumere importanza nel determinare il fenomeno di cui attendiamo la spiegazione e che abbiamo supposto ora : cioè d' una secrezione, che irradii dal follicolo, facendo sentire i suoi effetti sugli elementi posti fuori di questo e in particolari condizioni, fino all' epitelio periferico esterno.

Bisognerà anche investigare bene il significato glandulare di quest' ultimo, nonchè il meccanismo istofisiologico onde si compie tale funzione. Su questo argometo difatti esiste quasi unicamente la serie di importanti memorie del Russo (1907) nelle quali aveva però da dimostrare ben altra tesi, per potere fermarsi troppo a lungo su certi particolari, che del resto imposta sempre in modo lucidissimo e magistrale.

Va citato anche il lavoro del Regand et Policard (1901), i quali riconoscono il fenomeno di secrezione di quell' organo, importantissimo.

Le loro ricerche però avevano bisogno d' una più ampia dimostrazione. Noi, certo, siamo ben lungi dal negare, anzi ci crediamo autorizzati a partecipare di tali vedute sull'ep. germ. dell' ovaia postembrionale. Crediamo però che ben altro contributo bisogna recare alla conoscenza del reperto, e che bisogna sopratutto metterlo in relazione con analogo fenomeno procedente dall' interno dell' ovaia e precisamente dalla formazione follicolare.

## 16. Ulteriori considerazioni su di una probabile secrezione follicolare. Conclusioni generali del lavoro.

Qualcuna delle idee che son venuto esponendo, potrà sembrare azzardata e prematura. Del resto, a parte le interpretazioni che altri voglia darvi, restano certo invariate le osservazioni che siamo venuti esponendo, basandoci sullo studio di migliaia di sezioni , ricavate da pezzi di ovaie, tolte ad animali, sacrificati in qualunque epoca dell'anno e del loro sviluppo individuale, fissate e colorate con i molteplici e precisi mezzi, che la moderna tecnica ci offre. Forse ben altro nome ed ingegno , che non quello troppo umile dello scrivente , sarebbe stato d' uopo per avanzare ed impostare il problema di una *secrezione generale* del follicolo, fenomeno che, ove definitivamente dimostrato ed illustrato, potrà essere la cosidetta chiave di volta per la spiegazione di moltissime questioni inerenti alla morfologia e alla fisiologia dell' ovaia e dei suoi organi.

Io stesso però me ne propongo in lavori futuri lo studio, nè avrei messo avanti l' ipotesi se non me ne avessero date svariate conferme altre ricerche, per così dire collaterali, di cui l' esposizione sarebbe male a proposito qui. Avrei voluto pubblicarle tutte in una unica memoria ma l' attuale momento urge troppo per lasciarmene l' adito , e ben altri doveri me ne tolgono il tempo e la possibilità.

Quale infine , la sede del fenomeno? L'ovocite , la granulosa , tutte e due insieme ? L' esame del quesito sarebbe prematuro. È bene però non dimenticare che l' ovaia e l' ovo

sono organi molto complessi, per cui forse i soliti criterii, seguiti nello studio degli altri elementi istologici, qui vanno variati e, sopratutto, usati con maggior larghezza di vedute e libertà di metodo.

A parte l' ipotesi di cui finisco di parlare, col presente studio credo aver portato un contributo non del tutto privo di valore, alle annose questioni della funzione esplicata dai cosidetti cordoni epiteliali (Pieghe crateriformi del Waldeyer e del Paladino; diverticules tubuliformes del Regaud etc.) e della origine delle cellule tecali. Una nota già anche quasi pronta, seguirà dette cellule nell' ulteriore sviluppo, investigandone la funzione secretoria, che non tardano ad assumere, i rapporti e le differenze di esse con le cellule interstiziali dell' ovaia, non che l' azione esplicata nel contribuire a dar termine allo stato di vita latente del follicolo primordiale.

* * *

Le resultanze del nostro studio possono riassumersi e concretarsi nei seguenti punti:

1.) L' epitelio germinativo dell' ovaia NON perde, nell' animale adulto, la capacità di cui gode durante la vita embrionaria, di dar luogo a formazioni cellulari multiple o ristrette a pochi e anche a singoli elementi.

2.) Lo stroma ovarico, primitivamente è costituito da fasci connettivi, che decorrono paralleli per larghi spazii, e formano uno speciale tessuto filamentare. Tale disposizione finisce, in certe regioni, col mascherarsi, o addirittura col mancare, per l'avvenuta infiltrazìone di elementi di nuova formazione (cellule interstiziali in special modo).

3.) Le cellule provenienti dallo epitelio germinativo, dopo aver attraversato parte dello stroma, scivolando lungo tali fibre, si dispongono attorno al follicolo primitivo, penetrando sopratutto dall' ilo.

4.) Non appena cominciano attorno al follicolo ad affluire e a disporsi cotali elementi, la zona di connettivo, aderente ad esso, viene a subire notevoli modificazioni strutturali nei suoi elementi e acquista nelle sue fibre una direzione più evidentemente parallela o per essere più esatti, più regolarmente concentrica. In seguito tale zona si distingue in due regioni (dette « teca interna „ rispettivamente “ esterna „) caratterizzate dalla struttura e distribuzione diversa degli elementi costituenti, nonchè dal loro numero relativo.

5.) Per spiegare i fenomeni già detti ed altri, bisogna ammettere come probabile una *secrezione follicolare,* riflettentesi sull' ordinamento e le funzioni di varii organi dell' ovaia.

6.) L'ovaia, ancora una volta e per nuove ragioni, scaturite dalle presenti ricerche, si rivela come un organo eminentemente plastico e a funzioni straordinariamente complesse.

## 17. Materiali e metodi tecnici.

Mi son giovato di coniglie di tutte le età, dalla embrionale alla più avanzata. Per vero ho basato le descrizioni e le illazioni, speciali e generali, riportate nel presente lavoro, su organi tratti da individui del tutto normali e dei quali in genere conoscevo la cosidetta “ storia biologica „ con la massima possibile precisione.

Tuttavia, siccome contemporaneamente volgevo i miei studi intorno alle modificazioni arrecate da fattori diversi (ipernutrizione, digiuno, gravidanza, vecchiezza, stagioni) sull'elemento epiteliale ovarico, ho avuto occasione di trarre dai varii confronti elementi di giu-

dizio e specialmente di controllo, interessanti, i quali, pur non essendo qui specificatamente illustrati, mi hanno giovato moltissimo nell' interpretazione dei fenomeni normali.

Così d' altra parte posso ben affermare che il materiale di cui mi sono servito, per queste ricerche è stato oltrechè abbondantissimo, molto vario. A tal proposito mancherei a un sentitissimo dovere di riconoscenza e gratitudine, se non rendessi all' illustre Prof. Russo, vive azioni di grazie, giacchè non solo mi ha permesso di usare nel modo più largo, di tutte le risorse onde è fornito il Laboratorio, ma ha lasciato anche, a mia disposizione, molto e prezioso materiale su cui egli stesso ha eseguito interessantissime ricerche personali, ed è stato sempre premuroso e largo di incoraggiamenti e consigli.

Quanto ai metodi tecnici, sono stati adoperati i più moderni, sia generali che speciali, tanto per le fissazioni che per le colorazioni. Delle ovaie, non appena tratte dallo animale sacrificato, e quasi ancora moribondo, una veniva tagliata in minutissimi pezzi, che si immergevano subito nel fissatore; l' altra veniva divisa in tre sezioni con due tagli trasversali, ovvero in sei, con gli stessi due tagli e un terzo in senso longitudinale. I pezzi così ottenuti, infilzati delicatamente e rapidissimamente in altrettanti sottilissimi fili di vetro, appositamente fatti, si affondavano separati, in modo da tener sempre conto della provenienza dei varii pezzi, topograficamente parlando, nelle varie miscele; così si otteneva di mantenerli sospesi, ed esenti dal contatto con le pareti del recipiente. Con tale sistema si conseguivano due importantissimi scopi: evitare le deformazioni, per compressione meccanica, dovuta al peso del pezzo stesso, sopratutto nelle regioni più esterne; (specialmente l' epitelio germ.) e in secondo luogo, poter sempre riferire per ogni pezzo la posizione e il decorso delle fibre, controllandoli con l'osservazione dell' altra ovaia fissata in toto. Così venivano a integrarsi i reperti fatte nelle singole porzioni, e si poteva ricostruire la minuta, intima struttura dell' ovaia tutta.

*Catania, Gennaio 1919.*

---

# INDICE BIBLIOGRAFICO

**Baiardi D.** — Contribuzione allo studio dell' ovulazione durante la gravidanza — *Ann. Ostetr. Ginec. A. 8.* 1886.

**V. Beneden E.** — Contribution à la connaissance de l' ovaire des Mammifères (Verp. mur. et. Rinol. f. eq.) *Arch. de Biologie.* Vol. I, 1880.

**Bertè F. e Cuzzi A.** — Contributo all'anatomia dell'ovario della Donna gravida. *Riv. Clinica di Bologna N. 7,* 1884.

**Cesa-Bianchi D.** — Osservazioni sulla struttura e sulla funzione della cosidetta « glandula interstiziale dell'ovaio » *Arch. di Fisiologia.* Vol. IV, 1907.

**Ciaccio C.** — Contributo alla disposizione e alla fisiologia cellulare dei lipoidi. *Arch. für Zellf. Bd. V.*

**Clivio C.** — Di alcune particolarità osservate in ovaie infantili. *Ann. d'Ort. e Ginec.* Anno 25, 1903.

**Comes S.** — Sulla funzione glandulare del follicolo e sulla differenziazione degli involucri nell ovo di Belone acus Rond. *An. Anz. XXVI*, 1905.

**Idem** — Alcuni particolari istologici donde proviene il maleriale nutritivo dell'oocite dei mammiferi. *Arch. ital. d'An. e d'Embr.* Vol. VII, 1907.

**Idem** — Azione dell' Atropina e della Pilocarpina nell' oocite della gatta. *Atti Acc. Gioenia Sc. Nat.* Serie V, Vol. I, 1908.

**Cristalli G.** — Contributo all' istogenesi del corpo luteo della Donna. *Arch. di Ostetr. e Ginec.* A. 10.

**Ganfini C.** — Sulla struttura e sviluppo delle cellule interstiziali dell'ovario. *R. Acc. Med. Genova*, 1906.

**Giannelli L.** — Contributo alla miglior conoscenza dello sviluppo delle glandule genitali nei mammiferi. *Mon. Zool. Ital.* 1905.

**Idem** — Ricerche sullo sviluppo delle cellule interstiziali dell'ovario e del testicolo in Lepus cuniculus. *Atti Acc. Sc. Med. Nat. in Ferrara.* Anno 83 f. 1-2, 1909.

**Kölliker A.** — Entwickelungsgeschichte, 1882 (vedere anche : Ueber die Markkanäle und Markstränge in dem Eierstocken junger Hündinen. *Verh. d. an. Ges.* 1898).

**Mc. Leod. I.** — Contribution à l'étude de la structure de l'ovaire des Mammifères. *Arch. de Biologie*, 1880.

**Levi G.** — Note citologiche sulle cellule somatiche dell'ovario dei Mammiferi. *Arch. f. Zellf. XI, 4*, 1903.

**Monterosso Br.** — Ulter. ric. sull'int. strutt. dell'ovaia dei Mamm. — Nota I, *In questo stesso volume degli Atti Acc. Gioenia.*

**Idem** — Ulteriori ricerche sulla granulosa del follicolo ovarico nei Memmiferi. *Arch. f. Zellf. XII Bd.* 1913.

**Idem** — Sulla struttura e la funzione delle cellule parietali della granulosa nel foll. ov. del Maiale — *Atti Acc. Gioenia Ser. V, Vol. V*, 1912.

**Paladino G.** — Ulteriori ricerche sulla distruzione e rinnovamento continuo del parenchima ovarico nei Mammiferi. *Morano-Napoli*, 1887.

**Pinto C.** — Note istologiche sulle modificazioni delle ovaie in gravidanza. *Ann. Ostetr. e Ginec.* 1905.

**Popoff M.** — Le tissu interstitiel et le corps jaune de l'ovaire. *Arch. de Biologie T. XXVI*, 1911.

**Regaud A. e Policard A.** — Notes hystologiques sur l'ovaire des Mammifères. *Comptes Rendus de l'Ass. des Anatomistes*, 1901.

**Idem** — Function glandulaire de l'épithelium ovarique et de ses diverticules tubuliformes chez la chienne. *C. R. Soc. Biol.* 1901.

**Russo A.** — Modificazioni sperimentali dell' elemento epiteliale dell' ovaia dei Mammiferi. *R. Acc. Lincei*, 1907.

**Idem** — Sulla funzione di assorbimento dell' epitelio germinativo dell' ovaia dei Mammiferi. *Mon. Zool. Ital.* 1907.

**Idem** — Ulteriori ricerche sulla funzione di assorbimento dell' epitelio germinativo dell'ovaia dei Mammiferi. *Boll. Acc. Gioenia Sc. Nat.* Fasc. 92, 1906.

**Idem** — La funzione di assorbimento e di secrezione interna nelle cellule della granulosa del follicolo di Graaf della Coniglia, la degenerazione grassa ed il ciclo vitale dell'ovo—*In questo stesso Volume degli Atti.*

**Schulin K.** — Zur morphologie des Ovariums. *Arch. f. Mikr. Anat. Bd. XIX*, 1881.

**v. d. Stricht O.** — Sur le processus de l'excrétion des glandes endocrines : le corps jaune etc. *Arch. de Biologie T. XXVII*, 1912.

**Zalla M.** — Ricerche sopra la struttura e l' istogenesi della sostanza midollare dell' ovaia. *Arch. ital. di Anat. e d' Embr.* Vol. VI, 1907.

**Waldeyer W.** — Eierstock und Ei. *Leipzig*, 1870.

**v. Winiwarter** — Recherches sur l'ovogenèse et l'organogenèse de l'ovaire des Mammifères. *Arch. de Biologie XVII.* 1.

**v. Winiwarter e Sainmont** — Nouvelles recherches sur l' ovogenèse et l'organogenèse de l'ovaire des Mammifères (chat). *Archives de Biologie T. 24.* 1908-909. Cap. IV à VII.

---

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA 1ª

**Fig. 1ª** — Stroma ovarico di Coniglia. Si scorgono due cellule migranti *a* e *b* di provenienza dall'epitelio germinativo. La freccia *c d* indica che l'epitelio esterno dell'ovaia si trova nella sezione rispettivamente in direzione dei punti *c* e *d*. Oc. 8 obb. imm. omog. $^1/_{15}$ Koristka. Tubo oculare evaginato. Proiezione sul tavolo di lavoro. Fissazione Flemming; colorazione con Ematossilina ferrica.

**Fig. 2ª** — Tratto dell'epitelio esterno di ovaia di Coniglia. Cellula « chiara » *a*; disotto ad essa un'altra cellula « chiara » in processo di approfondamento. Si nota come gli elementi dell'epitelio istesso siano lassamente uniti collo stroma sottostante, e manchi una membrana basilare. Oc. 8 comp. obb. imm. omog. semiap. $^1/_{15}$ Koristka. Tubo mezzo evaginato. Proiezione a livello del tavolino del Microscopio. Fissazione Herman. Colorazione Ematossilina Ferrica.

**Fig. 2ª bis.** — Cellula « chiara » (nello stroma sottoepiteliale); probabilmente giovane, cioè derivata recentemente da scissione di un elemento preesistente. Protoplasma quasi incoloro. Oc. 8 comp. obb. ap. imm. om. $^1/_{16}$. Tubo evaginato. Proiezione sul tavolo da lavoro. Fissazione liquido Flemming. (Benda); colorazione Ematossilina ferrica.

**Fig. 3ª** — Ovaia Coniglia giovane. Tratto d'epitelio esterno in attivo lavorio di proliferazione. Le cellule *a* e *b* in processo di scissione. Nucleo e protoplasma poco colorati. Approfondamento iniziato. Le altre cellule presentano l'asse inclinato in conseguenza della conseguente soluzione di continuità dell'e. g. Oculare 8. Obbiettivo semiap. $^1/_{15}$ Koristka. Tubo tutto evaginato. Proiezione sul tavolo da lavoro. Fissazione Hermann. Colorazione triplice Flemming.

**Fig. 4ª** — Ovaia Coniglia giovane. *e. g.* cellule dell'epitelio germinativo con nuclei in maggior parte a contorno irregolare (polimorfi). *c. e. g.* cordone derivato dall'epitelio germinativo, a corso tortuoso. Nelle altre sezioni, seriate, si vede che trattasi di due rami provenienti da un solo, disceso dall'epitelio. Le cellule sono piuttosto chiare e si fanno strada fra le fibre dello stroma. *c. f.* Elementi cellulari dello stroma (cellule fisse). Si noti il decorso dei fasci. Oc. 8. obb. semiap. imm. omog. $^1/_{15}$ Koristka. Proiezione a livello del tavolo del Microscopio. Fissazioue Flemming. Colorazione Saffranina Pfitzner.

**Fig. 5ª** — Cordone cellulare epiteliale. Si nota la forma a cuneo. Esso segue il decorso dei fasci, pur divaricandoli. Le cellule che lo compongono sono chiare. Presso alla sua origine esterna, gli elementii dell'epitelio germinativo sono caratteristicamente incurvati e presentano un piede sottile. Oc. 4. comp.; obb. $^1/_{15}$ imm. omog. Proiezione a livello del tavolino del Microscopio. Tubo mezzo evaginato. Le particolarità dello stroma e dei nuclei cellulari furono osservate e in parte disegnate con Oc. 8. comp. e lo stesso obbiettivo. Fissazione Hermann. Colorazione Saffranina Pfitzner.

**Fig. 6ª** — Cellula isolata, proveniente dall'epitelio germinativo di ovaia adulta giovane. Si trova ancora nella cosidetta Albuginea. La freccia disegnata vicina indica la posizione dell'epitelio germinativo esterno. Oculare 8 comp.; obb. imm. omog. apocrom. $^1/_{16}$. Tubo tutto evaginato. Proiezione tavolo di lavoro. Fissazione Flemming. (Benda); colorazione triplice del Flemming.

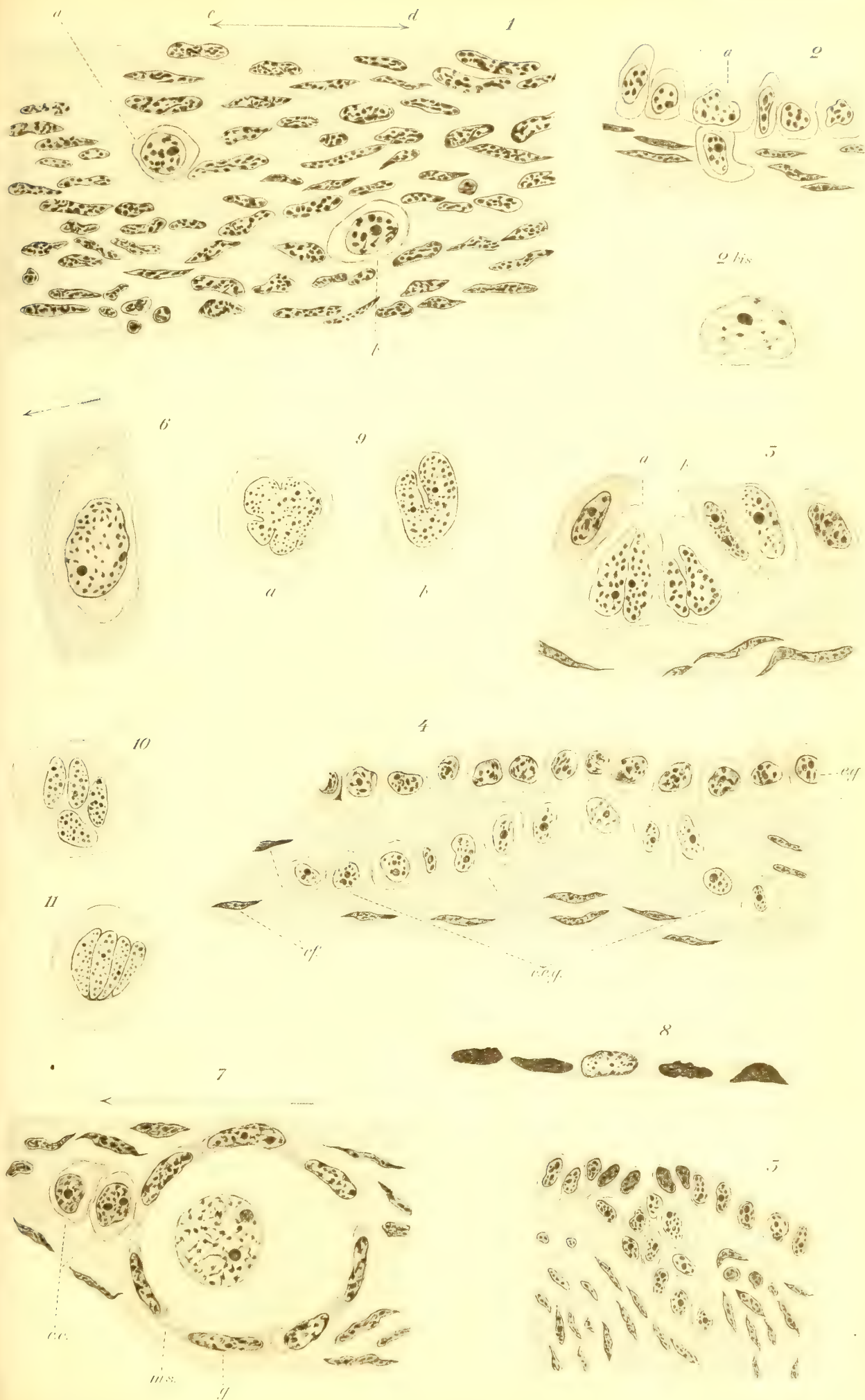
**Fig. 7.** — Follicolo ovarico giovanissimo, da un'ovaia di Coniglia di circa tre mesi d'età, *g.* granulosa primitiva. *m. s. membrana folliculi basilaris*: *c. c.* due cellule « chiare » discese dallo epitelio germinativo. Si vedono già a contatto col follicolo. Si noti il colorito ormai più oscuro. La direzione della freccia, segnata superiormente, indica la posizione dell'epitelio germinativo. Gli elementi *c. c.* sono destinate all'edificazione della *theca follicularis*. Si trovano in corrispondenza di uno dei poli del follicolo. Oculare 8; obbiettivo imm. omog. semiapocromatico $^1/_{15}$ K. Disegno a livello del tavolo del M. Fissazione in Flemming.—Benda; colorazione triplice Flemming.

**Fig. 8ª** — Breve tratto di epitelio germinativo. Ovaia Coniglia giovane adulta. Le cellule sono in stadio più o meno avanzato di degenerazione. Entro lo stroma, direttamente sottostante, esiste un follicolo ovarico in sviluppo avanzato. Oculare 8 comp.; obb. imm. omog. $^1/_{15}$. Tubo evaginato. Fissazione: Flemming-Benda. Colorazione: Ematossilina ferrica.

**Fig. 9ª** — Cellule dell'epitelio germinativo di ovaia di coniglia giovane con nucleo polimorfo (*a*) e in principio di scissione (*b*). Oculare 8 comp. obb. semiap. imm. omog. $^1/_{16}$. Tubo evaginato. Disegno sul tavolo di lavoro. Fissazione Hermann. Colorazione Saffranina Pfitzner.

**Fig. 10ª** — Cellula dell'epitelio germinativo. Ovaia di coniglia giovane. Nucleo in scissione multipla (frammentazione). Ingrandimento, fissazione e colorazione come per la figura precedente.

**Fig. 11ª** — Cellula dell'epitelio germinativo, di poco approfondita nello stroma. Ovario coniglia giovane. Mostra una speciale forma di frammentazione nucleare. Ingrandimento, fissazione, colorazione come sopra.

B. Monterosso del. d. v.

Istituto di Anatomia, Fisiologia comparate e Zoologia della R. Università di Catania

**BRUNO MONTEROSSO**

Aiuto e Libero Docente

# Ulteriori ricerche sull'intima struttura dell'ovaia dei Mammiferi

## NOTA II.

## Sui fenomeni di spostamento di alcune formazioni del parenchima in mezzo ai fasci connettivali della stroma ovarico nella Coniglia.

Contributo alla conoscenza dei fattori meccanici nell'evoluzione metembrionale dell'ovaia.

**(Con una tavola e 2 fig. nel testo).**

# RELAZIONE

della Commissione di revisione composta dai soci effettivi
Proff. R. STADERINI e A. RUSSO (*Relatore*).

L'autore, già in altro precedente lavoro, ha sostenuto che i fasci connettivali, costituenti lo stroma ovarico, tendano a conservare un decorso parallelo, per quanto sovente e variamente accidentato, e che gli spazi (virtuali), interposti ai fasci stessi, costituiscano luoghi di minor resistenza e per ciò appunto siano le vie onde si incanalino e si distribuiscano le varie formazioni del parenchima.

Nel presente lavoro applica tale veduta al tessuto che si forma nell'atresia follicolare, dimostrando negli elementi di questo, speciale capacità di movimento, in dipendenza di una supposta elasticità dei fasci connettivali — Riteniamo il lavoro degno d'essere inserito negli Atti accademici.



1. È noto che nei mammiferi, durante tutta la vita, ma in ispecial modo poco avanti lo stabilirsi della pubertà, un numero non indifferente di follicoli ovarici va incontro a svariati processi di degenerazione. Sui quali ormai la letteratura è così ricca di notizie, da apparire fallace la speranza di poter fare in proposito qualche nuovo reperto d'un certo valore. Ciò non ostante, l'intimo determinismo del fenomeno è del tutto sconosciuto, ed

è molto variamente interpretato, perchè ancora oscuro, il fine estremo delle produzioni derivanti dalle singole modalità di involuzione follicolare.

Su quest' ultimo argomento, credo aver portato, col presente lavoro, un piccolo contributo, diretto non tanto ad illuminarne un particolare, ma anche e sopratutto a fornire un criterio all' investigazione di molteplici altre attività degli elementi ovarici; attività, che vanno intimamente connesse colle proprietà di essi elementi e in special modo coll' intima struttura dell' ovaia.

2. Il materiale, di cui ho disposto, consiste in un numero veramente rilevante di ovaie di coniglie, sacrificate in tutte le età; ho sempre avuto speciale attenzione di portare le mie ricerche sugli organi di individui normali, pur giovandomi di larghi confronti, fatti su ovaie di animali in condizioni fisiologiche peculiari (in calore, in gravidanza) o sottoposti a trattamenti sperimentali (digiuno, ipernutrizione). Tali confronti mi son serviti per avere un' idea più larga del fenomeno, che mi accingo a descrivere; ma mi preme dire subito che nel presente lavoro considero soltanto organi normali di coniglie adulte e specialmente giovani, uccise durante i mesi d'agosto ad ottobre (periodo generalmente di riposo sessuale nei nostri climi) o poco avanti la pubertà.

L' ovaia dell' animale, appena ucciso, veniva rapidamente ed accuratamente tagliata con affilato rasoio in fettine, e immersa nel fissatore. I liquidi all' uopo adoperati, nonchè il tempi d' immersione sono stati appositamente de' più varii: dalle soluzioni d' uso generalissimo (sublimato, alcool ecc.) alle miscele più delicate (liq. Hermann, Flemming, Benda); altrettanto dicasi per i coloranti usati. Ho disposto di sezioni spesse da 1 a 14 μ, tratte però sempre da pezzi imparaffinati.

3. Quando un follicolo primordiale o giovanissimo viene aggredito da quel processo di degenerazione, che prima lo Slawianskj e poi il Kölliker chiamarono col nome di atresia, processo che non bisogna mai confondere con la formazione del corpo luteo; uno degli organi che ne risentono precocemente gli effetti, è rappresentato dalla cosidetta ***theca*** (o tunica propria).

Ho tentato di dimostrare in altro lavoro (1918) che gli elementi istologici della teca non si formano in essa, ma derivano da cellule provenienti dall' epitelio periferico dell' ovaia, in seguito ad attiva proliferazione di alcune sue parti. Esse cellule si avvicinano al follicolo gradatamente, sicchè sono ancor poco numerose nell' ultimo periodo di quello stadio che si è chiamato primordiale, e nei primi dello stadio che si è detto giovanissimo. Ciò nel normale. Il follicolo invece che, per cause a noi ignote, e non facilmente investigabili, ma per certo molteplici, si dispone alla degenerazione (atresia), presenta un' abbondanza notevole di codesti elementi istologici; tanto che il Paladino 1887 — a parte la confusione tra follicolo atresico e corpo luteo — basandosi su tale particolare, distinse questo primo momento col titolo di " periodo preparatorio della neoformazione lutea. "

Sembra assodato dunque che gli elementi destinati a trasformarsi in cellule tecali accorrano in quantità maggiore e con precedenza sensibile verso i follicoli in involuzione. Non ci nascondiamo la probabilità che a tale fenomeno concorra in maggiore o minor parte il moltiplicarsi ***in situ*** delle cellule tecali stesse, le quali, com'è noto (Paladino 1887 e altri) hanno la proprietà di dividersi per cariocinesi.

Un altro fenomeno che accompagna e determina sempre la formazione della theca folliculi, consiste nel disporsi delle fibre di connettivo concentricamente attorno al follicolo. Ora, tale particolarità, nei follicoli giovani e giovanissimi, che s' avviano alla degenera-

zione si manifesta, in modo costante, più precocemente, e si estende ad un tratto di tessuto molto più ampio che non sia nel normale. A questo proposito è bene ricordare che la teca va considerata sotto due aspetti: in primo luogo come una modificazione morfologica del tessuto fascicolare connettivo attiguo al follicolo; in secondo, come una forma strutturale di nuova costituzione, in quanto sono intervenuti elementi specifici (cellule tecali) che hanno assunto peculiari caratteri e funzione determinata.

Orbene, questa doppia manifestazione, nei follicoli che si dispongono all' atresia, interessa un'estensione maggiore.

4. L'ovocite frattanto e la granulosa primordiale iniziano e proseguono un processo di involuzione che qui non è il caso di esporre nemmeno succintamente, anche perchè da diversi Autori in differenti gruppi di Vertebrati, e sopratutto nei Mammiferi, è stato ampiamente studiato (Von Baer, Valentin, Beulin, His, Kölliker, Paladino, Crety, Benkiser, Schottländer, Sobotta, Von Winiwarter e Sainmont, Popoff ed altri).

Mi interessa notare soltanto che l'ovoplasma va sempre più diminuendo di quantità e finisce in seguito collo scomparire del tutto. Invece la membrana follicolare (m. basilaris o di Slawiansky) subisce una modificazione caratteristica, che la coglie nella sua estensione completa. Essa, cioè, come fu già notato, non solo nei follicoli atresici, ma anche in quelli da cui provengono i corpi lutei (v. Winiwarter e Sainmont 1910), gonfia, diventa, per dir così, tumefatta, abbandona la forma sferica per assumerne una sempre più irregolare (Fig. 1ª della Tavola) mentre, man mano, va mutando il suo comportamento di fronte a' liquidi coloranti (1).

Senza poter darne la più lontana ragione, difatti, osservo che in molti casi, indipendentemente della fissazione, eseguita con liquidi diversi e della colorazione, fatta usando prodotti molto varii, essa tende a mantenere una tinta gialla speciale che comincia a notarsi nelle sezioni, tratte particolarmente da pezzi fissati in miscele osmiche, e prima ancora d' essere sparaffinate.

Eccezionalmente però, invece di ingrossarsi, la detta membrana fin dall' inizio del processo di degenerazione follicolare si discioglie e sparisce del tutto in breve tempo.

La granulosa, a sua volta, non tarda a dissolversi e i suoi elementi a scomparire (2).

Nel seguito del processo, la membrana di Slawiansky, or più che mai gonfia, e a struttura omogenea, si lacera, sicchè nelle sezioni apparisce come un cerchio rotto in uno o più punti della sua circonferenza (Fig. 2ª della Tavola). Il contenuto di essa, rappresentato nelle sezioni e fin dai primi momenti dell' involuzione, da un coagulo più o meno omogeneo o da un ammasso di cellule in degenerazione (cfr. Fig. 1ª), finisce con l' essere riassorbito.

Così si chiuderebbe la prima fase del fenomeno, sulla quale parmi che più esatto

---

(1) A questo proposito non va taciuto che, siccome, in linea generale, analogo comportamento si può notare nella zona pellucida, molti autori pare abbiano confusa questa con quella. Secondo me la distinzione invece si può fare agevolmente, tenendo presente l' ampiezza del circolo rappresentato dalla membrana ingrossata nonchè i particolari di struttura dei tessuti circostanti.

(2) Credo fuor di luogo, qui, accettando questa idea, sostenuta già da parecchi Autori, giustificare perchè rigetto la teoria opposta, anche essa convalidata dall'autorità di esimii osservatori, secondo la quale le cellule della granulosa si trasformerebbero e prenderebbero parte all'edificazione del tessuto che sostituirà la formazione follicolare, andata distrutta come tale. Credo che la questione sarebbe stata già da tempo e concordemente soluta se i ricercatori avessero, come ben a proposito avvertono il Von Winiwarter e Sainmont 1908, tenuto criterii più scrupolosi nel distinguere i follicoli atresici dai corpi lutei.

contributo che altri non abbia fatto, ha portato il Beulin 1877. Ormai, rimasta vuota o quasi e affetta da più soluzioni di continuità (Fig. 2ª), la membrana di cui è discorso, si affloscia, spesso si chiude in sè stessa, ovvero si ripiega in modo da apparire—nei tagli — a forma della lettera U, di forcella o della lettera V, o anche della cifra 1. Per vero, tali aspetti sono sempre varii e molteplici, sicchè sarebbe ozioso voler ricordarli od anche soltanto enumerarli.

Tralasciando per ora lo studio di essa membrana, volgiamoci ad osservare da vicino gli interessanti fenomeni, che fin dal principio del processo si avverano nella teca.

5. Le cellule tecali, lo ripeto, sono in quantità rilevante, nei follicoli esaminati all' uopo. Esse veramente non hanno assunto nei follicoli giovani di cui unicamente vogliamo ora occuparci, quello sviluppo che caratterizza in esse medesime lo stadio avanzato, durante il quale esplicano indubbiamente una funzione secretoria.

Laonde, per certi caratteri conservano evidente somiglianza con le cellule componenti i cosidetti cordoni epiteliali da cui le facciamo derivare, come è stato esposto in altro lavoro (1918). Hanno difatti generalmente forma pressochè ovale, ma a contorno non sempre perfettamente regolare (fig. 1). Il protoplasma, mediocremente colorabile non è molto abbondante ed appare omogeneo, fornito di qualche granulo di sostanza metaplasmatica, o piuttosto di massettine amorfe colorabili sopratutto con l' Ematossilina Ferrica in sezioni ottenute da pezzi fissati con miscele osmio-cromiche; in seguito, cioè coll' inoltrarsi della degenerazione follicolare, i granuli appaiono in forma di sfere evidenti, più o meno numerose e accumulate in maggior quantità ai poli della cellula, che è quasi sempre, ancora ovale (fig. 2). Ulteriormente, e spesso tuttavia in questo periodo, vengono a manifestarsi le prime formazioni di natura lipoidea (fig. 2 e 3).

Il nucleo è di regola ovale, piuttosto grande, con granuli di cromatina sparsi, piccoli, ben colorabili; dei quali uno, che fu notato come costante dallo Zalla 1907, e talvolta anche due, ha preso la forma di un corpuscolo piuttosto sferico, se pure a contorno non del tutto regolare e di dimensioni, relativamente agli altri, vistose. Inoltre mostrandosi avido di sostanze coloranti basiche, è quasi sempre facilmente visibile: per tutte queste ragioni credo poter considerarlo addirittura come un nucleo nucleinico.

Osservate così le singole cellule, è d' uopo considerar la massa che l' insieme di esse costituisce.

In un primo momento, infatti, tali elementi si dispongono come abbiamo visto nella Fig. 1, tutto attorno al follicolo, in modo da occupare uno spazio che nelle sezioni è pressochè circolare. Ma, procedendo l' iniziata involuzione del follicolo, essi sempre più si stringono attorno alla membrana di Slawiansky, sicchè, non appena in questa, come è stato detto, si manifesta una soluzione di continuità, dette cellule, penetrando per l'apertura stessa, occupano, in parte o completamente, la cavità delimitata appunto dalla membrana in parola, contribuendo forse a farne scomparire più celermente e più compiutamente, se non altro per via dell' azione meccanica che siffatta irruzione determina, le cellule follicolari e l' oocite (1).

(1) Von Winiwarter e Sainmont, che hanno osservato la scomparsa dell' oocite per assorbimento dell'ooplasma, riferiscono il fenomeno all' attività dell' elemento connettivale che, secondo loro, sarebbe l' unico a penetrare nei follicoli in atresia. È vero del resto che primi a penetrarvi sono dei fasci connettivi, ma questi possono essere seguiti dalle cellule tecali, in numero generalmente, mediocre.

Non è nostro compito, perchè non rientra necessariamente nel piano di questo lavoro, seguire, per ora, le modificazioni che subisce l' ooplasma, il quale generalmente si riassorbe subito, insieme con la zona pellucida; e tanto meno possiamo occuparci di proposito del destino cui vanno incontro le cellule follicolari ancora presenti. Certo si è che in questo stadio nell' interno del follicolo si può vedere ogni sorta di elementi: cellule connettivali dello stroma con le relative fibre, cellule tecali, leucociti e, financo, elementi del tessuto cosidetto interstiziale, provenienti da altri punti dello stroma.

Allora la membrana di Slawiansky, già, diremo così, sbrindellata, si deforma ancor più. Nelle sezioni in serie, con uno studio attento e quindi con una rigorosa ricostruzione mentale si può seguire dall'inizio tutto lo svolgersi del fenomeno : il fendersi della membrana follicolare, l' allontanarsi dei lembi, l' appiattirsi di essa. Ma in un' unica sezione in tale stadio si nota una semplice linea ondulata, terminata ad una o a tutte due le estremità da una curva non sempre accentuata, sebbene evidente (confrontare la fig. 3). Va da sè che quando la membrana presenta più fessure, in sezione si mostra come un segmento interrotto in più punti.

Questa membrana poi, lungo i lati è fronteggiata da un accumulo di cellule, aventi caratteri più o meno identici a quelli dianzi descritti, ma ancor più stipate.

6. Tutto quanto sopra è stato detto, va inteso in senso generale e quasi schematico; giacchè spesso il fenomeno non si svolge proprio in questi termini; allora la variazione non può essere costretta in un tipo determinato dall' inizio alla fine. Darò, a modo d' esempio, una delle forme più frequenti: La membrana di Slawiansky, chiudendo ancora nel suo interno una sostanza piuttosto omogenea, disseminata talvolta da nuclei e cellule in degenerazione e da altri prodotti di involuzione (sferule di grasso), provenienti anche e in maggior parte dalla dissoluzione dell'ovoplasma, non si rompe, ma si schiaccia, come se fosse stata compressa entro due piani paralleli, che tendessero avvicinarsi. Non tardasi, anche in questo caso, a vedere del tutto scomparire i ricordati elementi di degenerazione e, compiendosi frattanto il processo di compressione, la membrana, tumefatta sempre, assume un aspetto che, meglio di ogni descrizione possono rappresentare gli schizzi schematici qui a lato riprodotti (Fig. I dalla *a* alla *f*).

**Figura I** (schematica)
*Spiegazione nel testo*

Come si comprende agevolmente, da questo esempio e da quello precedentemente e brevemente descritto, e da tutte le varie altre forme che ho visto numerosissime e che mi risparmio financo di enumerare, risulta evidente un carattere costante : la membrana si appiattisce, tende cioè a svilupparsi o semplicemente a piegarsi, su di un piano orizzontale. Di tale reperto vedremo in seguito il valore.

7. Va messo anche in evidenza subito, che le cellule tecali intervengono in tutto il cennato processo, solo in quanto esercitano un'azione meccanica, anch'essa del resto poco sicura, sulla formazione follicolare in involuzione. Di fatti, le modificazioni di natura cito-

logica e strutturale sono in esse per ora quasi nulle, se se ne tolga la comparsa delle sostanze metaplasmatiche, e specialmente dei granuli lipoidi, sebbene ad ogni modo, tantò le une quanto gli altri, si sarebbero quasi ugualmente formati, in esse, anche se il follicolo non fosse degenerato. Quello invece che più facilmente si mette in evidenza e che costituisce, secondo me, il reperto più interessante, fra quelli riportati in questo lavoro, riguarda, diremo così, il dinamismo delle cellule tecali.

Sta di fatto che, mentre la membrana di Slawiansky subisce il cennato processo di appiattimento, l'accumulo di cellule tecali, già quasi sferico (vedere Fig. 1) tende sempre più ma gradatamente ad assumere forma ovale, (Fig. 2 e 3). Cosicchè uno dei due diametri perpendicolari, che si possono mentalmente tracciare nell'ammasso primitivo degli elementi tecali, si allunga maggiormente, mentre l'altro si raccorcia. Tale particolare intravisto da alcuni Autori è stato espresso con la massima evidenza dal Popoff 1911, quando ha scritto « Le faux corps jaune atrésique pert ainsi sa forme primitive: d'arrondi qu'il était, comme le follicule, il s'étire, s'aplatit, pour mieux s'adapter à la place qui lui est ménagée. „

Molti altri Autori hanno del resto più o meno vagamente accennato a tali formazioni o alla figura, che nell'insieme esse dànno. Il Cristalli 1902-1903 ha notato, intorno al follicolo, l'accumularsi di speciali elementi, a costituire la cosidetta da lui " Zona di riserva „ e riconosce diverse forme all'accumulo. Certo egli si riferisce alle cellule tecali, ma i follicoli, che furono oggetto delle sue ricerche erano in via di trasformarsi in corpi lutei. Forse potremmo trovare maggior evidenza nella descrizione data dal Pinto 1905, il quale, nell'ovaia gravidica, ha visto che " un gran numero di follicoli atresici vengono a trasformarsi in ammassi solidi di tessuto epitelioide che si sperde senza confini nello stroma ovarico circostante. „ Va ricordato che secondo l' Autore le cosidette cellule epitelioidi hanno origine dalla teca. Recentemente anche il Levi 1913 ha osservato nella Cavia il residuo del follicolo atresico essere rappresentato esclusivamente da cellule provenienti dalla teca interna, ma non si estende a parlare dello speciale comportamento del loro insieme. Secondo il Popoff 1911, la cui affermazione ho potuto spesso confermare esatta, quando il follicolo comincia a degenerare, la teca si divide in tanti " nidi cellulari „ (vedere fig. 1). Tale aspetto va interpretato, come ho potuto rilevare dalle sezioni in serie, così : gli elementi della teca si raggruppano, si ordinano, e scivolando lungo i fasci connettivali, cominciano a formare delle *correnti*, per dir così, secondarie che poi, disponendosi le une accanto o dietro alle altre, costituiscono, nell'insieme, come una *corrente* unica. È chiaro dunque che, contrariamente all'idea accennata dal Popoff 1911, gli elementi della teca generalmente non si disaggregano, nel vero e proprio senso della parola, in modo cioè da disperdersi come mostra pretendere anche il Pinto 1905; invece prendono un nuovo assettamento.

Difatti, se noi seguiamo più attentamente e nel suo ulteriore evolversi, il processo, donde l'abbiamo lasciato, vedremo che lo insieme delle cellule tecali, dopo aver assunto una forma ellissoidale sempre più allungata (Fig. 4), finisce col trasformarsi in un vero e proprio cordone lungo, talvolta lunghissimo, i cui estremi sono appuntiti, giacchè spesso mentre il resto è costituito da più file di cellule, essi estremi del cordone vengono rappresentati da una fila semplice, o quasi, di elementi. Confrontando il calibro di questa peculiare formazione con il diametro di quella riprodotta nelle fig. 1, 2, 3, mal ci adatteremmo a considerarle identiche, se non avessimo potuto trovare tutti gli stadi intermedii.

8. Ai lati della zona cellulare or descritta, il connettivo, che costituisce lo stroma ovarico, conserva la struttura filamentosa, messa in evidenza dallo scrivente in altro lavoro (1918), e si modella appunto su la cosidetta " corrente cellulare „ o, se lo si vuol più esattamente indicare, su questo cordone così formato, frammezzo agli elementi del quale penetra tuttavia. Così viene ancora una volta a confermarsi la sua qualità di tessuto eminentemente plastico, o, come or ora si vedrà, elastico (1).

Un'altra osservazione ho potuto fare: l'allungamento dell' ammasso cellulare (fig. 2 e 3) o, se meglio piace esprimersi, la direzione della *corrente* cellulare, si determina in corrispondenza di ciascuno di quei due speciali punti del tessuto perifollicolare che vengono chiamati *ilo*, cioè di quei punti da cui pare si irradiano i fasci connettivali che abbracciano la formazione follicolare (cfr. fig. 1) come io stesso ho cercato di illustrare in altro lavoro (Nota I, 1918).

Al solito, in nessun momento di un processo involutivo, i fenomeni specifici seguono un unico tipo, del tutto invariabile; al contrario non poche modificazioni si possono osservare. Io ne tralascerò la minuta descrizione, accennando solo a questo: la corrente cellulare talvolta rimane compatta e indivisa, tal'altra invece, in un tempo più o meno breve e quindi può dirsi precocemente, si scinde in due o più correnti secondarie, biforcandosi anche ad una o alle due estremità, ovvero dando luogo, in diversi suoi punti, a diramazioni, le quali spesso sono parallele alla direzione dei fasci connettivi dello stroma stesso che le abbraccia, ma possono anche essere perpendicolari o trasversali rispetto a questa.

Fenomeni simili a questi hanno messo in evidenza non pochi Autori, fra cui Paladino 1887, Bühler 1894, Zalla 1907, occupandosi dei cosidetti tubi corticali o midollari dell' ovaio e seguendoli nel loro andamento in seno allo stroma. Essi si sono mostrati concordi nell' affermare l' esistenza di un doppio movimento contemporaneo, d' un compenetrarsi, delle formazioni cennate entro lo stroma e dello stroma connettivo entro le formazioni avanzantesi; tale incastramento, così, è prodotto, e a sua volta produce, gittate connettive da una parte ed epiteliali o parenchimatiche dall' altra.

Noi, per il nostro caso, pur non escludendo assolutamente una partecipazione diretta

(1) In questo, come già in altri punti ho chiamato plastico lo stroma ovarico, assegnando all'epiteto un significato non del tutto preciso. E ciò per il carattere peculiare del tessuto stesso. La fisica definisce come *plastico* un corpo che si può modellare, cioè che si deforma sotto l' azione di una forza, conservando però la modificazione subita. Nel caso nostro, e riferendoci anche a quello che fu detto in un altro lavoro (1918), la parola appunto significa che l' ovario non è fisso nella sua forma complessiva o in quella delle parti che lo compongono, ma subisce, nell' una e nelle altre, delle modificazioni non solo nella struttura, ma anche nel rapporto reciproco di posizione, in dipendenza di forze varie, inerenti alla funzione, e, comunque, alla vita di esso. La nostra definizione non deve però pregiudicare la durata della deformazione, nè i metodi con cui si ottiene; a noi non interessa volta per volta ricercare se e quanto debba durare l'effetto prodotto dalle azioni deformanti; solo sappiamo che questo non è permanente; solo sappiamo e vogliamo mettere in evidenza che la regione deformata può assumere, quando che sia, nuovamente, la forma o la posizione primitiva o una simile o vicina. Secondo questo ultimo concetto dunque il tessuto ovarico potrebbe chiamarsi *elastico*. Terremo sempre conto però che così l' accezione « elastico » non è antitetica dell' accezione « plastico », in quanto le proprietà indicate da queste due parole sussistono e coesistono per lo stesso tessuto.

Aggiungo ancora che questo concetto della mancanza di fissità morfologica nell' ovaia, ove convenientemente sviluppato e partitamente applicato ai varii tessuti dell' organo, potrebbe essere fecondo di vedute e risultati nuovi, specie se messo in rapporto con la « plasticità fisio-morfologica » per così dire, che, trovata e messa in evidenza dal Russo, è stata da lui stesso ampiamente dimostrata e posta a partito in ricerche ed esperimenti importantissimi, riguardanti in special modo la struttura dell'ovocite. (Cfr. tra le altre le memorie del 1906 e 1907).

degli elementi connettivali, alla costituzione di quei rami sopradetti della *corrente* cellulare (giacchè anche il connettivo si accresce) riteniamo per certo che la causa del formarsi di questi va interpretata in altro modo. Difatti, siccome le cellule tecali di cui ci occupiamo, scivolano lungo i fasci connettivali, qualora, più o meno bruscamente, i fasci stessi mutano direzione, degli elementi in migrazione, alcuni seguono il nuovo cammino, altri, per così dire, scavalcando il gomito che si trova in quel punto, prendono un indirizzo diverso. Con ciò si spiegherebbe anche il fatto or ora significato, che qualche diramazione della *corrente* può essere perpendicolare ai fasci che la circondano.

Vedremo meglio in seguito che devesi allo sviluppo di forze tangenziali, agenti sul-l'ammasso delle cellule che già hanno assunto il carattere di elementi tecali, l'effetto di farle avviare e disporre in modi diversi.

9. Fin a questo momento, la membrana follicolare può ancora rintracciarsi. Essa per vero, mentre la *corrente* cellulare è andata organizzandosi, si è estremamente appiattita, ovvero si è maggiormente frammentata; ma è rimasta immersa in quella. Però man mano che l'ammasso cellulare si allunga e si assottiglia, la membrana si vede sempre più vicina ad uno degli estremi della *corrente*, finchè, seguendo un processo continuo e graduale, si finisce col constatare che le cellule tecali si sono spinte avanti, laddove il residuo, ormai addirittura ridotto e in via spesso di dissoluzione, della membrana di Slawiansky, resta isolato e indietro (fig. 4).

Se dunque alcun dubbio potesse concepirsi sulla capacità di movimento delle cellule tecali, basterebbe a farlo scomparire l'osservazione della Fig. 4. Come altrimenti potrebbe spiegarsi la posizione or ora indicata della membrana di Slawiansky, se non ammettendo che il progressivo avanzarsi della *corrente* di elementi tecali, sia stato seguìto, diremo quasi, con minore velocità, da essa? Certo, nei preparati microscopici, solo degli indizii possono indicarci l'affermato movimento, il quale per ciò stesso è stato del tutto sconosciuto o trascurato dagli Aa. precedenti.

10. Di sicuro, se in questo lavoro a me compete parlare sopratutto delle cellule tecali, non posso trattenermi dal dichiarare che lo studio di esse in fondo mi è valso per mettere in evidenza la *capacità* di spostamento di organi del parenchima, in mezzo al tessuto dello stroma ovarico. Per vero, se in base a' fenomeni descritti, per citar soltanto qualcuno, da Paladino 1887 e da Bühler 1894, è chiaro che, alcune formazioni istologiche del-l'ovaia — tubi di Pflüger, cordoni midollari, ecc. — penetrando nello stroma, dànno a vedere una speciale permeabilità dello stroma stesso, questa implica necessariamente la possibilità di movimento in esse. Lo stesso si dica di quanto diversi Aa. han visto o creduto di vedere a riguardo dello approfondirsi delle ova, man mano si formano in mezzo alle cellule dell'epitelio germinativo. In tutti questi casi è stata supposta, se pur non dimostrata una specie di *vis a tergo*, dovuta al continuo svilupparsi di sempre nuovi elementi che incalzano i primi apparsi. In ogni modo, generalmente si è evitato di ammettere, anche come ipotesi provvisoria, che tale movimento sia dovuto ad attività interne, della cellula, e ci meravigliammo apprendendo come il Coert nel 1898 (citato da Von Winiwarter 1901) ritenga che da speciali ispessimenti dell'epitelio germinativo si distacchino gruppi di cellule, in seguito a movimenti attivi di esse; anzi a questo proposito ripetiamo le parole che il Von Winiwarter 1908 scrisse (parlando delle cellule interstiziali): *Dass diese Zellen wirklich Bewegungen auszuführen fähig sint, scheint mir sehr unwahrscheinlich* Altri Autori, come il Levi 1913, non dànno a capire di qual sorta di movimento intendano

parlare. Egli difatti, nella formazione del corpo luteo, vede che " qua e là qualche cellula tecale si insinua fra gli elementi follicolari seguendo la via tracciata dalle fibrille connettive che penetrano di già.... nella parte più periferica del follicolo. „

11. Or, se noi cerchiamo di dare un significato più preciso alla natura del movimento osservato nella *corrente* delle cellule tecali, dobbiamo, in base alle osservazioni fatte, ricostruire nel seguente modo tutto il processo che siamo andati descrivendo: Il follicolo, a causa della degenerazione cui va incontro, perde la innegabile forza meccanica (forza che possiamo chiamare " di turgore „) di cui è fornito normalmente per opporsi alle molteplici cause di deformazione, dovute, in primo luogo al bisogno suo intrinseco di occupar sempre maggior spazio con l'aumentare di volume, e in secondo luogo, alle pressioni che gli altri elementi vicini (corpi lutei, cordoni epiteliali, cellule interstiziali), nell' atto del formarsi o durante il loro accrescersi, producono, direttamente su di esso, o indirettamente per via del tessuto interposto, al quale non si può assolutamente negare, sia pure *a priori*, una certa consistenza ed elasticità (1).

Perduta cotal forza, il tessuto connettivo circostante inizia, per dir così, un movimento di assestamento. Non devesi dimenticare — e lo ripeto ancora — (vedere Nota I, 1918) che ogni follicolo è incastrato in seno a un insieme di fasci connettivi che divaricandosi, appunto per la presenza del follicolo stesso, lo chiudono come in un mantello di fibre che si irradiano dai due punti detti poli, già più volte ricordati con altro nome (ilo) (2).

---

(1) Che il connettivo generi una forza agente sul follicolo, si può facilmente ammettere, osservando che nei follicoli giovanissimi e anche primordiali le cellule della granulosa primitiva, che si trovano in corrispondenza dell' ilo son quasi sempre più voluminose e hanno figura più rotondeggiante delle altre site nei diversi punti della periferia esterna della membrana basilare (Fig. II). Ciò non richiede ulteriore spiegazione, qualora si tenga presente che in questi punti (ilo) i fasci connettivi che circondano il follicolo hanno direzione non perpendicolare, ma quasi parallela, a quella, secondo cui si accresce la cellula; mentre in tutte le altre regioni queste due direzioni sono perpendicolari. La figura semischematica qui di contro può bene significare tale concetto. Del resto, un esempio di forze meramente meccaniche, esercitantisi scambievolmente tra le varie formazioni dell' ovaia, in mezzo e con l' intermediario dello stroma, si ha nella seguente comunissima constatazione: spesso si trova un ammasso di cellule interstiziali molto sviluppato (come avviene in certi stadii dell' ovaia gravidica) ovvero un corpo luteo in accrescimento, spintisi presso alla periferia dell' organo e separati dall'epitelio germinativo per via soltanto della cosidetta albuginea. Allora i follicoli — specie se primordiali — che si trovano tra la formazione in parola (C. luteo o glandula interstiziale) e l' epitelio esterno, assumono una figura ovale molto allungata come se fossero stati schiacciati da due piani paralleli fra di loro e all' epitelio esterno. Come è noto (vedere l' altra nota in questo stesso volume) l' albuginea è costituita da fasci diretti secondo la linea periferica dell'ovaia. Orbene, l' asse maggiore dei follicoli così deformati, corre nella stessa direzione. Ed ancora a parte il significato che egli vi dà, può ricordarsi l' osservazione del Mac Leod 1880, secondo il quale in *V. Pipistrella* le cellule della *tunica propria folliculi* sono tanto più appiattite per quanto più vicine al follicolo.

**Figura II** (semischematica)
*Spiegazione nel testo*

(2) Per avere una rappresentazione esatta dei rapporti tra il follicolo e lo stroma, si introduca un corpo sferico in una matassa composta di fili di refe e si pensi alla disposizione che assumeranno i fili adiacenti al corpo.

Or, per la presenza di fibre di natura elastica messe in evidenza nell' ovaia da qualche Autore (Sirena 1903) e di natura muscolare (Buhler 1894, V. Winiwarter 1900, Rouget 1858, Aeby 1859), sulle quali uno studio più accurato potrebbe portare nuova e utilissima luce, nonchè per una probabile proprietà dei fasci connettivi perifollicolari, consistente nella tendenza a riprendere la forma primitiva, cessata l' azione deformante (vedere sopra); dobbiamo ritenere che, degenerando il follicolo, scomparendo cioè i materiali ovoplasmatici; distrutte le cellule follicolari; venga a cessare la ***vis interna*** (forza di turgore) permettendo agli elementi del tessuto circostante al follicolo, di riavvicinarsi (1). L' azione spiegata in questo caso da essi di conseguenza si eserciterebbe dapprima sull'ammasso di cellule tecali, le quali sollecitate dalle or dette forze tangenziali, trovano verso il follicolo minor resistenza, lo comprimono e occupano lo spazio lasciato per ciò stesso libero. Come si è visto, se la membrana di Slawiansky offre soluzioni di continuità, queste penetrano, tutte o in parte, nell' interno di essa; in caso diverso, si limitano a schiacciarla, stendendola in un piano ideale, normale alle forze provenienti dai fasci di connettivo, (vedere le direzioni delle frecce segnate nella figura semischematica a pag. 9).

È logico che, subito dopo, ridotto il follicolo alla sola membrana, le cellule tecali costituiscono un ammasso pieno, solido. Intanto, la forza di compressione dei fasci connettivi, continuando a manifestarsi; dette cellule sono sollecitate a scivolare lungo questi fasci stendendo nel senso della lunghezza la figura d' insieme, secondo una direzione quasi perpendicolare all' azione della forza stessa, e finalmente si costituisce un cordone più o meno lungo. Pare che il residuo della membrana, per la sua forma allungata, e forse anche per la sua consistenza fisica, sia meno adatto a siffatto movimento, e per tale ragione, ad un certo punto, viene lasciato indietro, mentre le cellule che prima lo circondavano continuano ad avanzare.

È superfluo forse aggiungere che il decorso delle fibre connettivali, in certi punti almeno, non diventa perfettamente parallelo; a ciò devesi il fatto, già precedentemente notato che si determinano dei bracci secondarii nella corrente.

12. Riassumo in poche parole, anche per darne uno schema, il descritto fenomeno:

1.) Quando un follicolo primordiale giovanissimo o giovane degenera (atresia), lo spazio da esso già occupato, vien riempito dalle cellule tecali, che lo circondavano mostrandosi, fin dall' inizio del processo, in quantità maggiore del normale.

2.) L' insieme di tali cellule, dapprima ha forma sferica, poi ovale, quindi di fuso, in ultimo di lungo cordone semplice o poco o molto ramificato.

3.) Siffatte deformazioni si possono far dipendere, fino a prova contraria, dall'azione di forze tangenziali, che si esercitano sull'ammasso delle cellule tecali e che sono suscitate dalla elasticità dei fasci connettivi perifollicolari, i quali, già divaricati per la presenza del follicolo, tendono ad avvicinarsi non appena questo, essendo colpito da atresia, perde il suo naturale turgore.

4.) Il fenomeno di cui ci occupiamo implica e dimostra in alcuni elementi dello stroma

---

(1) Clivio 1903 accenna, a proposito di una sua osservazione in merito alla quale non entrerò, alla possibilità di diminuzione della resistenza fisica del vitello ovulare. In tale condizione egli afferma essere più facile a cellule della granulosa di irrompere nell'interno dell'ovocite. È chiaro come tale modo di pensare trovi un certo riscontro con quanto or ora si è detto.

(cellule tecali) una netta e notevolmente spiccata capacità di subire spostamenti nello interno dell' ovaia; capacità per vero determinata da cause estrinseche ad essi elementi, dipendendo dall' azione del tessuto connettivo fascicolare circostante.

*Catania, febbraio 1918.*

---

# BIBLIOGRAFIA


1859. **Aeby** — Ueber glatte Muskelfasern in ovarium *Arch. für Anatomie und Physiol.*

1880. **Van Beneden** — Contribution à la connaissance de l' ovaire des mammifères, (Vesp. mur. et. Rinol. ferreq.) *Arch. de Biol.* Vol. I.

1877. **Beulin** — Das Corpus luteum — Dissert. inaug. Königsberg — citato da Van Beneden (1880).

1894. **Bühler** — Beiträge Zur Kenntniss der Eibildung beim Kanincken und der Markstränge des Eierstockes beim Fuchs und Menschen. — *Zeitschrift für Wiss. Zool.* — Bd. 58.

1903. **Clivio** — Di alcune particolarità anatomiche osservate in Ovaie infantili—*Ann. d'Ost. e Ginec.* A. 25.

1902-1903. **Cristalli** — Contributo all' istogenesi del Corpo luteo della Donna — *Arch. ital. di Ost. e Ginec.* A. 10.

1865. **His** — Beobachtungen über den Bau der Saügethier-Eierstockes — *Arch. für Mikrosk. Anatomie und Physiologie* — Bd. 1.

1880. **Mc. Leod.** — Contribution à l' étude de la structure de l' ovaire des Mamm. — *Arch. de Biol.* T. I.

1913. **Levi G.** — Note citologiche sulle cellule somatiche dell' ovaia dei Mammiferi. *Arch. f. Zellforsch.* Bd. XI, 4.

1918. **Monterosso Br.** — Ult. ric. sull' int. strutt. dell' ovario dei Mammiferi.—Nota I. in questo steso volume degli Atti Acc. Gioenia.

1887. **Paladino G.** — Ulteriori ricerche sulla distruzione e rinnovamento continuo del Parenchima ovarico dei Mammiferi. — Napoli.

1905. **id.** — La mitosi nel Corpo luteo e le recenti congetture sulla significazione di questo. — *Arch. di Ostetr. e Ginec.*

1905. **Pinto C.** — Note istologiche sulle modificazioni dell' ovaia in gravidanza. — *Ann. Ostetr. e Ginec. Anno 27.*

1911. **Popoff** — Le tisse interstitiel et le corps jaune de l' ovaire — *Arch. de Biol.* T. XXVI.

1858. **Rouget** — Organes érectiles de la femme etc. — Journal de Physiol. de Brown-Sequard, T. I.

1906. **Russo A.** — Prime ricerche dirette a determinare la permeabilità e la struttura istochimica della zona pellucida nei Mammiferi — *Boll. Acc. Gioenia.*

1907. **Idem.** — Modificazioni sperimentali dell' elemento epiteliale dell' ovaia dei mammiferi — *R. Acc. Lincei,* CCCIV.

1903. **Sirena C.** — Distribuzione del tessuto elastico nell' apparato genitale femminile interno — *Lucina Sicula N. 3.*

1901. **Von Winiwarter** — Recherches sur l' ovogenèse et l' organogenèse de l' ovaire des Mammifères (Lapin et Homme) *Arch. de Biol.* vol. 17°.

1908. **Idem.** — Das interstitielle Gewebe der Menschlichen Ovarien — *Anat. Anz.*

1910. **Id.** — Contribution á l' étude de l' ovaire humain etc. *Arch. de Biologie* Vol. XXV.

1908-09. **Von Winiwarter et Sainmont.** — Nouvelles recherches sur l'ovogenèse et l'organogenèse de l'ovaire des Mammiféres (chat) — *Arch. de Biologie T. 24.*

1907. **Zalla M.** — Ricerche sopra la struttura e l' istogenesi della sostanza midollare dell' ovaia — *Arch. ital. di Anat. Embr.* Vol. VI.


## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA.

Le figure sono tratte da preparati di Ovaia di coniglia normale giovane, ottenuti con fissazione nella miscela d' Hermann e colorazione con Ematossilina ferrica, secondo il metodo Heidenhain. Si cercò di disegnare tutti gli elementi dal naturale, giovandosi della *camera lucida Nachet.*

Microscopio Koristka oc. 8 comp.; obb. 4; tubo evaginato, proiezione a livello del tavolino del Microscopio.

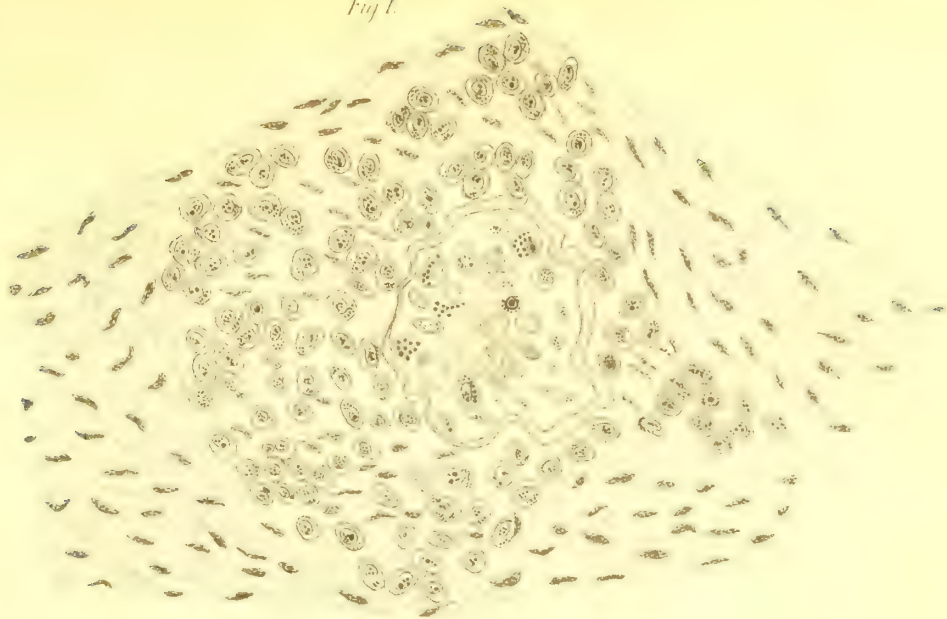
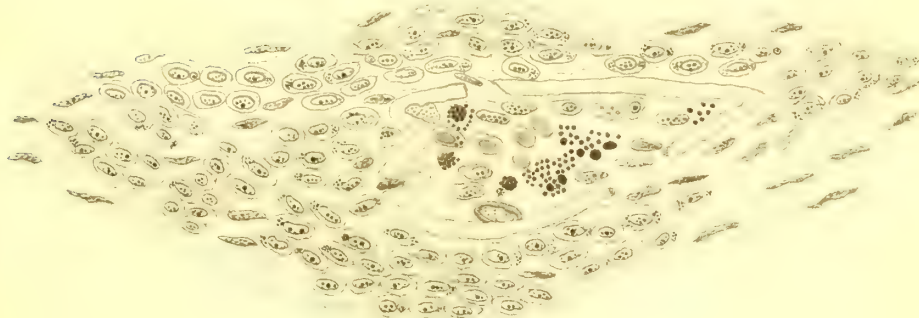
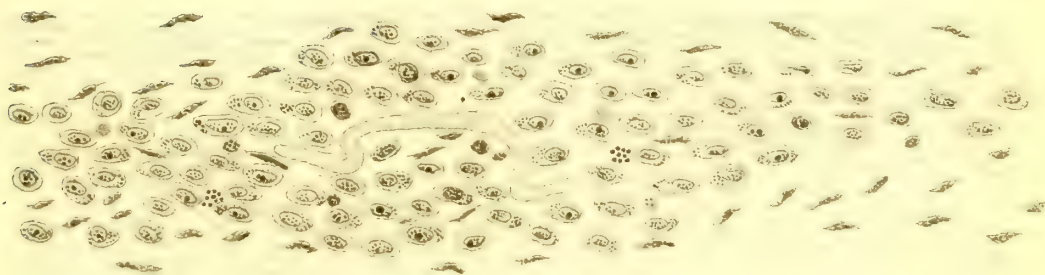
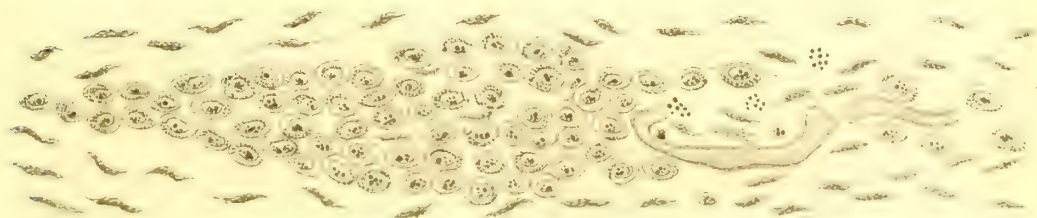
— La Fig. 1ª mostra uno dei primi stadi del processo d' atresia. Le cellule tecali occupano un' aria quasi sferica attorno al resto del follicolo. Membrana di Slawiansky ancora a sezione circolare, sebbene irregolare nel contorno.

— La Fig. 2ª rappresenta uno stadio più avanzato. La sezione della membrana follicolare è ormai piriforme e già interrotta. Le cellule tecali occupano uno spazio ovale allungato.

— La Fig. 3ª mostra la membrana follicolare già spiegata, con tendenza a stendersi su un piano (ideale) orizzontale. Le cellule tecali occupano uno spazio più stretto ma più lungo.

— La Fig. 4ª dà a vedere i resti della membrana follicolare, dinanzi ai quali si stendono le cellule follicolari, che li hanno lasciati quasi isolati.

B. Monterosso dis.

Lit. Tacchinardi e Ferrari-Pavia

# La deglicerinazione dei grassi col processo Twitchell.

Nota di P. BERTOLO

Fra i diversi processi praticati per la deglicerinazione delle materie grasse, da circa un decennio ha trovato impiego in alcune stearinerie e fabbriche di saponi, il processo Twitchell, che, non ostante le difficoltà tecniche che esso presenta e le svariate critiche di cui è stato oggetto, va acquistando sempre più maggiore diffusione, e, a quanto pare, è destinato ad una completa prevalenza sugli altri metodi finora impiegati.

Come è noto, tale processo si fonda sull'azione catalitica, o per meglio dire, sull'azione emulsionante, esercitata sulle materie grasse neutre, da un acido grasso solfoaromatico, detto Reattivo di Twitchell, il quale in presenza di acqua, ne determina l'idrolisi e quindi la scissione in acidi grassi e glicerina.

I difetti che parecchi industriali hanno fatto rilevare nella pratica del processo Twitchell, riguardano principalmente le difficoltà che esso presenta nel lavaggio delle materie grasse e nel tempo assai lungo che esso richiede per la loro completa scissione, essendo necessario far bollire per 48 ore le materie grasse mediante vapore, sospendendo l'operazione dopo le prime 24 ore per separarne le acque glicerinose, e aggiungere nuova acqua per procedere alla seconda fase di scissione. Tali operazioni richiedono una tecnica assai delicata, e se non vengono condotte con esatti criterî, possono apportare diversi inconvenienti, quali la incompleta deglicerinazione e la cattiva qualità degli acidi grassi; specialmente se, durante l'intervallo tra le due fasi di scissione, viene ad introdursi dell'aria nel recipiente. In questo caso gli acidi grassi formatisi si ossidano e assumono un colore oscuro, come anche la glicerina che si origina rimane inquinata di prodotti solforati organici, acroleina ecc., le quali impurezze difficilmente si possono eliminare coi metodi comuni di depurazione, e quindi si ottiene con una percentuale eccessiva di residuo organico.

Trovandomi a dirigere due fabbriche di glicerina col processo Twitchell, ho avuto occasione di eseguire in grande una serie di esperienze con l'intendimento di trovare le condizioni più favorevoli onde ottenere il maggior rendimento in acidi grassi e glicerina, e semplificare il procedimento, omettendo una serie di operazioni accessorie, poco vantaggiose in rapporto all'economia del tempo e del vapore impiegato.

Tali esperienze mi hanno condotto a risultati soddisfacenti, essendo riuscito ad affermare le condizioni opportune per ottenere in unica fase di scissione e in tempo relativa-

mente breve una perfetta deglicerinazione delle materie grasse in genere, e la produzione di una migliore qualità di acidi grassi e glicerina.

Le esperienze furono condotte seguendo prima le norme prescritte nell'ordinario procedimento, osservando le modalità in riguardo al lavaggio delle materie grasse e alla durata della scissione; e ciò allo scopo di stabilire, come termine di paragone, il massimo di acidità raggiunto per ciascuna materia grassa impiegata. Poscia ho eseguito nuove esperienze modificando i rapporti tra materia grassa, acqua, acido solforico e reattivo, riducendo contemporaneamente il tempo dell'ebollizione.

Le sostanze grasse impiegate per tali esperienze furono: l'olio di palma, il sego vegetale, l'olio di cocco e l'olio al solfuro.

Il lavaggio dei grassi è stato praticato in apposito tino di legno rivestito di piombo, in cui essi venivano prima riscaldati mediante vapore indiretto verso la temperatura di 50°, e versato l'acido solforico a getto sottile nelle proporzioni dell'1 al 2 °/o (a secondo la materia grassa impiegata), agitando la massa, venivano quindi sottoposti ad una forte corrente di vapore diretto per 1 ora in modo da rimescolare e lavare con l'acqua di condensazione tutta la massa della materia grassa. Dopo il riposo di parecchie ore, si separava per mezzo di apposito rubinetto di scarico l'acqua acida di lavaggio, che quasi sempre aveva la densità di 9° Bè circa.

Alcune volte nel fare il lavaggio del sego vegetale, si formava con l'acqua di condensazione un'emulsione stabile, da cui neanco dopo una notte di riposo separavasi l'acqua acida. In questo caso, aggiungendo alla massa riscaldata una certa quantità di acqua acidulata con acido solforico e agitando, si determinava col riposo la separazione completa dell'acqua emulsionata.

La materia grassa, così lavata, veniva introdotta nella botte di scissione, consistente in un'ampio tino di legno rivestito di piombo, insieme con acqua distillata, nelle proporzioni varianti dal 20 al 25 °/o, aggiungendovi l'acido solforico nelle proporzioni dell'1 al 2 °/o, e quindi veniva riscaldata mediante un forte getto di vapore che affluiva da una serpentina bucata situata al fondo della botte. Appena la massa entrava in ebollizione, s'introduceva da un apposito coperchio del tino, il reattivo, nelle proporzioni varianti dall'1 al 2 °/o, dopo averlo disciolto in circa tre volumi di acqua distillata, e dopo rimesso il coperchio, si abbandonava la botte ad una costante e tumultuosa ebollizione.

Le prime operazioni furono eseguite adoperando una qualità di reattivo Twitchell acquistato presso la Ditta Sirio di Milano, ma in seguito il reattivo è stato da me preparato presso lo stabilimento dei Fratelli Ferlito, dove appunto le esperienze sono state in gran parte eseguite. Questo reattivo è un prodotto di condensazione dell'acido solfooleinico colla naftalina, la cui preparazione sarà oggetto di una mia nuova comunicazione.

Durante la scissione avanzata si ha avuta cura di prelevare da un apposito rubinetto dei campioni, allo scopo di constatare il rapporto tra acqua e materia grassa, il grado di acidità dell'acqua e il grado di acidità delle materie grasse raggiunto nei diversi periodi di tempo.

Il rapporto tra acqua e materia grassa veniva determinato versando il campione prelevato in apposito cilindro graduato, tenuto in luogo caldo, e osservando dopo qualche tempo il volume dell'acqua separata e quello del grasso.

L'acidità dell'acqua spillata veniva determinata sopra 25 cc. di liquido filtrato titolando con soluzione Normale di idrato sodico, usando il metilorange come indicatore.

Il grado di acidità delle materie grasse si determinava dopo aver lavato con acqua bollente il campione prelevato, separato dall'acqua, dissecato in stufa e filtrato. Una quantità di questo, esattamente pesata, veniva disciolta in alcool neutro e titolata con soluzione $N/_{10}$ di idrato sodico in presenza di fenolftaleina.

Durante l' intervallo tra la 1ª e la 2ª fase di scissione, cioè durante la separazione delle prime acque glicerinose, si ha avuta cura di mantenere il contenuto della botte sotto lieve pressione di vapore, proveniente da un tubo affluente nella parte superiore della botte, e ciò allo scopo di evitare l' accesso dell'aria, che appunto determina l'ossidazione e l'imbrunimento degli acidi grassi.

Alla fine della 2ª fase di scissione, si ha avuto cura di aggiungere alla massa, del carbonato di bario nelle proporzioni di gr. 0,5 °/o e di far bollire ancora per circa una mezz'ora allo scopo di neutralizzare le piccole quantità di acido solforico rimaste, la qual cosa si è accertata prelevando un piccolo campione di acqua dal rubinetto di scarico e saggiandolo con metilarancio.

Nel descrivere le esperienze si è tenuto il criterio di raggruppare le diverse operazioni eseguite per ogni singola materia grassa impiegata, facendo precedere le operazioni a doppia fase di scissione, che, a secondo le percentuali di acqua, reattivo e acido solforico aggiunte, hanno dato i più scarsi risultati.

## ESPERIENZE COLL' OLIO DI PALMA

### 1ª *Operazione (giorno 13 Aprile 1917).*

Materia grassa impiegata: olio di palma Kgr. 3500.

*Lavaggio*: Acido solforico a 60° aggiunto Kgr. 35, diluito con ugual quantità di acqua mantenendo l'olio alla temp. di circa 70° ed agitando per $^1/_2$ ora.

Dopo dato il vapore diretto per 1 ora, lasciato in riposo per una notte.

Densità dell' acqua acida di lavaggio separata = 7° Bè.

**1ª Fase di scissione: durata 24 ore**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico a 60° = Kgr. 35.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua ed olio dopo 24 ore = 40 : 60
Densità dell' acqua = 6° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2$ $SO_4$) = 2, 07 %
Acidità dell' olio raggiunta (espressa in acido oleico) = 80, 98 %).

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta: litri 300.
Acido solforico a 60° = Kgr. 3, 500.
Rapporto tra acqua ed olio = 40 : 60.
Densità dell' acqua separata = 4° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2$ $SO_4$) = 1, 17 %
Acidità finale dell'acido grasso ottenuto (in acido oleico) = 9447.

### 2ª *Operazione (28 Aprile 1917).*

Materia grassa impiegata: Olio di Palma Kgr. 3900.

*Lavaggio*: Acido solforico a 60° Kgr. 40 aggiunto a getto sottile senza diluizione, mantenendo l' olio alla temperatura di 60° poscia dato 1 ora di vapore diretto e laseiato in riposo. Densità dell' acqua di lavaggio separata = 9° Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta: litri 700.
Acido solforico a 60° Kgr. 40.
Reattivo: Kgr. 40.
Rapporto tra acqua ed olio = 62 : 38.
Densità dell' acqua = 7° Bè.
Acidità dell'acqua ($H_2$ $SO_4$) = 2,43 %.
Acidità raggiunta dell' olio (in acido oleico) = 90, 24 %.

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico a 60° = Kgr. 4.
Rapporto tra acqua ed olio 42 : 58.
Densità dell' acqua separata = 4° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2SO_4$) = 1, 21 %.
Acidità finale dell' acido grasso — 97, 29.

3ª *Operazione (giorno 16 Giugno 1917).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3500.

*Lavaggio:* Acido solforico a 60° Bè Kgr. 35 versato a getto sottile senza diluizione sull' olio mantenuto a 60° di temp. Dopo agitazione si fece agire il vapore diretto per 1 ora e dopo riposo di una notte si separò l' acqua — Densità dell' acqua di lavaggio = 9 ½ Bè.

**1ª Fase: durata 22 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico = Kgr. 35.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa (osservato alla fine) = 40 : 60.
Densità dell' acqua = 6° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2SO_4$) = 2, 15 %.
Acidità dell' olio in acido oleico = 90 %

**2ª Fase: durata 22 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico = Kgr. 2.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell' operazione) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa separata = 4° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2SO_4$) = 1, 05 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 95, 88 %.

4ª *Operazione (giorno 20 Giugno 1917).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma = Kgr. 3500.

*Lavaggio:* eseguito con Acido solforico a 60° nell' identico modo della precedente operazione. Densità dell' acqua di lavaggio = 8° Bè.

**1ª Fase: durata 22 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico = Kgr. 35.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa (osservata alla fine) = 50 : 50.
Densità dell' acqua glicerinosa = 8° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2SO_4$) = 2, 45 %.
Acidità dell' olio = 91, 04 %.

**2ª Fase: durata 20 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico Kgr. 2.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) 42 : 58.
Densità dell' acqua glicerinosa separata = 5° Bè.
Acidità dell' acqua in $H_2SO_4$ = 1, 17 %.
Acidità finale dell'acido grasso = 96, 20 %.

5ª *Operazione (giorno 8 Luglio 1917).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3500.

*Lavaggio*: eseguito con 35 Kgr. di Acido solforico a 60° Bè con le norme descritte nella 3ª operazione — Densità dell' acqua di lavaggio = 9° Bè.

**1ª Fase: durata 22 ore.**

Acqua aggiunta = litri 650.
Acido solforico = Kgr. 15.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua ed olio (osservato alla fine) = 60 : 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 5° Bè.
Acidità dell' acqua in $H_2SO_4$ = 1, 54 %.
Acidità dell'olio = 89, 20 %.

**2ª Fase: durata ore 18.**

Acqua aggiunta = litri 350.
Senza aggiunta di acido solforico.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell' operazione) = 60: 40.
Densità dell'acqua glicerinosa separata = 4° Bè.
Densità dell'acqua in $H_2SO_4$ = 0,85 %.
Acidità finale dell' acido grasso = 94, 47 %.

6ª *Operazione (giorno 12 Luglio 1917).*

Materia Grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3000.

*Lavaggio:* eseguito con 35 Kgr. acido solforico a 60ª Bè come nella precedente operazione — Densità dell' acqua di lavaggio separata = 7 ½ Bè.

**1ª Fase: durata 22 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 14.
Reattivo = Kgr. 34.
Rapporto tra acqua ed olio (osservato alla fine) 50: 50.
Densità acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell'acqua in $(H_9SO_4)$ = 1, 50 %.
Acidità dell' olio = 90, 05 %.

**2ª Fase: durata 14 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Senza altra aggiunta di ac. solforico.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine) 56 : 44.
Densità acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2 SO_4$) = 0,9 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 95, 88 %.

PROVE DI SCISSIONE UNICA.

7ª *Operazione (giorno 14 Luglio 1917).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3000.

*Lavaggio*: eseguito come la precedente operazione aggiungendo Kgr. 35 di acido solforico — Densità dell' acqua di lavaggio = 8° ½ Bè.

**Scissione unica: durata 36 ore.**

Acqua aggiunta = litri 700.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua ed olio (osservato alla fine) = 54: 45.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6° Bè
Acidità dell'acqua (in $H_2 SO_4$) = 1, 80 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 95, 88 %.

8ª *Operazione (giorno 19 Luglio 1917).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3500.

*Lavaggio*: eseguito con aggiunta di Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè sempre con le solite norme. Densità acqua di lavaggio 8° ½ Bè.

**Scissione unica: durata 40 ore.**

Acqua aggiunta = litri 750.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 25.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua ed olio (osservato alla fine) = 55 : 45.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2 SO_4$) = 1, 87 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 95, 50 %.

### 9ª *Operazione (giorno 26 Giugno 1918).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3695.

*Lavaggio*: eseguito con aggiunta di acido solforico a 60° Bè. Kgr. 40.

**Scissione unica: durata ore 31.**

Acqua aggiunta = litri 800.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 12.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua ed olio (osservata alla fine) = 60 : 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6 Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1, 18 %.
Acidità finale dell'acido grasso ottenuto = 98, 70 %.

### 10ª *Operazione (giorno 1° Luglio 1918).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3763.

*Lavaggio*: eseguito con Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè.

**Scissione unica: durata ore 33.**

Acqua aggiunta litri 800.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 12.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua ed olio = 50 : 50 (osservata alla fine).
Densità dell' acqua glicerinosa = 5° Bè.
Acidità dell' acqua glicerina in ($H_2SO_4$) = 1, 10 %.
Acidità finale dell'acido grasso ottenuto = 99, 5 %.

### 11ª *Operazione (giorno 5 Luglio 1918).*

Materia grassa impiegata: Olio di palma Kgr. 3600.

*Lavaggio*: eseguito con Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè.

**Scissione unica: durata ore 30.**

Acqua aggiunta: litri 780.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 12.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua ed olio = 55: 45 (osservato alla fine).
Densità acqua glicerinosa = 5° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa in $H_2SO_4$ = 1, 20 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 97, 29 %.

## ESPERIENZE COL SEGO VEGETALE

### *1ª Operazione (giorno 8 Maggio 1917).*

Materia grassa impiegata: Sego vegetale Kgr. 4000.

*Lavaggio*: Acido solforico a 60° Bè : Kgr. 40, aggiunto al sego fuso e mantenuto alla temperatura di 50°. Dopo un' ora di riscaldamento con forte vapore, si lasciò in riposo circa 6 ore. Poscia si aggiunsero litri 100 di acqua acidulata con acido solforico all' 1 %, si agitò la massa e in tal modo si ottenne separazione dell'acqua.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 5° Bè.

**1ª Fase di scissione: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico a 60° = Kgr. 10.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua e sego (alla fine della 1ª fase) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 7° Bè
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1, 62 %.
Acidità del sego (in acido oleico) = 84, 06. %

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico = Kgr. 6.
Rapporto tra acqua ed olio = 40 : 60.
Densità acqua glicerinosa = 5° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 0,66 %.
Acidità finale del sego = 93, 06 %.

### *2ª Operazione (giorno 15 Maggio 1917).*

Materia grassa impiegata: Sego vegetale Kgr. 4000.

*Lavaggio:* Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 40, aggiunto al sego riscaldato alla temperatura di 60° ; dopo agitazione fu dato il vapore diretto per 1 ora e lasciato in riposo per una notte.

Densità dell'acqua di lavaggio separata = 9° Bè.

**1ª Fase di scissione: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600 — senza acido solforico.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua e sego alla fine dell'operazione = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2SO_4$) = 0, 84 %.
Acidità del sego (in acido oleico) = 81, 78 %.

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 10.
Rapporto tra acqua ed olio = 40: 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 5° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2 SO_4$) = 1, 82 %.
Acidità finale del sego = 95, 88 %.

3ª *Operazione (giorno 29 Luglio 1917).*

Materia grassa impiegata: Sego vegetale Kgr. 3500.

*Lavaggio*: eseguito con Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè e con le modalità descritte nella precedente operazione.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 8 ½ Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 700.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 15.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua e sego dopo l'operazione = 50 : 50.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2 SO_4$) = 1, 58 %.
Acidità del sego in acido oleico = 87, 42 %.

**2ª Fase: durata 18 ore.**

Acqua aggiunta = litri 350.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 6.
Rapporto tra acqua e sego dopo l' operazione = 45 : 55.
Densità dell'acqua glicerinosa = 3° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2 SO_4$) = 0,65 %.
Acidità finale del sego = 98, 70 %.

4ª *Operazione (giorno 1 Agosto 1917).*

Sego vegetale impiegato Kgr. 3500.

*Lavaggio*: eseguito aggiungendo Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè e con le norme descritte nelle precedenti operazioni.

Densità dell'acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**1ª Fase: durata 20 ore.**

Acqua aggiunta = litri 700.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 12.
Reattivo = Kgr. 35.

Rapporto tra acqua e sego alla fine della 1ª fase = 50: 50.
Densità acqua glicerinosa = 5° Bè.
Acidità dell'acqua in ($H_9$ $SO_4$) = 1, 12 %.
Acidità del sego (In acido oleico) = 83, 46 %.

**2ª Fase : durata 18 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 6.
Rapporto tra acqua e sego alla fine dell'operazione 45 : 55.
Densità dell' acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2$ $SO_4$) = 0, 62 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto — 98, 70 %.

5ª *Operazione (giorno 21 Agosto 1917).*

Materia grassa impiegata : Sego vegetale Kgr. 3500.

*Lavaggio:* eseguito con 40 Kgr. di acido solforico a 60° Bè e con le solite norme per far separare l' acqua dalla materia grassa.
Densità dell' acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**Scissione unica : durata 36 ore.**

Acqua aggiunta = litri 650.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e sego alla fine dell'operazione = 50: 50.
Densità dell' acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2$ $SO_4$) = 2, 10 %.
Acidità finale dell'acido grasso ottenuto = 93, 89 %

6ª *Operazione (giorno 14 Settembre 1917).*

Quantità di sego vegetale impiegata = Kgr. 3500.

*Lavaggio:* eseguito al solito con 40 Kgr. di acido solforico a 60° Bè.
Densità dell' acqua di lavaggio = 8° 1/2 Bè.

**Scissione unica : durata 34 ore.**

Acqua aggiunta = litri 700.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 15.
Reattivo = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e sego alla fine dell'operazione = 50: 50.
Densità dell' acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2$ $SO_4$) = 1, 85 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 95, 89 %.

7ª *Operazione (giorno 18 Ottobre 1917).*

Quantità di sego vegetale impiegata = Kgr. 3600.

*Lavaggio*: eseguito al solito con 40 Kgr. di acido solforico a 60° Bè.
Densità dell' acqua di lavaggio sep i ata = 9° Bè.

**Scissione unica: durata 34 ore.**

Acqua aggiunta = litri 750.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 15.
Reattivo = Kgr. 36.
Rapporto tra acqua e sego (alla fine dell'operazione) = 55 : 45.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1, 59 %.
Acidità finale dell'acido grasso ottenuto = 97, 18 %.

8ª *Operazione (giorno 29 Ottobre 1917).*

Quantità di sego vegetale impiegata = Kgr. 3500.

*Lavaggio:* eseguito con Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè come nelle precedenti operazioni.
Densità dell' acqua di lavaggio separata : 8° Bè.

**Scissione unica: durata 32 ore.**

Acqua aggiunta litri 750.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo = Kgr. 38.
Rapporto tra acqua e mater a grassa (alla fine dell'operazione) = 45 : 55.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1, 85 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 98, 28 %.

9ª *Operazione (giorno 3 Novembre 1917).*

Quantità di sego vegetale impiegata = Kgr. 3800.

*Lavaggio*: eseguito come nella precedente operazione con 45 Kgr. di acido solforico.
Densità dell'acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**Scissione unica: durata 36 ore.**

Acqua aggiunta = litri 800.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 25.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua e materia grassa alla fine dell'operazione = 55 : 45.
Densità acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 2, 05 %.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 98 %.

### 10ª *Operazione (giorno 7 Novembre 1917).*

Quantità di sego vegetale impiegata = K. 3600.

*Lavaggio*: eseguito come nelle precedenti operazioni con Kgr. 45 di acido solforico a 60° Bè.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 9° Bè.

**Scissione unica: durata 30 ore**

Acqua aggiunta = litri 800.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua e materia grassa = 55 : 45.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2$ $SO_4$) = 1, 60 °/₀
Acidità finale dell'acido grasso ottenuto = 98, 06 °/₀).

## ESPERIENZE COLL' OLIO DI COCCO

### 1ª *Operazione (giorno 23 Maggio 1917).*

Quantità dl olio di cocco impiegata = Kgr. 3500.

*Lavaggio*: Riscaldato l' olio alla temperatura di 50°, si aggiunsero poco a poco ed agitando la massa, Kgr. 36 di acido solforico a 60° Bè. Quindi si diede il vapore diretto per un' ora, si lasciò in riposo per una notte e dopo si separò l'acqua di lavaggio.

Densità dell' acqua di lavaggio = 6° Bè.

**1ª Fase di scissione: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta: litri 300.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 35.
Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa (osservato alla fine) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 8° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2$ $SO_4$) = 2, 35 °/₀
Acidità dell' olio (calcolata in acido laurinico) = 90, 25 °/₀.

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta: litri 300.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 15.
Rapporto tra acqua ed olio (osservato alla fine) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2$ $SO_4$) = 1,58 °/₀.
Acidità finale dell' acido grasso ottenuto = 96, 80 °/₀.

### 2ª *Operazione (giorno 30 Maggio 1917).*

Quantità di olio di cocco impiegata : Kgr. 3700.

*Lavaggio :* eseguito con Kgr. 35 di acido solforico a 60° Bè, seguendo la tecnica descritta nella precedente operazione.

Densità dell'acqua di lavaggio separata = 6° $^1/_2$ Bè.

**1ª Fase : durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico a 60° = Kgr. 37.
Reattivo impiegato: Kgr. 37.
Rapporto tra acqua e materia grassa (osservato alla fine) = 50 : 50.
Densità dell'acqua glicerinosa = 9° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2\ SO_4$) = 1, 96 %.
Acidità dell'olio (calcolata in acido laurinico) = 90,20 %.

**2ª Fase : durata 20 ore.**

Acqua aggiunta : litri 300.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 4.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 6° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,29 %.
Acidità finale dell' acido grasso = 98,80 %.

### 3ª *Operazione (giorno 5 Giugno 1917).*

Quantità di olio di cocco impiegata = Kgr. 3700.

*Lavaggio :* Si aggiunsero all'olio riscaldato alla temper. di 50°, Kgr. 35 di acido solf rico a 60° Bè, e si diede al solito un' ora di vapore diretto.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 6° Bè.

**1ª Fase : durata ore 19 $^1/_2$**

Acqua aggiunla = litri 600.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 35.
Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e olio di cocco (alla fine dell'operazione) = 40 : 50.
Densità dell'acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 2,66 %.
Acidità dell'olio (calcolata in acido laurinico) = 76,70 %.

**2ª Fase : durata 18 ore.**

Acqua aggiunta = litri 270.
Acido solforico a 60° = Kgr. 4.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 35 : 65.

Densità dell'acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,56 %.
Acidità finale dell'acido grasso = 96,20 %.

4ª *Operazione (giorno 8 Giugno 1917).*

Quantità di olio di cocco impiegata = Kgr. 3700.

*Lavaggio:* eseguito come nelle precedenti operazioni con Kgr. 35 di acido solforico a 60° Bè.

Densità dell' acqua di lavaggio = 7° Bè.

**1ª Fase: durata 22 ore.**

Acqua aggiunta = litri 660.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 35.
Reattivo impiegato = Kgr. 36.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 55 : 45.
Densità dell' acqua glicerinosa = 9° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 2,45 %.
Acidità dell'olio (calcolata in acido laurinico) = 92,35 %.

**2ª Fase: Durata 18 ore.**

Acqua aggiunta = litri 350.
Acido solforico = Kgr. 6.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell'acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,28 %.
Acidità finale dell'acido grasso = 99,02 %,

5ª *Operazione (giorno 12 Giugno 1917).*

Quantità di olio di cocco impiegata = Kgr. 3500.

*Lavaggio:* eseguito con Kgr. 35 di acido solforico a 60° Bè con le solite norme delle precedenti operazioni.

Densità dell'acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 650.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa = 60 : 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 8° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,95 %.
Acidità dell' olio (calcolata in acido laurinico) = 93,68 %.

**2ª Fase: durata 6 ore.**

Acqua aggiunta = litri 350.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 6.

Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 5° Bè.
Acidità (in $H_2SO_4$) = 1,12 %.
Acidità finale dell'acido grasso = 95,88 %.

### 6ª *Operazione (giorno 10 Dicembre 1917).*

Quantità di olio di cocco impiegata = Kgr. 3500.

*Lavaggio :* eseguito come nelle precedenti operazioni con 35 Kgr. di acido solforico a 60° Bè.

Densità dell' acqua di lavaggio = 8° Bè.

**Scissione unica : durata 30 ore.**

Acqua aggiunta = litri 650.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa = 50 : 50.
Densità dell' acqua glicerinosa = 8° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1,54 %.
Acidità finale dell'acido grasso = 96,48 %.

### 7ª *Operazione (giorno 18 Maggio 1918)*

Quantità di olio di cocco impiegata = Kgr. 3500.

*Lavaggio :* eseguito al solito con 35 Kgr. di acido solforico a 60° Bè.
Densità dell' acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**Scissione unica : durata 36 ore.**

Acqua aggiunta = litri 700.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa = 55 : 45.
Densità dell' acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1,36 %.
Acidità finale dell' acido grasso = 99 %.

### 8ª *Operazione (giorno 25 maggio 1918)*

Quantità di olio di cocco impiegata = Kgr. 3500.

*Lavaggio :* eseguito come nelle precedenti operazioni, aggiungendo Kgr. 35 di acido solforico a 60° Bè.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 9° Bè.

**Scissione unica : durata 34 ore.**

Acqua aggiunta : litri 800.
Acido solforico = Kgr. 20.

Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa = 60 : 40.
Densità dell'acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell'acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1,18 %.
Acidità finale dell' acido grasso = 99,08 %.

### 9ª *Operazione (giorno 2 Giugno 1918)*

Quantità di olio di cocco impiegata = Kgr. 3000.

*Lavaggio:* eseguito aggiungendo al solito Kgr. 35 di acido solforico, come nelle precedenti operazioni.

Densità dell'acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**Scissione unica: durata 32 ore.**

Acqua aggiunta = litri 750.
Acido solforico = Kgr. 20.
Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa = 60 : 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 7° Bè.
Acidità dell'acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1, 28 %.
Acidità finale dell' acido grasso = 99, 45 %.

## ESPERIENZE CON L' OLIO AL SOLFURO

### 1ª *Operazione (giorno 1° Aprile 1917).*

Quantità di olio al solfuro impiegato = Kgr. 3000.

Acidità iniziale in acido oleico = 69 %.

*Lavaggio:* riscaldato l' olio alla temper. di 50°, si aggiunsero, agitando la massa, Kgr. 30 di acido solforico a 60° Bè. Poscia si fece agire una forte corrente di vapore diretto per un'ora, si lasciò in riposo per una notte e quindi si separò l'acqua di lavaggio.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 500.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo impiegato = Kgr. 30.
Rapporto tra acqua e materia grassa (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 3° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,90 %.
Acidità dell'olio in acido oleico = 80,37 %.

**2ª Fase: Durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico = Kgr. 5.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell'acqua glicerinosa = 1° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2SO_4$) = 1,10 %.
Acidità finale dell'acido (in acido oleico) = 84,70 %,

2ª *Operazione (giorno 4 Aprile 1917).*

Quantità di olio al solfuro impiegato = Kgr. 3500.

Acidità iniziale in acido oleico = 69 %.

*Lavaggio:* eseguito con Kgr. 35 di acido solforico a 60° Bè come nella precedente operazione.

Densità dell'acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 10.
Reattivo impiegato = Kgr. 50.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 2° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,30 %.
Acidità dell' olio (in acido oleico) = 76,14 %.

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 5.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine) = 40: 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 2° 1/2 Bè.
Acidità dell'acqua in ($H_9$ $SO_4$) = 0, 92 %.
Acidità finale dell'olio (In acido oleico) = 84, 60 %.

3ª *Operazione (giorno 29 Agosto 1917).*

Quantità di olio al solfuro = Kgr. 3500.

Acidità iniziale in acido oleico = 64, 86 %.

*Lavaggio:* All' olio, riscaldato alla temperatura di 50°, si aggiunsero poco a poco Kgr. 35 di acido solforico a 60° Bè. Poscia si diede per un' ora una forte corrente di vapore diretto, quindi si lasciò in riposo per parecchie ore e si separò l'acqua di lavaggio.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 8° Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 600.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 35.

Reattivo impiegato = Kgr. 35.
Rapporto tra acqua e materia grassa (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell'acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 2, 20 %.
Acidità dell'olio in acido oleico = 82, 20 %

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 300.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 16.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 2° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2SO_4$) = 1, 36 %.
Acidità finale dell' olio (in acido oleico) = 86, 60 %.

4ª *Operazione (giorno 5 Settembre 1917).*

Quantità di olio al solfuro = Kgr. 3500.

Acidità iniziale dell'olio (in acido oleico) = 64, 86 %.

*Lavaggio:* Eseguito al solito, come nella prima operazione, ma con una quantità raddoppiata di acido solforico (Kgr. 70). Dopo, separata l'acqua di lavaggio, che aveva la densità di 9° Bè, si praticò un nuovo lavaggio con semplice acqua di condensazione.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 650.
Acido solforico a 60° = Kgr. 35.
Reattivo impiegato: Kgr. 35.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 50 : 50.
Densità dell' acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 2, 40 %.
Acidità dell'olio (in acido oleico) = 87,48 %.

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta: litri 350.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 10.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell' acqua glicerinosa = 2° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,25 %.
Acidità finale dell' acido grasso = 89,60 %.

5ª *Operazione (giorno 11 Settembre 1917).*

Quantità di olio al solfuro = Kgr. 3500.

Acidità iniziale = 64, 86 %.

*Lavaggio:* eseguito come nella precedente operazione col 2 % di acido solforico, cioè con Kgr. 70 di $H_2SO_4$ a 60° Bè.

Densità dell' acqua di lavaggio = 9° Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 750.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 35.
Reattivo impiegato = Kgr. 50.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 60: 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua in ($H_2SO_4$) = 2, 20 %.
Acidità dell' olio in acido oleico = 89, 50 %.

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 350.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 10.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 40 : 60.
Densità dell'acqua glicerinosa = 2° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 1,20 %.
Acidità finale dell'olio in acido oleico) = 91,50 %.

6ª *Operazione (giorno 4 Ottobre 1917).*

Quantità di olio al solfuro : Kgr. 3500.

Acidità iniziale = 56,40 %.
*Lavaggio:* eseguito come nella precedente operazione, aggiungendo Kgr. 70 di acido solforico a 60° Bè.
Densità dell' acqua di lavaggio = 9° Bè.

**1ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 750.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 35.
Reattivo impiegato = Kgr. 70.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 60: 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 2, 60 %.
Acidità dell'olio in acido oleico = 93, 60 %.

**2ª Fase: durata 24 ore.**

Acqua aggiunta = litri 350.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 10.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine) = 40: 60.
Densità dell'acqua glicerinosa = 2° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2SO_4$) = 1,28 %.
Acidità finale dell'acido grasso (in acido oleico) = 94, 80 %.

7ª *Operazione (giorno 23 Ottobre 1917).*

Quantità di olio al solfuro impiegata : Kgr. 2000.

Acidità iniziale dell' olio = 56, 4 %.

*Lavaggio*: Eseguito al solito come nelle precedenti operazioni, aggiungendo Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè.

Densità dell' acqua di lavaggio = 9° Bè.

**Scissione unica: durata 36 ore.**

Acqua aggiunta = litri 500.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo impiegato = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua e materia grassa (alla fine) = 60 : 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua (in $H_2SO_4$) = 2, 04 %.
Acidità finale dell'olio (in acido oleico) = 94, 06 %.

8ª *Operazione (giorno 30 Ottobre 1917).*

Quantità di olio al solfuro impiegata : Kgr. 2000.

Acidità iniziale dell'olio = 56, 4 %.

*Lavaggio:* Eseguito al solito come nelle precedenti operazioni, aggiungendo Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè.

**Scissione unica: durata 32 ore.**

Acqua aggiunta = litri 550.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 20.
Reattivo = Kgr. 45.
Rapporto tra acqua e materia grassa (alla fine) = 60 : 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell' acqua glicerinosa (in $H_2SO_4$) = 1, 96 %.
Acidità finale dell'olio (in acido oleico) = 94 %.

9ª *Operazione (giorno 4 Dicembre 1917).*

Quantità di olio al solfuro impiegato = Kgr. 2000.

Acidità iniziale dell' olio = 56, 4 %.

*Lavaggio* : Eseguito al solito con aggiunta di Kgr. 40 di acido solforico a 60° Bè.

Densità dell' acqua di lavaggio separata = 9° Bè.

**Scissione unica: durata 34 ore.**

Acqua aggiunta = litri 500.
Acido solforico a 60° Bè = Kgr. 25.
Reattivo = Kgr. 40.
Rapporto tra acqua ed olio (alla fine dell'operazione) = 60: 40.
Densità dell' acqua glicerinosa = 4° Bè.
Acidità dell'acqua (in $H_2SO_4$) = 2, 25 %.
Acidità finale dell'olio (in acido oleico) = 93, 68 %.

***

Dalle esperienze sopra esposte si può desumere quanto segue:

1.° La purezza dei grassi è uno dei fattori principali per una più rapida e perfetta deglicerinazione; quindi è necessario che le materie grasse, prima della scissione col reattivo, vengano sottoposte ad un esatto lavaggio con acido solforico, eseguito con tutte le norme che la tecnica suggerisce, cioè in modo che l'intiera massa del grasso risenta l'azione purificante dell'acido. Questo dev'essere aggiunto nelle proporzioni dall'1 al 2 °/₀ ed avere una densità non superiore, nè inferiore a 60° Bè.

L'indice principale per assicurarsi del buon andamento del lavaggio viene dato dalla densità delle acque acide separate, che non deve essere mai inferiore a 9° Bè.

2.° La percentuale del reattivo emulsionante si deve limitare alle proporzioni dell'1 °/₀ circa, e solamente per i grassi assai impuri, come l'olio al solfuro, si può elevare sino al 2 °/₀. L'aumento di reattivo non presenta alcun vantaggio per una più rapida e più profonda idrolizzazione delle materie grasse; anzi si può affermare che l'aggiunta di eccesso di reattivo pregiudica il regolare procedimento dell'operazione, determinando il più delle volte la formazione di emulsioni stabili, che difficilmente si possono separare; mentre d'altro canto i prodotti di scissione risultanti, acidi grassi e glicerina, si ottengono assai impuri.

3.° La quantità di acqua che interviene nella reazione presenta una notevole importanza per determinare la più rapida e completa scissione delle materie grasse; ed è necessario che essa, dopo stabilito l'equilibrio di una regolare ebollizione, si mantenga nelle proporzioni intorno al 60 °/₀.

4.° Il grado di acidità dell'acqua deve mantenersi nelle proporzioni dell'1 al 2 °/₀ di acido solforico, percentuale che ordinariamente si raggiunge introducendo nella botte di scissione, insieme all'acqua, una quantità di acido solforico a 60° corrispondente alla metà del peso di reattivo impiegato.

Osservando bene le sopra esposte norme, i risultati che si ottengono nella 1ª fase di scissione sono assai soddisfacenti, e basta prolungare l'ebollizione sino a 30-32 ore, per raggiungere il massimo di deglicerinazione delle materie grasse, sopprimendo così la seconda fase dell'operazione, che oltre a richiedere un maggior tempo, presenta difficoltà tecniche nelle manipolazioni accessorie e dispendio enorme di vapore. Anzi per certe materie grasse, come ad esempio l'olio al solfuro, che nella prima fase di scissione non raggiunge una profonda idrolizzazione, si è constatato che una seconda fase riesce assolutamente inutile, poichè anche prolungando l'ebollizione per 48 ore, non si ottiene altro che un minimo aumento di acidità delle materie grasse idrolizzate.

*Catania, agosto 1918.*

Istitnto di Mineralogia e Vulcanologia della R. Università di Catania

S. DI FRANCO

# Sui cristalli di Celestina delle zolfare di Sicilia

(Con 2 tavole e figure nel testo).

Sin dal 1907 avendo a disposizione la ricchissima collezione di cristalli di Celestina delle zolfare siciliane del Museo di Mineralogia e Vulcanologia della R. Università di Catania, ritenni opportuno ed interessante farne lo studio cristallografico, molto più che dal 1879, dopo il lavoro di Lasaulx (1), nessuno se ne era occupato e le seguenti 17 forme note per detti cristalli di Sicilia: {001}, {100}, {010}, {011}, {021}, {108}, {104}, {102}, {210}, {110}, {120}, {114}, {111}, {133}, {122}, {143}, {132}, tranne la {010}, venivano da me mano mano confermate e aumentate in seguito a rigorose misure bene corrispondenti al calcolo, sopra limpidissimi cristallini, con buonissime facce, piane e splendenti.

Avevo quasi ultimato il mio lavoro e stavo per riordinare il manoscritto, quando mi pervenne la memoria del D.r Eugenio Traina (2), che contemporaneamente aveva trattato lo stesso soggetto e mi precedette nella pubblicazione.

Alcune facce nuove trovate dal Traina erano state anche da me osservate e per essere il mio studio sostanzialmente poco differente da quello del Traina, ritenni opportuno rimandarne la pubblicazione.

Essendomi in seguito occupato dei cristalli di *Gesso* (3) e di quelli di *Calcite* (4) dei giacimenti zolfiferi siciliani, potei osservare altri numerosi esemplari di cristalli di celestina, alcuni dei quali geminati, altri in associazione apparentemente elicoidale ed infine un tipo non descritto per la celestina di Sicilia, a forma *botroidale.*

Furono principalmente queste osservazioni che mi fecero determinare di riprendere lo studio di questo bel minerale, cercando di svolgere l' argomento alquanto più ampliamente.

***

Dei bellissimi cristalli di Celestina delle zolfare di Sicilia si occuparono il Maravi-

(1) LASAULX, *Beobachtungen in den Schwefeldistrikten von Sicilien,* N. J. f. Min. Geol. u. Paleont. Stuttgart, 1879.

(2) TRAINA, *Su alcune Celestine di Sicilia.* R. Acc. dei Lincei, Ser. V, Vol. VI, 1908.

(3) DI FRANCO, *Il Gesso delle solfare siciliane.* Atti Acc. Gioenia, Ser. 5, Vol. VII, 1914.

(4) Idem *Sulla Calcite dei giacimenti zolfiferi siciliani.* Atti Acc. Gioenia, Ser. 5, Vol. VIII, 1915.

gna (1), il Dauber (2), il Kokscharow (3), l'Auerbach (4), lo Schrauf (5), il Lasaulx (6) e il D.r Traina (7).

La celestina si trova in associazione con i cris·talli di *zolfo*, *calcite*, *gesso*, *aragonite* raramente col *quarzo* o con la *melanoflogite* , e dei minerali che accompagnano lo zolfo, è fra i più abbondanti, in dimensioni che variano da pochi millimetri sino a dieci e più centimetri.

I cristalli sono sempre impiantati sopra una delle due estremità della loro lunghezza, in modo che restano visibili soltanto le facce di quella estremità libera: in casi piuttosto rari e quando il cristallo è impiantato nella sua lunghezza, le facce si osservano in entrambi le due estremità. Generalmente sono semplici e liberi, altre volte costituiscono veri e proprii aggruppamenti.

Al pari della celestina di altre località i cristalli sono spesso più sviluppati in grossezza verso l' estremità libera ed i grossi cristalli si presentano opachi, di colore biancolatte, mentre i medii sono limpidi soltanto verso l'estremità e quelli piccoli sono completamente incolori, brillanti e trasparentissimi; di rado alcuni campioni mostrano il colore celeste più o meno chiaro.

La celestina di Sicilia si presenta in cristalli di aspetto differente e si possono ridurre a quattro i tipi principali.

1. Con abito prismatico, dato dal predominio del prisma $\{011\}$ allungato secondo l'asse $x$, tipo abbondante nelle zolfare di Sicilia (vedi figure della tav. I e fig. 1 e 3 della tav. II).

2. Con abito tabulare, simile alla baritina, per la estensione dominante del pinacoide $\{001\}$ ed è poco frequente (v. fig. 2 della tav. II).

3. Con abito piramidale acuto, per il maggiore sviluppo della piramide $\{144\}$, molto simile alla Celestina di Mineral County, West Virginia (8), tipo raro in confronto dei precedenti fig. 1, 2, 3 con le combinazioni $\{102\}$, $\{144\}$; $\{110\}$, $\{102\}$, $\{144\}$ (vedi ancora fig. 4 e 6 tav. II).

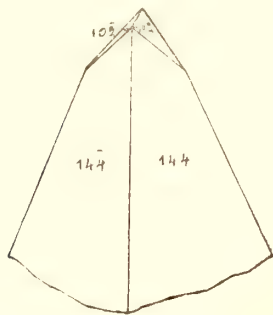



Fig. 1.

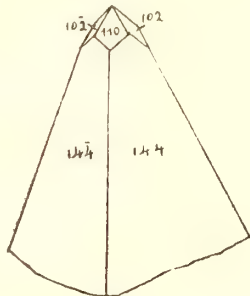



Fig. 2.

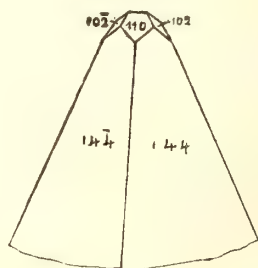



Fig. 3.

(1) C. MARAVIGNA, *Memoires pour servir à l'histoire naturelle de la Sicilie*, Paris, 1838.

(2) DAUBER, Pogg. Ann. 108, 1859 p. 448.

(3) KOKSCHAROW, Mat. Z. Min. Russl. 5, 1866, p. 5.

(4) AUERBACH, Sitz. d. K. Ak. de Wissenschaften, Wien. 59, 1869, p. 566.

(5) SCHRAUF, Atlas d. Kryst.-formen. Wien, 1877, tav. XLVIII, fig. 10.

(6) LASAULX, l. c.

(7) TRAINA, l. c.

(8) G. H. WILLIAMS, *Cölestin von Mineral County, West Virginia*. Groth's Zeit. f. K. u. M. 18, 1891 pag. 2.

4. Con abito a forma botroidale, costituito da un cristallo più grosso con altri più piccoli addossati con successione scalariforme fig. 4 e 5 (v. ancora fig. 5 tav. II).

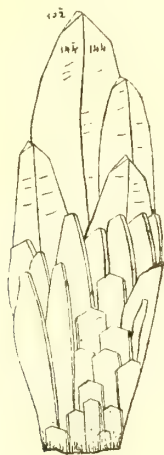



Fig. 4.

Fig. 5.

Delle forme note per la celestina di Sicilia le seguenti furono riscontrate da Auerbach:

{001}, {010}, {100}, {011}, {021}, {108}, {104}, {102}, {110}, {120},

{114}, {111}, {143}, {132}.

Schrauf vi aggiunse la {210} e Lasaulx la {133} e la {122}.

Il D.r Traina vi osservò le seguenti dieci forme: {0.1.20}, {0.1.16}, {0.1.10}, {019}, {018}, {017}, {113}, {144}, {1.0.17}, {328}; queste due ultime nuove per la celestina.

Complessivamente ventisette forme, però tra i numerosissimi cristalli studiati non ho potuto osservare il pinacoide {010} e per la celestina delle zolfare di Sicilia escludo tale forma, come pure della serie dei prismi paralleli all'asse $x$ del Traina, ho riscontrato soltanto le forme {018}, {0.1.16} e {0.1.20}, mentre la {328} deve ritenersi incerta.

D' altra parte ho potuto notare le forme {105}, {1.0.12}*, {016}* e {950}* le quali, tranne la prima riscontrata dall' Artini, sono nuove per la celestina in genere.

Riassumendo, le forme da me sicuramente accertate sulla celestina delle zolfare di Sicilia sono 26, e cioè:

{001}, {100}, {210}, {950}*, {110}, {120}, {0.1.20}, {0.1.16}, {018}, {016}*, {021}, {011},

{1.0.17}, {1.0.12}*, {108}, {105}, {104}, {102}, {114}, {113}, {111}, {144},

{133}, {122}, {132}, {143}.

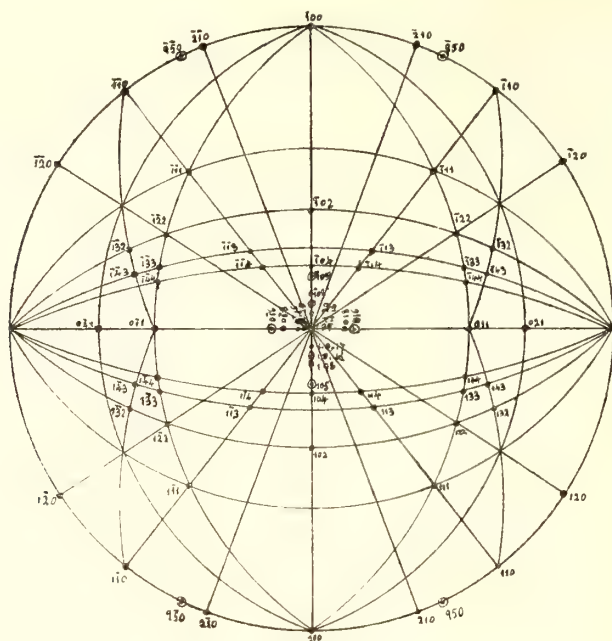



Fig. 6.

Il Goldschmidt nel suo Indice (1) dà per la celestina come sicure le seguenti 56 forme (2):

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (001) | Haüy | 1801 | (108) | Moricand | 1821 | (277) | Schmidt | 1880 |
| (010) | Moricand | 1821 | (2.0.11) | Schmidt | 1880 | (133) | Haüy | 1822 |
| (100) | Haüy | 1801 | (104) (3) | Haüy | 1822 | (122) | Mohs-Haidinger | 1824 |
| (210) | Websky | 1857 | (207) | Schmidt | 1880 | (5.12.10) | Websky | 1857 |
| (530) | Auerbach | 1869 | (103) | Mohs-Zippe | 1839 | (132) | Moricand | 1821 |
| (320) | id. | " | (102) | Haüy | 1801 | (142) | Websky | 1857 |
| (750) | id. | " | (304) | Phillips | 1823 | (324) | id. | " |
| (650) | id. | " | (101) | Hugard | 1850 | (143) | id. | " |
| (110) | Haüy | 1801 | (115) | Grailich-Lang | 1857 | (153) | Arzruni | 1872 |
| (120) | Hugard | 1850 | (114) | Mohs-Zippe | 1839 | (382)? | ? | |
| (0.1.12) | Phillips | 1823 | (113) | id. | " | (135) | Miller | 1852 |
| (018) | Moricand | 1821 | (112) | Schmidt | 1880 | (215) | Panebianco | 1884 |
| (015) | Hugard | 1850 | (111) | Haüy | 1801 | (146) | Websky | 1857 |
| (014)? | ? | | (221) | Arzruni | 1872 | (187) | id. | " |
| (013) | Mohs-Zippe | 1839 | (121) | Grailich-Lang | 1857 | (169) | id. | " |
| (012) | Hugard | 1850 | (131) | Websky | 1857 | (1.24.23) | id. | " |
| (023) | Websky | 1857 | (1.16.16) | id. | " | (1.16.24) | id. | " |
| (011) | Haüy | 1801 | (166) | id. | " | (253) | id. | " |
| (021) | Hugard | 1850 | (144) | Miller | 1852 | | | |

(1) *Index der Kristallformen der Mineralien*, Berlin, 1886.

(2) Ho aggiunto all' indicazione delle forme il nome dell' autore e la data di pubblicazione,

(3) Nel citato lavoro di Goldschmidt si trova per errore di stampa la (102), riportata più sotto, invece della (104).

In seguito lo stesso autore nel lavoro ***Krystallographische Winkeltabellen***, edito a Berlino nel 1897, vi aggiunse le seguenti 12 forme (1):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (124) | Hintze | 1885 | (1.10.10) | Buchrucker | 1891 |
| (908) | Stuber | 1891 | (214) | id. | „ |
| (155) | id. | „ | (105) | Artini | 1893 |
| (524) | id. | „ | (326) | id. | „ |
| (0.1.10) | Buchrucker | 1891 | (705) | Arzruni e Thaddéeff | 1896 |
| (0.1.20) | id. | „ | (1.19.19) | id. | „ |

Il Goldschmidt non avendo riportato nel suddetto lavoro le forme (014) e (382), già citate nella sua prima opera, ridusse le forme note complessivamente a 66, invece di 68; anche Dana (2) non riporta tra le forme note per la celestina la (014) e la (382).

Non si capisce poi come Goldschmidt non abbia tenuto conto di tutte le seguenti forme nuove trovate dall'Artini (3) sin dal 1893 sulla celestina di Romagna: {450}? {230} {087}? {562} e riporta soltanto le forme {105} e {326}.

Lo stesso per la {332} trovata da Arzruni (4) oltre la {705} e la {1.19.19} e della {106} del Buchrucker (5).

Come pure nel lavoro del Goldschmidt non sono indicate la (275) trovata da Liweh (6) al 1887 sopra cristalli di celestina di Lüneburg e la (322) (7) data da A. Koch (8) al 1888, sopra cristalli trovati presso Torda (Ungheria) e la (231) trovata da L. Michel (9) al 1890, sopra cristalli di Brousseval presso Vassy, però non confermata posteriormente dal lavoro di Stöber (10).

A coteste forme vanno aggiunte le seguenti trovate da diversi autori posteriormente al lavoro del Goldschmidt:

{035}, {350}, {580} trovate dal Termier (11), di cui la prima certa e le altre poco probabili, sopra la celestina di Djebel Kebbouch (Tunisia); però secondo Samojloff (12) tali

(1) In questo lavoro invece della (169), si trova per errore di stampa la (129).

(2) DANA, Mineralogy, 1893, p. 905.

(3) ARTINI, Rend. R. Istituto Lombardo di Sc. e Lett. Vol. XXVI, 1893, pag. 324. (Le forme indicate con (?) sono date da facce arrodontate).

(4) ARZRUNI e THADDÉEFF, *Cölestin von Giershagen bei Stadtberge* (Westfalen), Groth's Zeit, XXV, 1896, pag. 38.

(5) BUCHRUCKER, *Die Mineralien der Erzlagerstätten von Leogang in Salzburg*, Groth's Zeit. XIX, 1891, p. 155.

(6) LIWEH, Groth's Zeit. XII, 1887, p. 444.

(7) A. KOCH, *Ein neues Cölestin und Barytvorkommen in der Nähe von Torda in Siebenbürgen*. Teschermak's Mineral. u. Petrog. Mitth. Bd. IX, Wien, 1888 pag. 416.

(8) La forma (322) fu trovata anche dal Millosevich sopra la celestina di Strongoli (Calabria). Rend. Acc. Lincei 1899, p. 344.

(9) L. MICHEL, *Sur un nouveau gisement de celestine*, Boll. Soc. Min. de France, XIII, 1890, pag. 320. (Per la detta forma l'autore dà il seguente valore angolare (001): (231) = 76° 23′, senza specificare se trovato o calcolato).

(10) STÖBER, *Cölestin von Brousseval*, Groth's Zeit. XXI, 1893, p. 339.

(11) TERMIER, Bull. soc. française de minéralogie, 1902, p. 178.

(12) Centrabl. f. Min. 1905, p. 33.

cristalli di celestina sarebbero pseudomorfosi di baritina e le forme nuove del Termier si ridurrebbero a forme semplici, già note.

{0.1.16}, {117}, {119}, {214} date dal Billows (1) sopra cristalli di celestina di Monte Viale nel Vicentino; però la (214) considerata dal Billows come forma nuova, si trova citata nel lavoro del Goldschmidt (2) e fu trovata da Buchrucker (3) sopra cristalli di Leogang.

{017} data dallo Zambonini (4) per i cristalli di celestina di Boratella (Romagna).

{177} trovata da Surgunoff (5) sopra la celestina del Gouvernement di Saratow.

{410}, {10.55.44} date da Kraus e Hunt (6) per la celestina di Maybee, Michigan.

{019}, {327} trovate dal Manasse (7) nei cristalli di Poggio Orlando presso Lornano, Siena.

{176}, {275} date dal Couyat (8) per la celestina di Mokattam (Cairo), però la (275) fu trovata da Liweh (9) nei cristalli di celestina di Lüneburg.

{067} trovata da Eakle (10) sopra cristalli di celestina di San Bernardino County, California.

{0.1.14} indicata dal Couyat (11) per la celestina di Abou Roach, presso la piramide di Gizeh, Egitto.

{1.0.17}, {328} trovate dal Traina (12) su alcuni cristalli di celestina di Sicilia.

{4.0.11}? data dal Manasse (13) come incerta su cristalli di celestina di Spannocchia nel Senese.

{1.0.12}. {016}, {950} trovate da me nella celestina delle zolfare di Sicilia.

In complesso 22 forme nuove le quali sommate a quelle indicate dal Goldschmidt, fanno salire il numero delle forme per la celestina in genere alla cifra ben rimarchevole di 88, non tenendo conto delle seguenti forme incerte o date da facce arrotondate:

{250} Moricand 1821; {1.0.10} Panebianco 1884; {10.3.0} Zimànyi 1887; {231} L. Michel 1890; {450}, {087} Artini 1893; {035}, {350}, {580} Termier 1902; {328} Traina 1908 e {4.0.11} Manasse 1918.

(1) Riv. di min. e crist. italiana, XXI, 1904.
(2) *Kryst. Winkeltabellen*, 1897, p. 99.
(3) Groth's Zeit. XIX, 1891, p. 155.
(4) Rend. R. Acc. Lincei, 1° sem. 1904.
(5) Bull. Soc. Nat. Moscow, 1904.
(6) Groth's Zeit. f. Kryst. u. Min. XLII, 1907.
(7) Atti Soc. Toscana di Sc. Nat. Pisa, 1907.
(8) Comp. rendus, Paris 1907.
(9) Groth's Zeit, f. Kryst. u. Min. 1887, XII, p. 441.
(10) University of California, Pubblications, Geol. Bull. 1908.
(11) Bull. soc. franç. de min. 1908, p. 264.
(12) L. c.
(13) Processi verbali della Società Toscana di Scienze Naturali, Vol. XXVI, Pisa, 1918.

* * *

Nella celestina delle zolfare di Sicilia variabile è l' aspetto delle facce, alcune sono piane, altre leggermente ondulate, altre ancora striate o arabescate.

La (001) non si riscontra in tutti i cristalli e si presenta ora stretta ora ampia, spesso striata parallelamente allo spigolo [010]; anche le forme (102) e (104), il più delle volte sono striate secondo [010]. Quando nel cristallo è presente la (104), non è difficile che si tratta di minutissima combinazione oscillatoria tra questa faccia e la (001).

La (100) è presente in pochi cristalli, per lo più con facce abbastanza grandi, opache e striate parallelamente allo spigolo [001]; qualche volta al posto del pinacoide (100) si trovano numerose faccettine date da (110) · ($1\bar{1}0$), (v. Fig. 2, Tav. I e Fig. 3, Tav. II).

Tra le forme di piramidi la (111) e la (122) sono le più frequenti e si presentano quasi sempre con figure triangolari; quelle relative alla (111) brillantissime e perfette, di rado molto estese come quelle della (122). Le altre forme, tranne la (144) nell' abito piramidale, sono generalmente in liste sottili; la (143) poi è la più rara.

Buonissime si presentano le faccettine della (113), sviluppate e con discreta frequenza tra le zone [111 , 001] e [102 , 011], mentre la (114) si trova con facce piccole.

La (105) nuova per la celestina delle zolfare di Sicilia è stata da me osservata in due cristallini, con faccettine piccole, ma lucenti.

I valori angolari da me ottenuti per questa forma sono i seguenti:

| Spigoli | Limite delle misure | Medie | Calcolati | Differenze |
|---|---|---|---|---|
| (001) : (105) | 18° 12′ — 18° 16′ | 18° 14′ 0″ | 18° 12′ 3″ | + 1′ 57″ |
| (110) : (105) | 75 44 — 75 47 | 75 45 50 | 75 44 47 | + 1 3 |
| (011) : (105) | 54 14 — 54 19 | 54 16 30 | 54 16 30 | — |

Le seguenti forme nuove per la celestina in genere (1.0.12), (950) e (016) sono state da me riscontrate in pochi cristalli, con buonissime facce e ottime per le misure, in base alle quali determinai il simbolo.

| Spigoli | Limite delle misure | Medie | Calcolati | Differenze |
|---|---|---|---|---|
| (001) : (1.0.12) | 7° 9′ — 7° 16′ | 7° 14′ 0″ | 7° 12′ 4′ | + 1′ 56″ |
| (110) : (1.0.12) | 84 15 — 84 26 | 84 20 0 | 84 19 45 | + 0 15 |
| (011) : (1.0.12) | 52 22 — 52 27 | 52 24 20 | 52 25 30 | — 1 10 |
| (102) : (950) | 54 20 — 54 26 | 54 23 0 | 54 22 4 | + 0 56 |
| (110) : (950) | 14 29 — 14 36 | 14 32 0 | 14 31 53 | + 0 7 |
| (950) : ($9\bar{5}0$) | 46 48 — 46 56 | 46 52 0 | 46 53 20 | — 1 20 |
| (001) : (016) | 12 2 — 12 9 | 12 5 30 | 12 4 56 | + 0 34 |
| (102) : (016) | 40 50 — 40 58 | 40 55 30 | 40 56 24 | — 0 54 |

Tutte le altre forme non hanno particolarità degni di rilievo.

## Combinazioni

In complesso la maggior parte dei cristalli non si presentano ricchi di facce e le combinazioni osservate da me e non indicate da altri autori che si sono occupati della celestina delle zolfare di Sicilia sono:

1. {011} {102}
2. {102} {144} (v. fig. 1 intercalata nel testo a pag. 2)
3. {102} {110} {144} (v. fig. 2 e 3 idem)
4. {102} {110} {011} {100} (v. fig. 1 tav. I)
5. {102} {110} {011} {111} {143}
6. {102} {110} {011} {111} {133} (v.fig. 5 tav. I)
7. {001} {110} {011} {102} {111} (v. fig. 4 tav. I)
8. {001} {110} {011} {102} {100} {210}
9. {001} {110} {011} {102} {100} {950} (v. fig. 3 tav. I)
10. {001} {110} {011} {102} {100} {122} (v. fig. 6 tav. I)
11. {001} {110} {011} {102} {104} {111}
12. {001} {110} {011} {102} {120} {122}
13. {001} {110} {011} {102} {210} {111} {122}
14. {001} {110} {011} {102} {100} {111} {122} (v. fig. 8 tav. I)
15. {001} {110} {011} {102} {104} {018} {113}
16. {001} {110} {011} {102} {100} {210} {113}
17. {001} {110} {011} {102} {120} {111} {122}
18. {001} {110} {011} {102} {111} {122} {144}
19. {011} {110} {102} {104} {018} {114} {144}
20. {001} {110} {011} {102} {950} {122} {143} {132}
21. {001} {110} {011} {102} {105} {016} {113} {122}
22. {001} {110} {011} {102} {104} {113} {016} {1.0.12}

mentre le seguenti combinazioni sono tra quelle indicate dagli autori e da me riscontrate:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | {100} {011} | Auerbach |
| 2. | {011} {110} | „ |
| 3. | {100} {110} {011} | „ |
| 4. | {011} {110} {102} | „ |
| 5. | {001} {011} {102} | „ |
| 6. | {001} {110} {011} {102} (la più frequente) | „ |
| 7. | {011} {110} {102} {111} | „ |
| 8. | {001} {110} {011} {102} {104} | „ |
| 9. | {001} {011} {021} {102} {111} (molto rara) | „ |
| 10. | {001} {110} {011} {102} {100} | „ |
| 11. | {001} {110} {011} {102} {122} (v. fig. 7 tav. I) | „ |
| 12. | {100} {110} {011} {102} {111} | „ |
| 13. | {001} {110} {011} {102} {143} | „ |
| 14. | {001} {110} {011} {102} {114} {111} | „ |
| 15. | {001} {110} {011} {102} {100} {111} | „ |
| 16. | {001} {110} {011} {102} {111} {132} | „ |
| 17. | {001} {110} {011} {102} {108} {111} | „ |
| 18. | {001} {110} {011} {102} {122} {143} | „ |
| 19. | {001} {110} {011} {102} {114} {111} {143} | „ |
| 20. | {001} {110} {011} {102} {210} | Schrauf |
| 21. | {011} {102} {133} | Lasaulx |
| 22. | {001} {110} {011} {102} {104} {1.0.17} | Traina |
| 23. | {001} {110} {011} {102} {100} {111} {144} | „ |
| 24. | {001} {110} {011} {102} {120} {111} {122} {144} | „ |
| 25. | {001} {110} {011} {102} {104} {0.1.20} {0.1.16} {018} | „ |

## Costanti cristallografiche

Le costanti cristallografiche calcolate sino ad oggi per la celestina di Sicilia sono le seguenti:

0, 77794 : 1 : 1, 28246 Dauber (1)
0, 78039 : 1 : 1, 28280 Kokscharow (2)
0, 78035 : 1 : 1, 28236 Auerbach (3)
0, 78060 : 1 : 1, 28333 Di Franco

quelle da me determinate sopra cristalli di tipo prismatico si avvicinano di più con le costanti di Kokscharow.

Infatti:

| | *a* | : *b* : | *c* |
|---|---|---|---|
| Di Franco | 0,78060 | : 1 : | 1,28333 |
| Kokscharow | 0,78039 | : 1 : | 1,28280 |
| Differenza | 0,00021 | | 0,00053 |

calcolate da:

$$110 : 111 = 25^0\,37' ; \quad 111 : 1\bar{1}1 = 33^0\,42'$$

e per la celestina delle altre località d' Italia si avvicinano di molto con le costanti di Artini (4) 0,781282 : 1, 1,283328, calcolate sopra cristalli di Romagna e per la celestina in genere con le seguenti costanti di Liweh (5) 0,78035 : 1 : 1,28312, ottenute sopra cristalli di Lüneburg, come appare dal seguente quadro ove riporto i rapporti parametrici della celestina delle diverse località.

| Località | Rapporti parametrici | Autori | Indicazioni bibliografiche |
|---|---|---|---|
| 1. Pschow . . . | 0, 78750 : 1 : 1, 28300 | Websky | Zeitschr. geol. Ges. 1857, 9. p. 308. |
| 2. Herrengrund. . | 0, 77895 : 1 : 1, 28005 | A. Auerbach | Wien. Ak. Sitz.-Ber. 1869, 59, p. 574. |
| 3. Dornburg. . . | 0, 78082 : 1 : 1, 28311 | idem | idem » 580. |
| 4. Bristol . . . | 0, 78165 : 1 : 1, 28468 | idem | idem » 570. |
| 5. Rüdersdorf . . | 0, 77895 : 1 : 1, 27530 | Arzruni | Zeitschr. geol. Ges. 1872, 24, » 477. |
| 6. Mokattam . . | 0, 78244 : 1 : 1, 28415 | idem | idem » 481. |
| 7. Giershagen . . | 0, 77962 : 1 : 1, 28533 | idem | idem » 481. |
| 8. Lago Erie . . | 9, 76964 : 1 : 1, 25506 | idem | Groth's Zeit. f. Kryst. u. Min. 1877, 1, p. 171 |
| 9. Jühnde . . . | 0, 779515 : 1 : 1, 28125 | Babcock | N. Jahrb. Min. 1879, p. 835. |

(1) L. c.
(2) L. c.
(3) L. c.
(4) *Contribuzioni di Mineralogia Italiana—Celestina di Romagna.* Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. 1893 p. 323.
(5) Cölestin von Lüneburg, Groth's Zeit. f. K. u. M., 1887, 12 p. 439.

| Località | Rapporti parametrici | Autori | Indicazioni bibliografiche |
|---|---|---|---|
| 10. Perticara . . . | 0, 781168 ; 1 : 1, 281881 | A. Schmidt | Term.-Füz. IV, P. III, 1880. |
| 11. Lüneburg. . . | 0, 78781 : 1 : 1, 29310 | Hintze | Groth's Zeit. f. Kryst. u. Min. 1886, 11, p. 220. |
| 12. Montecchio Maggiore. | 0,7792578 : 1 : 1,2828231 | Negri | Riv. it. di min. e crist. 1887, 1, p. 36. |
| 13. idem . | 0, 77739 : 1 : 1, 27354 | Bettanini | Riv. Scient.-Ind. Firenze 1887. |
| 14. Coimbra . . . | 0, 77894 : 1 : 1, 28398 | Drabant (1) | Groth's Zeit. f. K. u. M. 1887, 12, p. 231. |
| 15. Aust Ferry . . | 0, 78222 : 1 : 1, 28113 | idem | idem » 230. |
| 16. Conil . . . . | 0, 78005 : 1 : 1, 28225 | idem | idem » 232. |
| 17. Moron. . . . | 0, 78924 : 1 : 1, 27904 | idem | idem » 232. |
| 18. Lüneburg . . | 0, 78035 : 1 : 1, 28312 | Liweh | idem » 439. |
| 19. Dobogò . . . | 0, 78093 : 1 : 1, 28183 | Zimànyi | Math-és term. tud. Ertesitö, 1887, p. 86. |
| 20. Leogang . . . | 0, 78199 : 1 : 1, 28380 | Buchrucker | Groth's Zeit. f. K. u. M. 1891, 19, p. 156. |
| 21. idem . . | 0, 78035 : 1 : 1, 28919 | idem | idem » 156. |
| 22. Scharfenberg . | 0, 78075 : 1 : 1, 2834 | Stuber | idem » 437. |
| 23. idem . . | 0, 78341 : 1 : 1, 29618 | idem | idem » 437. |
| 24. Pylle-Hill. . . | 0, 78222 : 1 : 1, 28225 | Grunenberg | Inaug.Diss.Univ. Erlangen, Breslau, 1892 p.39. |
| 25. idem . . | 0, 78333 : 1 : 1, 28687 | idem | idem » 40. |
| 26. idem . . | 0, 78575 : 1 : 1, 29237 | idem | idem » 40. |
| 27. Exeter. . . . | 0, 78309 : 1 : 1, 28610 | idem | idem » 39. |
| 28. Aust-Ferry . . | 0, 78857 ; 1 : 1, 30010 | idem | idem » 40. |
| 29. idem . . | 0, 78434 : 1 : 1, 28533 | idem | idem » 41. |
| 30. Brousseval . . | 0, 78031 : 1 : 1, 28263 | F. Stöber | Groth's Zeit. f. K. u. Min. 1893, 21, p. 340. |
| 31. Ville-sur-Saulx . | 0, 78057 : 1 : 1, 27972 | idem | idem » 342. |
| 32. Romagna. . . | 0, 781282 : 1 : 1, 283328 | Artini | Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. 1893, p. 323. |
| 33. Westerelgen . . | 0, 7789 : 1 : 1, 2800 | Bücking (2) | Sitz.-Ber. Akad. d. Wissensch., Berlin 1895, 28, p. 533. |
| 34. Capo S. Elia. . | 0, 7814 : 1 : 1, 2822 | S. Popoff | Bull. Soc. Imp. Nat. d. Mosckva, 1900, 4, p. 477. |
| 35. Tegernsee . . | 0, 77918 : 1 : 1, 2824 | Sustschinsky | Groth's Zeit. f. Kryst. u. Min. 1901, 34, p. 567. |
| 36. Wymore (Nebraska) | 0, 78058 : 1 : 1, 28306 | Rogers | Sch. of Mines Quart. 1902, 23, p. 133. |
| 37. Monte Viale . . | 0,7826503 : 1 : 1,2796757 | Billows | Riv. it. di Min. e Crist. 1904, 31, p. 21. |
| 38. Maybee (Michigan). | 0, 7781 : 1 : 1, 2673 | Kraus e Hunt | Groth's Zeit. f. K. u. Min. 1907, p. 1. |
| 39. Mokattam. . . | 0, 78105 : 1 : 1, 28148 | Couyat | Comptes-rendus 1907, p. 504. |

(1) G. DRABANT nel seguente lavoro di C. Bärwald. *Untersuchung einiger Cölestine*, Zeitsch. f. Kryst. u. Min. XII, 1887, p. 228.

(2) Lo stesso rapporto d' assi per la celestina di Herrengrund, trovato da Auerbach (vedi N. 2).

Totale trentanove e quattro per la celestina di Sicilia, complessivamente quarantatre rapporti parametrici, dai quali risulta che il parametro $a$, nelle prime cifre decimali, ha per limiti da 0, 769 a 0, 789; però una buona parte dei dati suddetti si avvicinano al valore 0, 780; mentre il parametro $c$ ha per limiti da 1, 255 a 1, 300, e più della metà dei valori oscillano tra 1, 281 a 1, 283, sicchè i parametri da me calcolati vanno d'accordo e si approssimano di più con quelli ottenuti dalla maggior parte degli autori.

Nella seguente tabella sono posti gli angoli misurati, messi a confronto con quelli calcolati in base alle mie costanti:

| Spigoli misurati | Angoli osservati | | Angoli calcolati | Differenza esper.-calc. |
|---|---|---|---|---|
| | Limiti | Medie | | |
| (110) : (111) | 25° 35′ — 25° 39′ | 25° 37′ 0″ | * | |
| (111) : (1$\bar{1}$1) | 33 41 — 33 44 | 33 42 0 | * | |
| (001) : (011) | 52 2 — 52 5 | 52 3 30 | 52° 4′ 25″ | — 0′ 55″ |
| (001) : (1.0.17) | 5 29 — 5 34 | 5 32 20 | 5 31 25 | + 0 55 |
| (001) : (1.0.12) | 7 9 — 7 16 | 7 14 0 | 7 12 4 | + 1 56 |
| (001) : (108) | 11 34 — 11 38 | 11 36 0 | 11 36 46 | — 0 46 |
| (001) : (105) | 18 12 — 18 16 | 18 14 0 | 18 12 3 | + 1 57 |
| (001) : (104) | 22 18 — 22 22 | 22 20 25 | 22 20 32 | — 0 7 |
| (001) : (102) | 39 23 — 39 28 | 39 26 0 | 39 25 13 | + 0 47 |
| (001) : (0.1.20) | 3 36 — 3 45 | 3 40 0 | 3 39 26 | + 0 34 |
| (001) : (0.1.16) | 4 30 — 4 39 | 4 35 0 | 4 35 10 | — 0 10 |
| (001) : (018) | 9 5 — 9 12 | 9 8 0 | 9 6 48 | + 1 12 |
| (001) : (016) | 12 2 — 12 9 | 12 5 30 | 12 4 56 | + 0 34 |
| (001) : (114) | 27 27 — 27 34 | 27 30 30 | 27 32 16 | — 1 46 |
| (001) : (113) | 34 45 — 34 49 | 34 47 0 | 34 48 28 | — 1 28 |
| (001) : (144) | 53 19 — 53 28 | 53 25 30 | 53 25 17 | + 0 13 |
| (001) : (133) | 54 20 — 54 29 | 54 24 0 | 54 22 27 | + 1 33 |
| (001) : (122) | 56 40 — 56 45 | 56 42 50 | 56 43 44 | — 0 54 |
| (001) : (143) | 60 49 — 60 56 | 60 53 45 | 60 54 40 | — 0 55 |
| (001) : (132) | 64 20 — 64 34 | 64 27 0 | 64 27 51 | — 0 51 |
| (110) : (1$\bar{1}$0) | 75 53 — 76 0 | 75 58 0 | 75 57 6 | + 0 54 |
| (110) : ($\bar{1}$10) | 103 58 — 104 7 | 104 4 0 | 104 2 54 | + 1 6 |
| (110) : (102) | 59 54 — 59 59 | 59 57 30 | 59 57 50 | — 0 20 |
| (110) : (104) | 72 29 — 72 35 | 72 32 30 | 72 33 48 | — 1 18 |
| (110) : (105) | 75 44 — 75 47 | 75 45 50 | 75 44 47 | + 1 3 |
| (110) : (108) | — | 80 51 0 | 80 52 12 | — 1 12 |

| Spigoli misurati | Angoli osservati | | Angoli calcolati | Differenza esper.-calc. |
|---|---|---|---|---|
| | Limiti | Medie | | |
| (110) : (1.0.12) | 84° 15′ — 84° 26′ | 84° 20′ 0″ | 84° 19′ 45″ | + 0′ 15″ |
| (110) : (1.0.17) | — | 85 39 0 | 85 38 54 | + 0 6 |
| (110) : (950) | 14 29 — 14 36 | 14 32 0 | 14 31 53 | + 0 7 |
| (110) : (210) | 16 38 — 16 41 | 16 40 0 | 16 39 18 | + 0 42 |
| (110) : (120) | 19 20 — 19 26 | 19 22 30 | 19 22 57 | — 0 27 |
| (110) : (122) | 37 48 — 38 0 | 37 54 50 | 37 56 10 | — 1 20 |
| (011) : (111) | 45 15 — 45 20 | 45 17 15 | 45 17 57 | — 0 42 |
| (011) : $(01\bar{1})$ | 75 48 — 75 51 | 75 50 30 | 75 51 10 | — 0 40 |
| (011) : (110) | 60 54 — 61 2 | 60 58 0 | 60 57 47 | + 0 13 |
| (011) : (102) | 61 34 — 61 44 | 61 39 0 | 61 39 8 | — 0 8 |
| (011) : (104) | 55 12 — 55 29 | 55 20 0 | 55 21 14 | — 1 14 |
| (011) : (105) | 54 14 — 54 19 | 54 16 30 | 54 16 30 | — |
| (011) : (108) | 52 54 — 53 3 | 52 59 30 | 52 58 55 | + 0 35 |
| (011) : (1.0.12) | 52 22 — 52 27 | 52 24 20 | 52 25 30 | — 1 10 |
| (011) : (1.0.17) | 52 15 — 52 21 | 52 18 0 | 52 16 50 | + 1 10 |
| (011) : (120) | 48 19 — 48 25 | 48 22 0 | 48 22 40 | — 0 40 |
| (011) : (114) | 39 39 — 39 47 | 39 43 0 | 39 41 55 | + 1 5 |
| (011) : (113) | — | 38 36 0 | 38 34 50 | + 1 10 |
| (011) : (122) | 26 44 — 26 49 | 26 47 50 | 26 48 19 | — 0 29 |
| (011) : (132) | 23 4 — 23 9 | 23 7 40 | 23 8 35 | — 0 55 |
| (011) : (133) | 18 34 — 18 39 | 18 37 0 | 18 36 58 | + 0 2 |
| (011) : (143) | 17 9 — 17 17 | 17 13 0 | 17 11 35 | + 1 25 |
| (011) : (144) | 14 8 — 14 16 | 14 12 10 | 14 10 42 | + 1 28 |
| (102) : (016) | 40 50 — 40 58 | 40 55 30 | 40 56 24 | — 0 54 |
| (102) : (021) | — | 73 43 0 | 73 42 48 | + 0 12 |
| (102) : (210) | 53 39 — 53 47 | 53 44 45 | 53 44 0 | + 0 45 |
| (102) : (950) | 54 20 — 54 26 | 54 23 0 | 54 22 4 | + 0 56 |
| (102) : (120) | 69 57 — 70 1 | 69 59 0 | 69 58 12 | + 0 48 |
| (102) : (113) | 23 0 — 23 9 | 23 4 0 | 23 4 19 | — 0 19 |
| (102) : (114) | — | 23 38 0 | 23 35 36 | + 2 24 |
| (102) : (111) | 38 12 — 38 18 | 38 15 0 | 38 14 50 | + 0 10 |
| (102) : (122) | 44 39 — 44 48 | 44 43 50 | 44 45 9 | — 1 19 |
| (102) : (133) | 49 13 — 49 21 | 49 17 0 | 49 15 22 | + 1 38 |

| Spigoli misurati | Angoli osservati | | Angoli calcolati | Differenza esper.-calc. |
|---|---|---|---|---|
| | Limiti | Medie | | |
| (102) : (144) | 51°56′ — 52° 3′ | 52° 0′ 0″ | 51°59′10″ | + 0′ 50″ |
| (102) : (132) | 55 59 — 56 6 | 56 3 30 | 56 4 52 | — 1 22 |
| (104) : (114) | — | 16 33 0 | 16 31 46 | + 1 14 |
| (104) : (144) | 49 50 — 49 59 | 49 54 0 | 49 53 14 | + 0 46 |
| (210) : (2$\bar{1}$0) | 42 34 — 42 41 | 42 37 50 | 42 38 30 | — 0 40 |
| (021) : (0$\bar{2}$1) | — | 137 24 0 | 137 25 38 | — 1 38 |
| (950) : (9$\bar{5}$0) | 46 48 — 46 56 | 46 52 0 | 46 53 20 | — 1 20 |
| (120) : (111) | 31 39 — 31 49 | 31 44 0 | 31 43 22 | + 6 38 |
| (113) : (114) | 7 15 — 7 20 | 7 18 0 | 7 16 12 | + 1 48 |
| (143) : (132) | 5 54 — 6 2 | 5 58 0 | 5 57 0 | + 1 0 |
| (132) : (122) | 11 16 — 11 21 | 11 19 30 | 11 19 44 | — 0 14 |

## Cristalli geminati

Nessuno sino ad oggi ha descritto cristalli geminati di celestina.

Nelle zolfare di Sicilia essi sono rarissimi, di piccole dimensioni (circa mm. 3), i due individui non sono di uguale grandezza e appartengono al tipo prismatico con le combinazioni {110} {011} {102} e {001} {110} {011} {102}, che sono le più comuni della celestina.

I geminati osservati sono di due tipi: geminati secondo {110} e geminati secondo {102} (fig. 7 e 8).

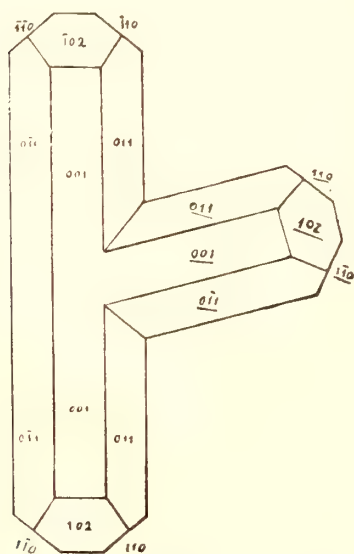



Fig. 7.

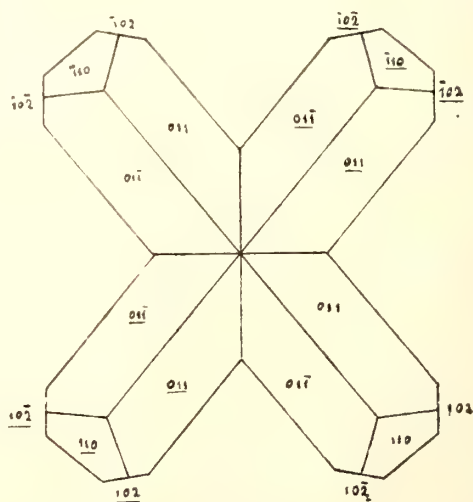



Fig. 8.

## Figure di corrosione

Alcuni tipi di cristalli di forma prismatica con la combinazione {110} {011} {102} trattati con $H_2SO_4$ a temperatura ordinaria dopo circa sei giorni mi diedero sulle facce {110} e {201} delle figure di corrosione in rilievo a forma raggiata.

In altri cristalli con la combinazione {001} {110} {011} {102}, trattati come sopra, dopo sei giorni le facce {110} si ridussero in forma mammellonare, le facce della {102} si trasformarono in due faccettine triangolari ciascuna d' una forma di piramide indeterminabile, mentre il prisma {011} si ridusse con la superficie costituita da incavi rettangolari disposti in fila; e sulla base osservai un accenno delle figure di corrosione a forma raggiata.

Un cristallo della forma tipo baritina con la combinazione {001} {011} {102} {110}, dopo sei giorni dell' azione dell' acido solforico a freddo presentò le facce {102} e {011} opache; ben conservate e lucenti le facce {110} e {001} e al posto degli spigoli d'incontro della {102} con la {110} comparvero delle faccettine strette e lucenti, appartenenti alla piramide {322}, trovata da Koch (1) nei cristalli di celestina presso Torda nel Siebenbürgen (Ungheria) e dal Millosevich (2) nei cristalli di celestina di Strongoli (Calabria).

Nel cristallo in esame la forma {322} è dovuta alla corrosione per azione dell' acido solforico, ciò che avvalora l' ipotesi del Molengraaf (3) a proposito della presenza di alcune facce nei cristalli di quarzo di Carrara ottenute per azione dell' acido fluoridrico.

Lo stesso cristallo immerso nuovamente nell' acido solforico per altri sei giorni si ridusse più opaco, nella {110} comparve un accenno di figure di corrosione costituite da piccoli incavi rettangolari, inoltre nello spigolo d' incontro della (011) con la (011) notai uno smussamento riferibile al pinacoide (010), mentre questa forma nei cristalli di celestina delle solfare di Sicilia, benchè indicata da Auerbach, non è stata da me osservata nei moltissimi cristalli esaminati.

Da quanto sopra risulta che in relazione al tipo dei cristalli di celestina si hanno, sotto l' influenza dell' acido solforico a freddo, delle differenti figure di corrosione.

## Figure attribuibili a corrosione

Sulle facce di alcuni cristalli di celestina si trovano impiantati piccoli cristallini di zolfo di circa mezzo millimetro, limpidi e brillanti, i quali per essersi formati poco prima della fase ultima di accrescimento della celestina vi si trovano dentro in parte, emergendo pel resto e appena staccati: lasciano l' incavo dato dal cristallino di zolfo.

---

(1) Tschermak' s — Min. u. Petrog. Mitth. IX, 1888 p. 416.

(2) Rend. Acc. Lincei, 1899, p. 344.

(3) Groth's Zeit. f. Kryst. u. Min. XIV, 1888 p. 173.

Tali incavi costituiscono delle figure geometriche, più o meno regolari, secondo la posizione dei cristallini di zolfo, simulando delle figure di corrosione.

I cristallini di zolfo si trovano impiantati sulla celestina di preferenza sulla faccia di base {001} e sul prisma {102}, con posizioni addirittura accidentali e i pochi casi riscontrati con qualche parallelismo di spigoli, rispetto alle facce della celestina, non si possono attribuire ad una data legge, come si è osservato in parecchi casi di associazione di cristalli di natura chimica diversa (1).

In alcuni cristalli di celestina, i cristallini di zolfo impiantati si sono staccati naturalmente, lasciando sulle facce della celestina soltanto le cavità, senza lasciare nessuna traccia di zolfo, ciò che potrebbe indurre ad errore d'interpretazione sulla loro origine cristallografica.

## Inclusioni

I cristalli di celestina messi a riscaldare in un tubo di vetro scoppiettano per le numerose inclusioni che contengono e si frantumano in scheggie lamellari secondo i piani di sfaldatura o in piccoli frammenti.

Nelle parti relativamente fredde del tubicino si depositano moltissime goccioline le quali trattate con le cartine di tornasole mostrano reazione leggermente acida.

Osservati al microscopio i cristalli di celestina si vedono attraversati da piccole cavità di forma irregolare e ramificate, sottili, piatte e disposte nei piani di sfaldatura, ripieni di liquido generalmente incoloro, qualche volta giallo-arancio sbiadito.

## Aggruppamenti

Degni di nota sono i diversi e svariati aggruppamenti dei cristalli di celestina.

1. Cristalli aggruppati in modo da risultare più o meno differenziati tra loro.
2. Cristalli differenziati soltanto all' estremità libera e il resto con le facce riunite in superficie continua come fuse in unico cristallo.
3. Cristalli contenenti subordinati altri cristallini intimamente concresciuti da simulare l' aspetto di un unico individuo cristallizzato con le facce {011} curve.
4. Cristalli con le facce {011} di varii individui addossati in modo da formare degli aggruppamenti a disposizione parallela, con le facce terminali a gradinata.
5. Cristalli aggruppati come sopra, però con una certa rastremazione ad una estremità, e in questo caso non è difficile trovare una certa inflessione a destra o a sinistra che ha fatto nascere quelle teorie delle distorsioni dl Tschermak, Kengott e Bombicci.
6. Cristalli associati in modo da costituire aggruppamenti a struttura fibrosa raggiata.
7. Cristalli aggruppati a ventaglio.

Naturalmente questi diversi tipi di aggruppamenti dipendono dalle condizioni dell' ambiente in cui si formarono.

---

(1) F. WALLERANT — *Cristallographie*, Paris, 1909, pag. 491.

## Riproduzione dei cristalli di celestina

Th. H. Behrens (1) ottenne piccoli cristalli di celestina per azione micro-chimica, trattando a caldo con acido solforico la celestina e lasciando raffreddare.

Gaubert (2) in luogo di lasciare raffreddare la soluzione solforica della celestina la evaporò a secco, mantenendo la temperatura un po' al di sotto dell' ebullizione ed ottenne cristalli di discrete dimensioni.

Io invece trattai i cristalli di celestina con acido solforico a freddo e dopo circa dieci giorni vidi comparire impiantati sulle facce dei cristalli di celestina una infinità di cristallini limpidi e trasparentissimi di celestina di forma prismatica e con le faccettine:

$$\{011\}\ \{110\}\ \{102\}\ \{122\}\ \{001\}\ \text{di rado la}\ \{100\}.$$

Come per le figure di corrosione i diversi tipi di cristalli di celestina presentarono differente comportamento: così il tipo baritina, trattato come sopra, non diede luogo alla formazione dei cristallini di celestina.

Anche Bourgeois (3) applicando il metodo di de Sénarmont (4) per la riproduzione artificiale della baritina trattò sin dal 1887 il solfato di stronzio coll' acqua acidulata con acido cloridrico a caldo verso i 150° e lasciando raffreddare lentamente, ottenne cristalli di celestina. Il deposito e l' accrescimento dei cristalli incominciò versò i 100° ottenendo cristalli di circa qualche millimetro con le facce $\{102\}$ $\{100\}$ $\{011\}$ e $\{110\}$.

Operando con acido solforico a freddo io invece ottenni cristallini di circa mm. 5 con maggior numero di facce.

---

(1) Verslag. en Mededeel. der Koninkl. Acad. van Wetenschapp. Afdeel. Natuurk. Amsterdam, 2[de] série 17 partie, 1881.

(2) Comptes rendus CXLV, 1907, pag. 877.

(3) Bull. Soc. Française de minéralogie X, 1887, p. 323.

(4) Ann. chim. phys, 1851, XXXII, p. 157.

# SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

## TAV. I.

Diversi tipi di cristalli di CELESTINA.

## TAV. II.

**Fig. 1.** — Gruppo di cristalli di CELESTINA del tipo prismatico, con cristallini scalenoedrici di calcite. (*fot. a* $\frac{1}{2}$ *grand. nat.*)

**Fig. 2.** — Gruppo di cristalli di CELESTINA del tipo *baritina*. (*fot. a grand. nat.*)

**Fig. 3.** — Gruppo di cristalli di CELESTINA del tipo *prismatico*, al posto del pinacoide (100) numerosissime faccettine del prisma $\{110\}$. (*fot. a* $\frac{1}{2}$ *grand. nat.*)

**Fig. 4.** — Stalattite formata di cristalli di CELESTINA del tipo *piramidale*. (*fot. per trasparenza*, $\frac{2}{3}$ *grand. nat.*)

**Fig. 5.** — Stalattite di aragonite, rivestita da cristallini scalenoedrici di calcite, con piccoli cristalli di CELESTINA della forma *prismatica* e grossi cristalli della forma *botroidale*. (*fot. a grand. nat.*)

**Fig. 6.** — Gruppo di stalattiti costituite di CELESTINA della forma *piramidale*. (*fot. per trasparenza*, $\frac{2}{3}$ *grand. nat.*)

S. di Franco dis. Stab. Lit. C. Varoli - Milano

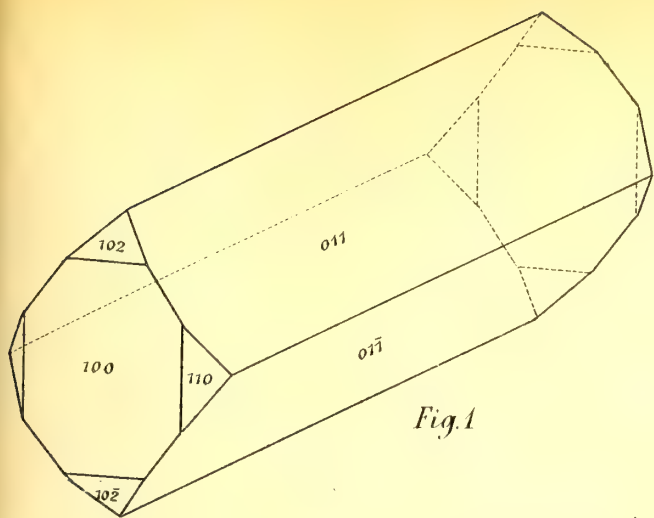
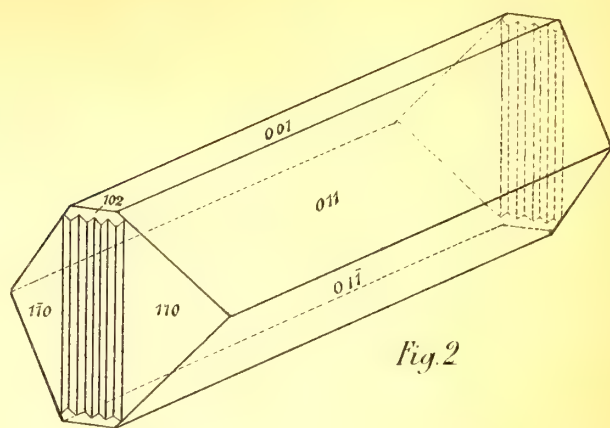
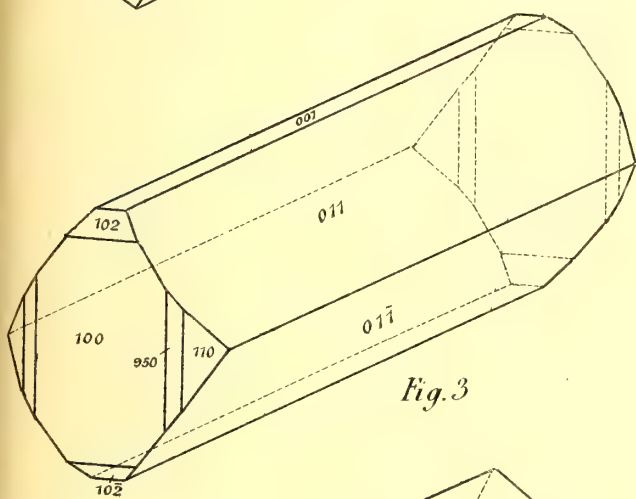
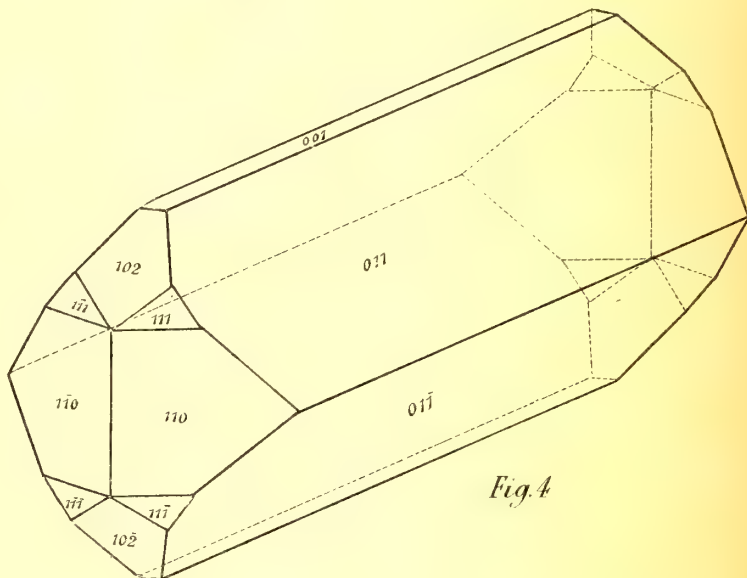
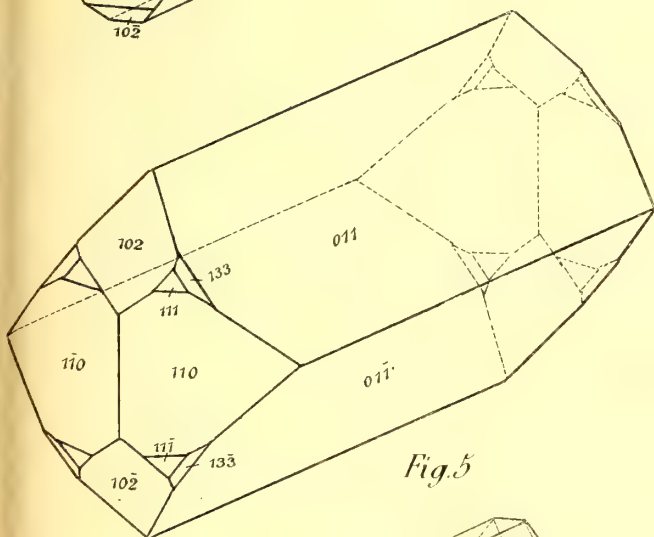
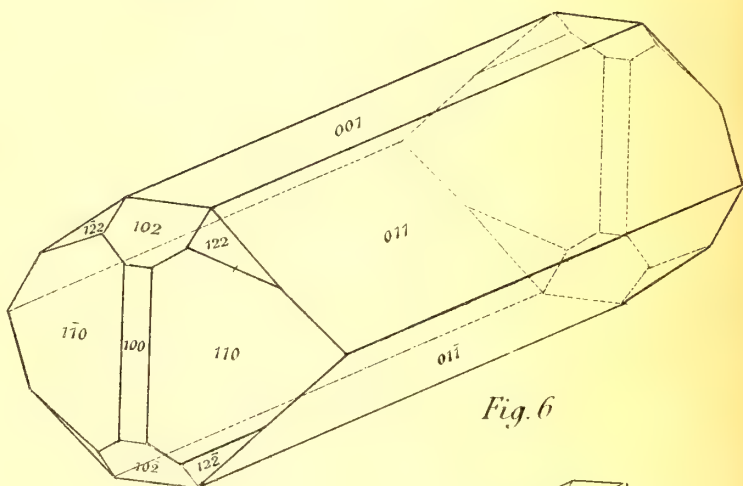



Fig. 1

Fig. 2

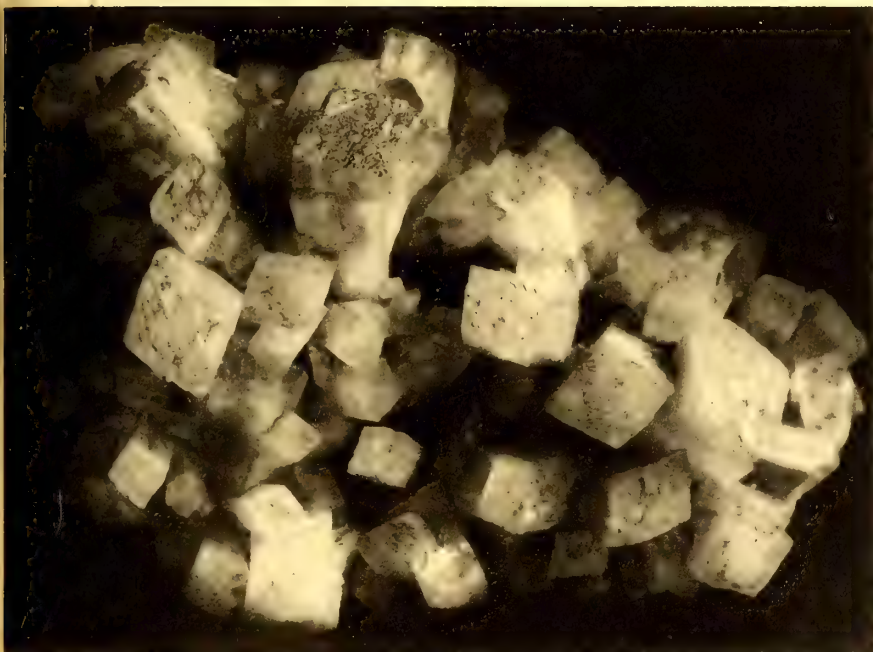
Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

S. di Franco fot.

**Memoria XX.**


## Prof. G. SCORZA


# Alcune questioni di geometria sopra una varietà abeliana qualunque

Basta considerare la teoria delle corrispondenze algebriche situate sopra una curva algebrica dal punto di vista trascendente, per accorgersi subito che essa può essere estesa nelle sue linee generali alle varietà abeliane.

È appunto tale estensione l'oggetto dei primi due paragrafi di questa Nota ; dai quali risulta che mentre in taluni casi ai teoremi per le curve rispondono per le varietà abeliane teoremi perfettamente analoghi, in altri fra i teoremi delle due teorie non vi è alcuna analogia.

La ragione intima delle simiglianze e delle differenze che intercedono tra le curve algebriche e le varietà abeliane, per quanto ha tratto alla teoria delle corrispondenze algebriche situate su di esse, è da ravvisare nel seguente fatto.

Il SEVERI dimostrò nel 1905, per via trascendente, [1]) che:

*Se una serie algebrica* $\infty^1$ *irriducibile di gruppi di punti situata sopra una curva algebrica irriducibile è tale che risultino equivalenti i gruppi di cui ciascuno è somma dei gruppi della serie passanti per un punto della curva, addirittura i gruppi della serie sono fra loro equivalenti ;*

poi, nel 1906, valendosi di un notevole teorema geometrico di CASTELNUOVO, osservò, [2]) che nell'enunciato di questa sua proposizione l'ipotesi della irriducibilità della serie poteva esser lasciata cadere.

Ebbene, imitando passo per passo il ragionamento trascendente di SEVERI si arriva facilmente a stabilire che :

*Se una serie algebrica* $\infty^p$ *irriducibile di gruppi di punti situata sopra una varietà abeliana della dimensione* p *è tale che risultino appartenenti a una stessa* $g_n^{n-1}$ *di* CASTELNUOVO [3]) *i gruppi di cui ciascuno è somma dei gruppi della serie passanti per un punto della varietà, addirittura i gruppi della serie appartengono a una stessa* $g_m^{m-1}$ *di* CASTELNUOVO ;

ma qui non è più possibile sopprimere la condizione dell'irriducibilità della serie senza infirmare l'esattezza del teorema.

Infatti se il teorema valesse senza restrizioni si troverebbe facilmente che sopra una

---

[1]) SEVERI. *Il teorema d'*ABEL *sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, serie 3ª, t. XII, pp. 55-79), nº 1.

[2]) SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXV, Parte seconda, pp. 625-643), nº 10.

[3]) CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XIV, pp. 545-556, 593-598, 655-663), p. 556.

varietà abeliana l'inversa di una trasformazione a valenza zero (vedi più avanti il n° 4) sarebbe anch'essa, se ad indice finito, a valenza zero, ***anche se la trasformazione data fosse riducibile***, cioè spezzabile nella somma di più trasformazioni algebriche; e allora, con tutta facilità, si potrebbe dimostrare valida in generale la parte *b*) del teorema che quì al n° 11 viene dimostrata per le sole trasformazioni univoche.

E tale validità generale di quella proposizione è evidentemente impossibile, perchè la relazione che intercede fra due trasformazioni di cui l'una sia l'inversa dell'altra è simmetrica, mentre non è simmetrica la relazione che passa tra una matrice quadrata e la trasposta della matrice aggiunta.

L'ultimo paragrafo di questa Nota risolve un problema sulle varietà abeliane impure che si presenta con grande frequenza a chiunque si occupi di geometria sopra una tale varietà.

Come è detto a suo luogo il problema in discorso può esser risoluto in due maniere differenti. Qui delle due vie se ne espone soltanto una; l'esposizione dell'altra viene rimandata a un lavoro ulteriore che ne indicherà applicazioni eleganti alla teoria delle superficie iperelliltiche con infiniti fasci ellittici di curve ellittiche.

## I.

## Le trasformazioni algebriche [4]) situate sopra una varietà abeliana.

1. Sia $V$ una varietà abeliana [5]) della dimensione $p$ e $T$ una trasformazione algebrica di indice $\alpha$ situata su di essa.

Sia inoltre

$$\omega \equiv \| \omega_{j\,.\,r} \| \qquad (j = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p)$$

la matrice riemanniana cui appartiene $V$, e siano $u_1, u_2, \dots, u_p$ le variabili indipendenti delle funzioni abeliane che appartengono alla matrice $\omega$ e forniscono una rappresentazione parametrica di $V$.

Se per $T$ al punto $P \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$ di $V$ corrispondono gli $\alpha$ punti

$$\overset{(\mu)}{P} \equiv \left(\overset{(\mu)}{u_1}, \overset{(\mu)}{u_2}, \dots, \overset{(\mu)}{u_p}\right) \qquad (\mu = 1, \dots, \alpha),$$

---

[4]) Intendiamo per « trasformazioni algebriche », senz'altro, le tràsformazioni algebriche *ad indice finito*, poichè di queste sole ci occupiamo nel presente lavoro. Però dalle nostre considerazioni non si intendono escluse le trasformazioni algebriche che pure essendo ad indice finito hanno per inverse delle trasformazioni algebriche ad indice infinito.

[5]) Per la definizione di varietà abeliana che qui si intende adottata v. G. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di* RIEMANN *e ad alcune sue applicazioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t, XLI (1916, 2° semestre), pp. 263-380], nota [13]) a piè della pagina 269 e pag. 330-331.

per un ragionamento ben noto [6]) sarà, rispetto ad $\omega$ come modulo, [7])

$$1)\qquad \sum_{\mu}^{1..\alpha} u_j^{(\mu)} \equiv \sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l + \gamma_j \qquad (j = 1, \dots, p),$$

dove le $\lambda_{j,l}$ e le $\gamma_j$ sono delle costanti, e inoltre le $\lambda_{j,l}$ sono tali che esistono degli interi (relativi) $a_{r,s}$ per modo che si abbia

$$2)\qquad \sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r} = \sum_{s}^{1..2p} a_{r,s}\, \omega_{j,s} \qquad (j = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p).$$

Data $T$, il gruppo delle costanti $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ è individuato solo rispetto ad $\omega$ come modulo, ma invece le costanti $\lambda_{j,l}$ sono assolutamente individuate. E allora, come è noto, [8]) in virtù delle 2), anche gli interi $a_{r,s}$ sono univocamente determinati.

In base alle 2), la sostituzione

$$3)\qquad x_r \mid a_{r,1}\, x_s + \dots + a_{r,2p}\, x_{2p} \qquad (r = 1, \dots, 2p)$$

è una sostituzione riemanniana (della matrice $\omega$, o come anche diremo) di $V$; [9]) essa si dirà la sostituzione riemanniana di $V$ ***legata*** a $T$.

2. Assegnata comunqne una sostituzione riemanniana di $V$ esisteranno su $V$ trasformazioni algebriche legate ad essa?

Sia la 3) una qualunque sostituzione riemanniana di $V$ e si considerino i numeri $\lambda_{j,l}$ determinati in modo univoco dai coefficienti della 3) mediante le 2).

---

[6]) Cfr. A. HURWITZ, *Über algebraisehe Correspondenzen und das verallgemeinert Correspondenzprincip* (Mathematische Annalen, Bd. 28 (1886), pp. 561-585), pag. 563.

[7]) Due gruppi di numeri $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ li diciamo *congrui* rispetto a $\omega$ come *modulo* e scriviamo

$$\alpha_j \equiv \beta_j \qquad (j = 1, 2, \dots, p : \text{mod } \omega)$$

quando si ha

$$\alpha_j - \beta_j = \sum_{r}^{1..2p} x_r\, \omega_{j,r} \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

con le $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ intere (relative).

[8]) Cfr. SEVERI, *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* [Mathematische Annalen, Bd. 74 (1913), pp. 515-544], p. 518.

[9]) Cfr. loc. cit., [5]) Parte I, n° 20. Veramente, data $V$, $\omega$ è individuata solo di fronte alla relazione di *equivalenza*, quindi le sostituzioni riemanniane di $V$ secondo la dicitura adottata nel testo sono individuate solo di fronte al gruppo delle sostituzioni unimodulari a coefficienfi interi su $2p$ variabili indipendenti; ma ciò non dà luogo, per i nostri scopi, ad alcun inconveniente.

Poi si faccia corrispondere al punto $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ di $V$ il punto $(u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ per cui si ha

$$u'_j = \sum_l^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l + \gamma_j \qquad (j = 1, \dots, p), \tag{4}$$

le $\gamma_j$ essendo delle costanti arbitrariamente fissate.

Dico che per tal modo resta costruita su $V$ una trasformazione univoca, algebrica, legata alla sostituzione 3) e che quindi la risposta alla domanda fatta più sopra è affermativa.

Infatti, per dimostrare l'univocità e l'algebricità della trasformazione che sole hanno bisogno di essere giustificate, suppongasi, com'è lecito, che lo spazio cui appartiene $V$ sia un $S_{p+1}$ e, dette $X_1, \dots, X_{p+1}$ le coordinate del punto $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ scorrente su $V$, siano le

$$X_i = f_i\,(u_1, u_2, \dots, u_p) \qquad (i = 1, \dots, p+1)$$

le equazioni che dànno la rappresentazione parametrica di $V$ mediante funzioni abeliane appartenenti alla matrice $\omega$.

Le coordinate $X'_j$ del punto $(u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ definito dalle 4), per l'ipotesi fatta sui numeri $\lambda_{j,l}$, risultano funzioni abeliane di $u_1, u_2, \dots, u_p$ con $2p$ sistemi di periodi nei $2p$ sistemi di numeri forniti dalle colonne di $\omega$; quindi, per un teorema classico di WEIERSTRASS,[10] ciascuna delle $X'_i$ è una funzione razionale delle $f_i$, cioè delle $X_i$.

3. Raccogliendo le osservazioni fatte nei n[i] 1 e 2 abbiamo il seguente teorema:

*Ad ogni trasformazione algebrica appartenente a* V *è legata una sostituzione riemanniana di* V; *ma a ciascuna sostituzione sì fatta sono legate infinite trasformazioni algebriche situate su* V.

In altri termini:

*Le trasformazioni algebriche di una varietà abeliana possono essere distribuite in infinite classi contenenti ciascuna infinite trasformazioni, corrispondentemente alle infinite sostituzioni riemanniane della varietà. Ciascuna classe è l'insieme delle trasformazioni algebriche legate a una stessa sostituzione riemanniane e può dirsi la classe legata a tale sostituzione.*

4. La sostituzione

$$x_r \mid \lambda\, x_r \qquad (r = 1, \dots, 2p;\ \lambda \text{ intero relativo qualunque}) \tag{5}$$

comparisce sempre fra le sostituzioni riemanniane di $V$.

---

[10]) Vedi, per es., KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Teubner, Leipzig, 1903), pag. 117.

Le trasformazioni legate ad essa si diranno le ***trasformazioni a valenza*** $-\lambda$ [11]).

Se l'indice di moltiplicabilità (di $\omega$, cioè) di $V$ è nullo, [12]) le sostituzioni riemanniane di $V$ sono tutte del tipo 5), e viceversa; dunque:

***Le trasformazioni a valenza esauriscono tutte le possibili trasformazioni algebriche situate sopra una varietà abeliana quando, e solo quando, questa è ad indice di moltiplicabilità nullo.***

Volendo, sarebbe facile assegnare delle trasformazioni a valenza situate sopra una varietà abeliana una definizione geometrica analoga a quella delle trasformazioni a valenza situate sopra una curva algebrica [13]).

Come nell'una si fa ricorso alla nozione di serie lineare sopra una curva, così nell'altra basterebbe far ricorso alle $g_n^{n-1}$ di una varietà abeliana definite dal CASTELNUOVO. [14])

5. La classe delle trasformazioni a valenza zero, legata alla sostituzione nulla, si dirà la classe *nulla*.

Due classi legate a sostituzioni riemanniane opposte, $S$ e $-S$, si diranno ***opposte***; e se l'una si indica con $C$, l'altra si indicherà con $-C$.

La classe legata alla sostituzione riemanniana $S_1 + S_2$, somma delle due sostituzioni riemanniane $S_1$ ed $S_2$, si dirà *somma* delle classi $C_1$ e $C_2$ legate alle sostituzioni $S_1$ ed $S_2$ e si indicherà con $C_1 + C_2$; e la classe $C_1 - C_2$, ***differenza*** delle classi $C_1$ e $C_2$ sarà la somma di $C_1$ e $-C_2$.

Dopo ciò apparisce senz'altro che cosa sarà la classe multipla secondo un intero (relativo) $\alpha$ di una classe assegnata; e più in generale che cosa sarà la classe combinazione lineare (omogenea) delle classi $C_1, C_2, \dots, C_m$ secondo gli interi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ che si indicherà con

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_m C_m.$$

Per le classi di trasformazioni conviene introdurre anche la nozione di prodotto definendo però, in vista di quanto sarà osservato tra poco, come ***prodotto*** $C_1 C_2$ delle classi $C_1$ e $C_2$, legate alle sostituzioni $S_1$ ed $S_2$, la classe legata alla sostituzione prodotto di queste ***schierate in ordine inverso***, cioè alla sostituzione $S_2 S_1$.

6. L'utilità delle definizioni ora poste, manifesta per sè, viene messa in rilievo dalle seguenti osservazioni che si giustificano subito:

---

[11]) In accordo con quanto è detto nella nota [9]) si osservi, a giustificazione di questa definizione, che la sostituzione 5) è trasformata in sè da ogni sostituzione del gruppo ivi considerato, anzi da ogni sostituzione lineare omogenea propria sulle stesse variabili. Del resto veggasi quello che vien detto nel testo poco più sotto.

[12]) Per la definizioee dell'indice di moltiplicabilità di $V$, cioè di $\omega$, v. loc. cit. [5]), Parte I, n° 20.

[13]) La nozione di *valenza* per una corrispondenza algebrica sopra una curva algebrica è stata estesa recentemente dal ROSATI [*Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIII (1917), pp. 5-22)] così, che, nel senso da lui stabilito, ogni tale corrispondenza è dotata di una o più valenze; ma è evidente che nel testo quella nozione viene adoperata nel senso più ristretto fissato dallo HURWITZ.

[14]) Loc. cit. [3])

a) *La trasformazione somma di due trasformazioni appartenenti alle classi $C_1$ e $C_2$ appartiene alla classe $C_1 + C_2$;* [15])
quindi, in particolare:

b) *La trasformazione somma di due trasformazioni appartenenti a classi opposte è una trasformazione a valenza zero*;
e:

c) *La trasformazione somma di due trasformazioni a valenza, con le valenze $\gamma'$ e $\gamma''$, è a valenza, e con la valenza $\gamma' + \gamma''$*;

d) *La trasformazione prodotto di due trasformazioni appartenenti alle classi $C_1$ e $C_2$ appartiene alla classe $C_1 C_2$;* [16])
da cui si trae in particolare che:

e) *La trasformazione prodotto di due trasformazioni a valenza con le valenze $\gamma'$ e $\gamma''$, è a valenza, e con la valenza $-\gamma'\gamma''$.*

7. Più classi di trasformazioni si diranno *indipendenti* se non esiste una loro combinazione lineare, secondo interi non tutti nulli, che coincida con la classe nulla; *dipendenti* nel caso contrario.

Se le classi $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ sono indipendenti e sono tali che, detta $C$ una qualsiasi classe di trasformazioni di $V$, si possano determinare degli interi $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ sì che sia $\alpha \neq 0$ e

$$\alpha C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_\rho C_\rho \tag{6}$$

si dirà che le classi $C_1, \ldots, C_\rho$ costituiscono una *base* per le classi di trasformazioni di $V$.

Tale base si dirà poi *minima* se le $C_1, \ldots, C_\rho$ sono tali che nella 6) si può far risultare $\alpha = 1$ qualunque sia $C$; nel qual caso è chiaro che i coefficienti $\alpha_i$ della 6) sono poi individuati appena sia data $C$.

L'esistenza di basi e di basi minime per le classi di trasformazioni di $V$ apparisce subito quando si pensi che per le sostituzioni riemanniane di $V$ esistono infinite basi e infinite basi minime. [17])

Il numero $\rho$ delle classi di trasformazioni di $V$ costituenti una base o una base minima è il massimo numero di classi indipendenti, e si dirà il *numero-base* di $V$.

È chiaro che:

*Il numero-base di una varietà abeliana eguaglia il suo indice di moltiplicabilità aumentato di 1.* [18])

---

[15]) A questa proposizione potrebbe darsi forma più generale introducendo anche qui la nozione di trasformazione *virtuale*, parallelamente a quanto si usa nel caso delle curve; ma la considerazione delle *classi* di trasformazioni anzi che delle trasformazioni singole rende inutile, per gli scopi del testo, l'introduzione di enti virtuali.

[16]) Per la dimostrazione di questo teorema cfr. loc. cit. [5]), Parte II, n° 4.

[17]) Loc. cit. [5]), Parte I, n° 20.

[18]) Questa proposizione assegna un significato geometrico notevole dell'indice di moltiplicabilità di una varietà abeliana. Avvertasi a questo proposito che le considerazioni del testo possono essere estese alle trasformazioni algebriche (con indice finito) di una varietà abeliana in un'altra. Ciò porta, in particolare, a in-

Esso è pertanto eguale ad 1 quando, e solo quando, le trasformazioni algebriche della varietà sono tutte a valenza.

8. Una trasformazione algebrica di $V$ (o la classe a cui essa appartiene) si dirà *speciale* se è legata ad una sostituzione riemanniana di $V$ non nulla ma a modulo nullo. [19])

Ora $V$ ammette sostituzioni riemanniane sì fatte quando, e solo quando, è impura, ossia è tale la matrice $\omega$ a cui appartiene, [20]) dunque:

*Una varietà abeliana ammette classi speciali di trasformazioni quando, e solo quando, è impura.*

## § 2. Le trasformazioni algebriche univoche situate sopra una varietà abeliana.

9. Le trasformazioni della classe legata alla sostituzione riemanniana 3) di $V$ che riescono univoche, se le $\lambda_{j,l}$ sono i numeri determinati mediante le 2) dai coefficienti della 3), sono tutte e sole quelle rappresentate dalle equazioni 4) o, ciò che fa lo stesso, dalle congruenze (mod $\omega$)

$$7) \qquad u'_j \equiv \sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l + \gamma_j \qquad (j = 1, \dots, p),$$

al variare delle costanti $\gamma_j$.

Di qua segue che:

*In ciascuna classe di trasformazioni di* V *esistono infinite trasformazioni univoche. Una di esse è individuata quando sia assegnato il punto in cui deve portare un punto determinato di* V, *e quindi esse costituiscono una schiera continua* $\infty^p$ *che può considerarsi come una varietà abeliana birazionalmente identica a* V.

In particolare le schiere $\infty^p$ di trasformazioni univoche di $V$, contenute nelle classi delle trasformazioni a valenza $+1$ o $-1$, sono le due schiere di trasformazioni birazionali di $V$ in sè stessa della prima o della seconda specie.

10. Per approfondire lo studio delle trasformazioni algebriche univoche situate su $V$ giova premettere la deduzione dalle 2) di alcune notevoli identità.

---

trodurre un *numero-base* per le trasformazioni algebriche tra due varietà abeliane e a riconoscere che esso coincide col *carattere simultaneo* (v. loc. cit. [5]), Parte I, n° 3) delle matrici riemanniane a cui appartengono le due varietà.

Notisi che il numero-base qui accennato, a differenza di quello di cui si parla nel testo, può essere anche nullo. È tale quando le due varietà, cui si riferisce, (cioè le corrispondenti matrici riemanniane) *non sono vincolate.*

[19]) Per le curve algebriche le corrispondenze *speciali* sono state considerate per la prima volta dal ROSATI. V. la sua Memoria: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere* 2 [Annali di Matematica, serie 3ª, vol. XXV, pp. 1-32], § 2.

[20]) Loc. cit. [5]), Parte I, n° 32.

Indichiamo con $A$ e $\Lambda$ i determinanti $|a_{r,s}|$ e $|\lambda_{j,l}|$, e con $A_{r,s}$ e $\Lambda_{j,l}$ gli aggiunti di $a_{r,s}$ e $\lambda_{j,l}$ nei determinanti stessi.

Moltiplichiamo la 2), membro a membro, per $A_{r,t}$ e sommiamo rispetto ad $r$. Otteniamo:

$$\sum_{l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r} = \sum_{r,s}^{1..2p} A_{r,t}\, a_{r,s}\, \omega_{j,s}\ ;$$

ma è

$$\sum_{r,s}^{1..2p} A_{r,t}\, a_{r,s}\, \omega_{j,s} = \sum_{s}^{1..2p} \omega_{j,s} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, a_{r,s} = A\omega_{j,t}\,,$$

dunque:

$$A\,\omega_{j,t} = \sum_{l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r}\,. \tag{8}$$

Adesso moltiplichiamo la 8), membro a membro, per $\Lambda_{j,k}$ e sommiamo rispetto a $j$. Risulterà

$$A \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, \omega_{j,t} = \sum_{j,l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \Lambda_{j,k}\, \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r}\ ;$$

ma

$$\sum_{j,l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \Lambda_{j,k}\, \lambda_{j,l}\, \omega_{l,r} = \sum_{l}^{1..p} \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \omega_{l,r} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, \lambda_{j,l} = \Lambda \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \omega_{k,r}\,,$$

dunque è infine:

$$A \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, \omega_{j,t} = \Lambda \sum_{r}^{1..2p} A_{r,t}\, \omega_{k,r}\,. \tag{9}$$

11. Adesso consideriamo sulla nostra varietà una trasformazione algebrica univoca $T$ legata alla sostituzione riemanniana 3) e siano le 7) le congruenze che la rappresentano analiticamente.

*Se la sostituzione* 3) *è propria* (ossia è $A \neq 0$ e quindi $A > 0$), [21] *l'inversa di* T *è una trasformazione* (*algebrica*)

a) *ad indice finito ed eguale ad* A, [22])

b) *legata alla sostituzione trasposta dell'aggiunta della* 3)

---

[21]) Cfr., loc. cit. [5]), Parte I, n° 22.

[22]) Per il caso $p = 2$ questa parte del teorema fu già dimostrata dallo HUMBERT; e il ragionamento dello HUMBERT, diverso da quello del testo, si estende subito al caso di $p > 2$.

*Dim. di a).* Supponiamo assegnati nella 7) i valori delle $u'_j$ e facciamo vedere che $A$ è il numero delle soluzioni $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, che esse ammettono, incongrue rispetto ad $\omega$.

Le 7) possono scriversi, indicando con le $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ delle indeterminate intere,

$$\sum_{l}^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l = u'_j - \gamma_j + \sum_{t}^{1..2p} x_t\, \omega_{j,t} \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

e queste, siccome $A \neq 0$ e quindi anche $\Lambda \neq 0$ [23]), equivalgono alle equazioni

$$u_k = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, (u'_j - \gamma_j) + \frac{1}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \sum_{t}^{1..2p} x_t\, \Lambda_{j,k}\, \omega_{j,t} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

cioè, per le 9), alle equazioni

$$10) \qquad u_k = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k}\, (u'_j - \gamma_j) + \frac{1}{A} \sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t}\, x_t\, \omega_{k,r} \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Si tratta di far vedere che, facendo variare comunque nelle 10) gli interi $x_t$, fra i sistemi di valori che si ottengono per le $u_k$ quelli incongrui rispetto al modulo $\omega$ sono precisamente in numero di $A$.

Perchè due sistemi di interi per le $x_t$, $x'_t$ e $x''_t$, diano luogo per le $u_k$, mediante le 10), a sistemi di valori congrui rispetto ad $\omega$, occorre e basta che esistano degli interi $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ per cui si abbia

$$\frac{1}{A} \sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t}\, (x'_t - x''_t)\, \omega_{k,r} = \sum_{r}^{1..2p} a_r\, \omega_{k,r} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

ossia

$$\frac{1}{A} \sum_{t}^{1..2p} A_{r,t}\, (x'_t - x''_t) = a_r \qquad (r = 1, \ldots, 2p);$$

quindi occorre e basta che sia, rispetto al modulo $A$,

$$11) \qquad \sum_{t}^{1..2p} A_{r,t}\, (x'_t - x''_t) \equiv 0 \qquad (r = 1, \ldots, 2p).$$

Ora, per il nostro scopo, nelle 10) ciascuno degli interi $x_t$ può esser calcolato rispetto al modulo $A$, e le soluzioni, incongrue rispetto ad $A$, delle congruenze 11) nelle

---

[23]) Veggasi al loc. cit. [5]), Parte I, n° 22 l'identità 11) o, più generalmente, l'identità 10).

$2p$ incognite $(x'_t - x''_t)$ sono in numero di $A^{2p-1}$, [24]) dunque i sistemi di valori per le $u_k$, incongrui rispetto a $\omega$ forniti dalle 10) al variare degli interi $x_t$, sono appunto

$$\frac{A^{2p}}{A^{2p-1}} = A.$$

*Dim. di b).* Stabilito che l' indice dell' inversa di $T$ è $A$, diciamo $P_\mu \equiv (\overset{(\mu)}{u_1}, \overset{(\mu)}{u_2}, \dots, \overset{(\mu)}{u_p})$ $(\mu = 1, \dots, A)$ i punti trasformati in $T^{-1}$ del punto $P' \equiv (u'_1, u'_2, \dots, u'_p)$ e il valore di $\overset{(\mu)}{u_k}$ sia quello che si ottiene dalle 10) ponendovi $x_t = \overset{(\mu)}{x_t}$.

Sarà

$$\sum_{\mu}^{1..A} \overset{(\mu)}{u_k} = \frac{A}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k} (u'_j - \gamma_j) + \frac{1}{A} \sum_{\mu}^{1..A} \sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t} \overset{(\mu)}{x_t} \omega_{k,r} \qquad (k = 1, \dots, p),$$

ossia, posto

$$\gamma'_k = -\frac{A}{\Lambda} \sum_{j}^{1..p} \Lambda_{j,k} \gamma_j + \frac{1}{A} \sum_{\mu}^{1..A} \sum_{r,t}^{1..2p} A_{r,t} \overset{(\mu)}{x_t} \omega_{k,r}$$

e

$$12) \qquad \lambda'_{k,j} = \frac{A}{\Lambda} \Lambda_{j,k},$$

sarà:

$$\sum_{\mu}^{1..A} \overset{(\mu)}{u_k} = \sum_{j}^{1..p} \lambda'_{k,j} u'_j + \gamma'_k \qquad (k = 1, \dots, p);$$

dove, occorre appena avvertirlo, sono indipendenti dalle $u'_j$, non solo le $\lambda'_{k,j}$ ma anche le $\gamma'_k$, perchè gli $A$ sistemi di interi $\overset{(\mu)}{x_t}$ $(\mu = 1, \dots, A)$ sono indipendenti dalle $u'_j$.

Sia ora

$$x_r \mid a'_{r,1} x_1 + \dots + a'_{r,2p} x_{2p} \qquad (r = 1, \dots, 2p)$$

la sostituzione riemanniana legata a $T^{-1}$.

Sarà

$$\sum_{l}^{1..p} \lambda'_{k,l} \omega_{l,r} = \sum_{s}^{1..2p} a'_{r,s} \omega_{k,s} \qquad (k = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p),$$

cioè, per le 12),

$$\frac{A}{\Lambda} \sum_{l}^{1..p} \Lambda_{l,k} \omega_{l,r} = \sum_{s}^{1..2p} a'_{r,s} \omega_{k,s} \qquad (k = 1, \dots, p;\ r = 1, \dots, 2p).$$

---

[24]) Vedi, per es., loc. cit. [10]), pag. 59.

Ma, per le 9),

$$\frac{A}{\Lambda}\sum_{l}^{1..p}\Lambda_{l,k}\,\omega_{l,r}=\sum_{s}^{1..2p}A_{s,r}\,\omega_{k,s},$$

dunque infine

$$\sum_s A_{s,r}\,\omega_{k,s} = \sum_s a'_{r,s}\,\omega_{k,s} \qquad (k=1,\dots,p;\ r=1,\dots,2p);$$

cioè, come volevasi, per $r,\ s=1,\dots,2p$,

$$a'_{r,s}=A_{s,r}.$$

12. Il teorema or ora stabilito è completato da quest' altro:

*Se la sostituzione* 3) *è impropria* (ossia è $\mathrm{A}=0$), *l' inversa di* T *è ad indice infinito.*

E infatti, se è $A=0$, è pure $\Lambda=0$, quindi le $p$ forme lineari nelle $u_j$

$$\sum_{l}^{1..p}\lambda_{j,l}\,u_l \qquad (j=1,\dots,p)$$

non sono indipendenti.

Ma allora, riguardando $T$ come rappresentata dalle equazioni 4), si ha che, qualunque siano le $u_j$, le $u'_j$ soddisfanno ad una (almeno) relazione lineare a coefficienti costanti. Ciò significa che il luogo dei trasformati mediante $T$ dei punti di $V$ è una varietà (contenuta in $V$) di dimensione inferiore a quella di $V$, e che quindi l' inversa di $T$ non può essere una trasformazione ad indice finito.

Avremo occasione altrove di caratterizzare in modo più preciso l' inversa di $T$ nell' ipotesi che sia $A=0$.

Qui basti accennare che quando è $A=0$ e la caratteristica (necessariamente pari) [25]) del determinante $A$ è $2q$ $(0\leq q<p)$, il luogo dei trasformati mediante $T$ di tutti i punti di $V$ è una varietà abeliana della dimensione $q$, e i punti di $V$ rispondenti in $T^{-1}$ a un punto di quest' ultima varietà riempiono una varietà abeliana della dimensione $p-q$ variabile in una totalità, sempre abeliana, della dimensione $q$.

Nel caso estremo in cui sia $q=0$ tutti i punti di $V$ hanno per trasformato in $T$ un medesimo punto.

13. Dalle proposizioni dei numeri 11 e 12 si raccoglie che:

*Una trasformazione algebrica univoca situata sopra una varietà abeliana è dotata di inversa con indice finito quando e solo quando la classe a cui appartiene è non nulla e non speciale.*

14. Torniamo a considerare la trasformazione $T$ del n° 11, supponendo ancora $A\neq 0$. Allora $T$ dà luogo su $V$ a una corrispondenza $(A, 1)$.

[25]) Loc. cit. [5]), Parte I, n° 14.

Ebbene *se il numero delle coincidenze di questa corrispondenza è finito, esso è dato dal determinante*

$$| a_{r,s} - \delta_{r,s} |$$

*dove è* $\delta_{r,s} = 1$ *o* $\delta_{r,s} = 0$ *secondo che è* $r = s$ *o* $r \neq s$.

Perchè il punto $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ sia un punto unito per la nostra corrispondenza occorre e basta che sia, indicando con le $x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ dei convenienti interi,

$$\sum_l^{1..p} \lambda_{j,l}\, u_l = u_j - \gamma_j + \sum_t^{1..2p} x_t\, \omega_{j,t} \,;$$

ossia, col significato del simbolo $\delta_{jl}$ or ora stabilito :

$$\sum_l^{1..p} (\lambda_{jl} - \delta_{jl})\, u_l = -\gamma_j + \sum_t^{1..2p} x_t\, \omega_{j,t} \,. \tag{13}$$

Ora supponiamo che il determinante $| a_{r,s} - \delta_{r,s} |$ sia diverso da zero. Allora è tale anche il determinante $| \lambda_{j,l} - \delta_{j,l} |$, perchè quello non è che la *norma* di questo; [26]) quindi, per un ragionamento analogo a quello sviluppato nel n. 11, il numero delle soluzioni $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ delle 13), incongrue rispetto ad $\omega$, è finito ed è eguale al valore di $| a_{r,s} - \delta_{r,s} |$.

Supponiamo invece che dei nostri due determinanti uno, e quindi anche l'altro, sia nullo. Allora le 13) o sono incompatibili o sono linearmente dipendenti. Nella prima ipotesi il numero delle coincidenze della corrispondenza considerata è nullo; nella seconda è infinito: dunque sta sempre che, quando il numero delle coincidenze è finito, esso è dato dal determinante $| a_{r,s} - \delta_{r,s} |$.

Notisi che *codesto numero può essere infinito solo quando sia*

$$| a_{r,s} - \delta_{r,s} | = 0 \,,$$

cioè quando l'equazione caratteristica della sostituzione riemanniana a cui è legata la trasformazione $T$ ammetta la radice 1.

Ora la presenza di questa radice, se la sua molteplicità (necessariamente pari) è inferiore a $2p$, indica che la matrice $\omega$ è impura; [27]) d'altronde se $\omega$ è pura e l'equazione caratteristica di una sua sostituzione riemanniana ammette la radice 1 con la molteplicità $2p$, questa sostituzione è necessariamente la sostituzione identica, [28]) e quindi una trasformazione univoca legata a tale sostituzione è una trasformazione birazionale di 2ª specie, che è o identica o priva di punti uniti; dunque:

---

[26]) Loc. cit. [23]).

[27]) Loc. cit. [5]) Parte I, n° 23 e n° 32.

[28]) Le omografie riemanniane di una matrice pura sono tutte generali. Vedi: G. SCORZA: *Il rango di una matrice di Riemann* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVI, (1917, 2° semestre), pp. 177-182], n° 5 e ROSATI, loc. cit. [13]), n° 10.

*Una varietà abeliana che possegga una corrispondenza algebrica* (A, 1) *con infiniti punti uniti e diversa dall' identità è necessariamente impura.*

Sopra una maggiore determinazione di quest' ultimo teorema ritorneremo nel lavoro cui è stato alluso più sopra.

Qui basti osservare i seguenti corollari delle proposizioni stabilite:

*a) L' inversa di una trasformazione univoca a valenza* $\gamma$ *non nulla, situata sopra una varietà abeliana della dimensione* p, *ha l' indice* $\gamma^{2p}$ *e la valenza* $\gamma^{2p-1}$;

*b) La corrispondenza algebrica* $(\gamma^{2p}, 1)$ *generata sopra una varietà abeliana di dimensione* p *da una trasformazione univoca a valenza non nulla* $\gamma$ *o è identica (e in tal caso è necessariamente* $\gamma = -1$) *o possiede* $(\gamma + 1)^{2p}$ *coincidenze.*

15. Dalle osservazioni fatte risulta che una varietà abeliana possiede sempre infinite corrispondenze algebriche ($\nu$, 1) con un indice eguale all' unità; esse sono tutte e sole quelle generate dalle trasformazioni univoche ciascuna delle quali sia dotata di inversa a indice finito.

*Come si caratterizza l' insieme dei valori (interi, positivi) che assume l' indice* $\nu$ *di queste corrispondenze per una assegnata varietà abeliana?*

La risposta a questa domanda è immediata.

Diciamo $\rho$ il numero base della nostra varietà abeliana $V$ e siano

$$A^{(1)},\ A^{(2)},\ldots,\ A^{(\rho)}$$

le matrici di $\rho$ sostituzioni riemanniane costituenti, per l' insieme delle sostituzioni riemanniane di $V$, una base minima.

Allora la matrice di ogni altra sostituzione riemanniana di $V$ è una matrice del tipo

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \ldots + x_\rho A^{(\rho)} \tag{14}$$

con le $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ intere, e inversamente; d'altronde il modulo della sostituzione la cui matrice è la 14), cioè il determinante

$$| x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \ldots + x_\rho A^{(\rho)} |, \tag{15}$$

se è diverso da zero, fornisce il valore dell' indice $\nu$ delle corrispondenze ($\nu$, 1) generate dalle trasformazioni univoche che son legate alla sostituzione stessa; dunque, se indichiamo con

$$f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_\rho)$$

la forma, di grado $2p$ nelle $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, a coefficienti interi rappresentata dal determinante 15), possiamo dire che:

*Per la varietà abeliana* V *l' insieme dei valori assunti dall' indice* $\nu$ *è l' insieme dei numeri interi positivi rappresentabili con la forma* $f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)$, *in cui il grado è il doppio della dimensione di* V *e il numero delle variabili è il numero base di* V.

Notisi che:

*a) La forma* f *è annullantesi o no secondo che* V *è impura o pura;*

*b) Tra i numeri interi rappresentabili con la forma* f *comparisce sempre l' unità, qualunque sia* V;

*c) La forma* f *è, in ogni caso, una forma semidefinita positiva, ossia si ha qualunque siano i valori reali attribuiti alle* $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) \geq 0.\ ^{29})$$

Da *b*), d'accordo col teorema *a*) del n. 14, segue che, se per $V$ è $\rho = 1$, è

$$f = x_1^{2p}.\ ^{30})$$

II.

## Un problema sulle varietà abeliane con sistemi complementari di varietà abeliane.

16. Supponiamo ora che la matrice $\omega$ cui appartiene la varietà abeliana $V$ sia impura e che due sistemi regolari di integrali (semplici di 1ª specie) riducibili di $V$ complementari siano quelli generati dagli integrali $u_1, u_2, \ldots u_q$ e $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p$, rispettivamente.

Allora applicando, ove occorra, ad $\omega$ un'operazione $B$ unimodulare (con che non viene alterata affatto la rappresentazione parametrica di $V$ che si suppone data), si può imaginare, senza venir meno alla generalità, che la matrice $\omega$ abbia la forma [31])

$$16)\qquad \left\| \begin{matrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \ldots & \omega_{1,2q} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \ldots & \omega_{2,2q} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{q,1} & \omega_{q,2} & \ldots & \omega_{q,2q} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \omega_{q+1,1} & \omega_{q+1,2} & \ldots & \omega_{q+1,2q} & \omega_{q+1,2q+1} & & \ldots & \omega_{q+1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \ldots & \omega_{p,2q} & \omega_{p,2q+1} & & \ldots & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\| ;$$

quindi basta guardare alla rappresentazione parametrica di $V$ per dedurre che l'insieme dei punti di $V$ per cui è

$$17)\qquad u_1 = c_1,\ u_2 = c_2,\ \ldots,\ u_q = c_q,$$

---

[29]) Che questa diseguaglianza sussista per le $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ *razionali* qualunque segue dal teorema che chiude il n° 22 della Parte I della Memoria citata in [5]); e allora essa è valida anche per le $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ *reali* qualunque. Da ciò risulta che il teorema ora invocato, concernente le omografie *riemanniane* di una matrice di RIEMANN, sussiste per tutte le omografie *reali* della matrice; il qual fatto discende anche dall'osservazione che i ragionamenti di quel n° 22 possono ripetersi tutti tali e quali per una qualsiasi omografia *reale* di una matrice riemanniana.

[30]) La connessione del problema esaminato in questo n° con la ricerca delle involuzioni situate sopra una varietà abeliana e birazionalmente identiche ad essa è manifesta. Vedi per il caso $p = 1$ la mia Nota: *Sulle curve ellittiche singolari* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVII, (1918, 1° semestre) pp. 171-175], le cui considerazioni, come mostrerò altrove, possono essere estese anche a casi in cui sia $p > 1$.

[31]) Vedi, per es., loc. cit. [5]), Parte I, n° 40.

le $c_1, c_2, \ldots, c_q$ essendo $q$ costanti arbitrariamente assegnate, è una varietà abeliana della dimensione $p - q$ appartenente alla matrice riemanniana

$$18)\qquad \left\| \begin{matrix} \omega_{q+1,2q+1} & \omega_{q+1,2q+2} & \ldots & \omega_{q+1,2p} \\ \omega_{q+2,2q+1} & \omega_{q+2,2q+2} & \ldots & \omega_{q+2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,2q+1} & \omega_{p,2q+2} & \ldots & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right\| .$$

Sorge così, al variare delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_q$, un sistema di $\infty^q$ varietà abeliane della dimensione $p - q$ situato su $V$. [32])

Un altro sistema dello stesso tipo, e cioè un sistema $\infty^{p-q}$ di varietà abeliane della dimensione $q$, si otterrà considerando su $V$ le varietà, ciascuna delle quali sia l' insieme dei punti di $V$ per cui si ha

$$19)\qquad u_{q+1} = \gamma_{q+1}, \; u_{q+2} = \gamma_{q+2}, \ldots, \; u_p = \gamma_p,$$

le $\gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \ldots, \gamma_p$ essendo anch'esse delle costanti.

Diciamo ***complementari***, per una ragione ovvia, i due sistemi $\infty^q$ e $\infty^{p-q}$ di varietà che così sorgono su $V$ e ***proponiamoci di determinare il numero dei punti comuni a una varietà generica dell' un sistema e una varietà generica dell'altro.***

Tale numero, che come risulterà tra poco, è sempre necessariamente finito, può esser determinato in due maniere differenti.

Di codeste due maniere esporremo altrove quella che conduce all' enunciato più elegante e che mette in rilievo il significato geometrico di un importante ***carattere aritmetico simultaneo*** di due assi complementari di una matrice riemanniana impura; ma anche quella che ora passiamo ad esporre è da tener presente, non ostante la complicazione dell'enunciato a cui perviene, perchè vi sono problemi in cui dei due enunciati è proprio quest' ultimo quello che ha maggior valore euristico. [33])

17. Supponiamo che la matrice $\omega$ cui appartiene $V$ abbia la forma 16).

Allora se

$$20)\qquad \left\| \begin{matrix} \tau_{1,1} & \tau_{1,2} & \ldots & \tau_{1,2q'} \\ \tau_{2,1} & \tau_{2,2} & \ldots & \tau_{2,2q'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{q',1} & \tau_{q',2} & \ldots & \tau_{q',2q'} \end{matrix} \right\| \qquad (q' = p - q)$$

---

[32]) Come è noto, questo sistema $\infty^q$ è a sua volta, considerato come totalità dei suoi elementi, una varietà abeliana della dimensione $q$.

[33]) Per esempio esso si presta assai bene alla risoluzione del seguente problema: *Determinare le (matrici riemanniane cui appartengono le) superficie iperellittiche con due fasci ellittici di curve ellittiche tali che la curva generica dell' un fascio sechi quella generica dell'altro in un numero di punti assegnato.*

è la matrice (riemanniana) costituita da $2q'$ sistemi di periodi ridotti primitivi degli integrali $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p$, esistono $4q'p$ interi $h_{j,s}$ ($j=1,\ldots,2q'$; $s=1,\ldots,2p$) per cui si ha:

$$21)\qquad \omega_{q+\mu,s} = h_{1,s}\,\tau_{\mu,1} + h_{2,s}\,\tau_{\mu,2} + \ldots + h_{2q',s}\,\tau_{\mu,2q'} \qquad (\mu=1,\ldots,q';\ s=1,\ldots,2p).$$

Indichiamo con $H$ il determinante di ordine $2q'$ formato dalle ultime $2q'$ colonne della matrice $\| h_{j,s} \|$ e, in $H$, diciamo $H_{l,2q+m}$ l'aggiunto dell'elemento $h_{l,2q+m}$ ($l,m=1,\ldots,2q'$).

Le $2q'$ equazioni lineari nelle $\tau_{\mu,1}, \tau_{\mu,2}, \ldots, \tau_{\mu,2q'}$, che si ricavano dalla 21) facendo variare $s$ da $2q+1$ a $2p$, sono certo risolubili rispetto alle dette quantità, perchè altrimenti esisterebbero dei numeri (interi) non tutti nulli $k_1, k_2, \ldots, k_{2q'}$ per cui risulterebbe

$$k_1\,\omega_{q+\mu,2q+1} + k_2\,\omega_{q+\mu,2q+2} + \ldots + k_{2q'}\,\omega_{q+\mu,2p} = 0 \qquad (\mu=1,\ldots,q'),$$

mentre ciò, data la forma 16) di $\omega$, non è possibile, [34]) dunque è $H \neq 0$ e si ha

$$22)\qquad \tau_{\mu,l} = \frac{1}{H} \sum_{m}^{1..2q'} H_{l,2q+m}\,\omega_{q+\mu,2q+m} \qquad (\mu=1,\ldots,q';\ l=1,\ldots,2q').$$

Adesso poniamo

$$23)\qquad a_{m,j} = \sum_{l}^{1..2q'} h_{l,j}\,H_{l,2q+m} \qquad (m=1,\ldots,2q';\ j=1,\ldots,2q),$$

cioè indichiamo con $a_{m,j}$ il determinante che risulta da $H$ sostituendo gli elementi $h_{1,j}$, $h_{2,j}, \ldots, h_{2q',j}$ agli elementi della $m.^a$ colonna, e indichiamo con $t$ e, se $t>0$, con $e_1, e_2, \ldots, e_t$ la caratteristica e i divisori elementari della matrice $\| a_{m,j} \|$. [35])

Allora se $s_i$ è il massimo comun divisore di $H$ ed $e_i$, ***il numero* N *dei punti comuni alle due varietà* V′ *e* V″ *di* V *rappresentate l'una dalle equazioni* 17) *e l'altra dalle equazioni* 19) *è dato da* N $=1$ *se* t $=0$, *mentre se* t $>0$ *è dato da***

$$24)\qquad N = \frac{|H|^t}{s_1\,s_2 \ldots s_t}.$$

Infatti supponiamo, come è lecito, che $V$ appartenga ad un $S_{p+1}$ e siano le

$$25)\qquad \begin{aligned} X_1 &= f_1\,(u_1, \ldots, u_p) \\ X_2 &= f_2\,(u_1, \ldots, u_p) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_{p+1} &= f_{p+1}\,(u_1, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

le sue equazioni parametriche, mediante funzioni abeliane appartenenti alla matrice $\omega$.

Allora le equazioni parametriche di $V'$ saranno le

$$26)\qquad X_\nu = f_\nu\,(c_1, c_2, \ldots, c_q, u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p) \qquad (\nu=1,\ldots,p+1);$$

[34]) Loc. cit. [8]).

[35]) Per la definizione di questi divisori elementari vedi, per es., KRAZER, loc. cit. [10]), pp. 55-56.

e quelle di $V''$ saranno le

$$X_\nu = f_\nu\,(u_1, u_2,..., u_q, \gamma_{q+1}, \gamma_{q+2},..., \gamma_p) \qquad (\nu=1,..., p+1); \tag{27}$$

inoltre le funzioni di $u_{q+1}, u_{q+2},..., u_p$ che compariscono nei secondi membri delle 26) saranno funzioni abeliane appartenenti alla matrice riemanniana 18).

Perchè un punto $(u_1, u_2,..., u_q, \gamma_{q+1}, \gamma_{q+2},..., \gamma_p)$ di $V''$ coincida con un punto $(c_1, c_2,..., c_q, u_{q+1}, u_{q+2},..., u_p)$ di $V'$ occorre e basta che per quest'ultimo sia

$$u_{q+\mu} = \gamma_{q+\mu} + \sum_r^{1..2p} x_r\,\omega_{q+\mu,r} \qquad (\mu=1,..., q') \tag{28}$$

con le $x_1, x_2,..., x_{2p}$ intere; quindi i punti comuni a $V'$ e $V''$ sono tanti, quanti sono i sistemi di valori per le $u_{q+\mu}$, incongrui rispetto alla matrice 18) come modulo, forniti dalle equazioni 28) al variare degli interi $x_1,..., x_{2p}$ in tutte le maniere possibili.

Poichè codesti sistemi di valori hanno da esser considerati rispetto alla matrice 18) come modulo, è inutile tener conto nelle 28) dei termini a secondo membro che provengono dal fare $r = 2q+1, 2q+2,..., 2p$; quindi esse possono scriversi più semplicemente

$$u_{q+\mu} = \gamma_{q+\mu} + \sum_j^{1..2q} x_j\,\omega_{q+\mu,j} \qquad (\mu=1,..., q'). \tag{29}$$

Per le 21) e le 22) si ha

$$\sum_j^{1..2q} x_j\,\omega_{q+\mu,j} = \sum_j^{1..2q}\sum_l^{1..2q'} x_j\,h_{l,j}\,\tau_{\mu,l} = \frac{1}{H}\sum_j^{1..2q}\sum_{l,m}^{1..2q'} x_j\,h_{l,j}\,H_{l,2q+m}\,\omega_{q+\mu,2q+m}\,,$$

dunque, per le 23), posto

$$y_m = \sum_j^{1..2q} a_{m,j}\,x_j \qquad (m=1,..., 2q'), \tag{30}$$

le 29) equivalgono alle

$$u_{q+m} = \gamma_{q+\mu} + \frac{1}{H}\sum_m^{1..2q'} y_m\,\omega_{q+\mu,2q+m} \qquad (\mu=1,..., q'). \tag{31}$$

Dalle 31) apparisce che due sistemi di valori (interi) per le $x_j$, $x'_j$ e $x''_j$, dànno luogo mediante le 29) a due sistemi di valori per le $u_{q+\mu}$, congrui rispetto alla ma-

trice 18), quando e solo quando essi soddisfanno rispetto al modulo $|H|$, alle $2q'$ congruenze

$$\sum_{j}^{1..2q} a_{m,j}\,(x'_j - x''_j) \equiv 0 \qquad (m=1,\ldots,2q'). \tag{32}$$

Di qua risulta che nelle 29) gli interi $x_j$ (i quali sono in numero di $2q$) possono esser calcolati rispetto al modulo $|H|$; d'altronde il numero delle soluzioni incongrue delle congruenze 32) nelle $2q$ incognite $(x'_j - x''_j)$ è dato da $H^{2q}$ se $t=0$, mentre se $t>0$ è dato da [36])

$$s_1 . s_2 \ldots . s_t \; |H|^{2q-t}$$

(dove naturalmente occorre prendere $H$ in valore assoluto solo se $t$ è dispari); dunque concludendo, il numero dei punti comuni a $V'$ e $V''$ è finito ed è dato come volevasi da $N = \frac{H^{2q}}{H^{2q}} = 1$ se $t=0$ o, se $t>0$, da

$$N = \frac{H^{2q}}{s_1 s_2 \ldots s_t \, |H|^{2q-t}} = \frac{|H|^t}{s_1 s_2 \ldots s_t}.$$

*Osservazione 1ª.* Quando è $N=1$ la varietà $V$ può considerarsi come la varietà delle coppie di punti che si ottengono accoppiando ciascun punto di una varietà abeliana di dimensione $q$ con ciascun punto di una varietà abeliana della dimensione $p-q$; quindi $V$ può imaginarsi come appartenente a una matrice riemanniana composta mediante due matrici riemanniane aventi l' una il genere $q$ e l'altra il genere $p-q$.

*Osservazione 2ª.* Quando è $t>0$, nella serie di interi

$$e_1, e_2, \ldots, e_t$$

ciascun termine è divisibile per ciascuno di quelli che lo precedono; [37]) quindi lo stesso sta per la serie di interi

$$s_1, s_2, \ldots, s_t$$

una volta che $s_i$ è il massimo comune divisore di $H$ ed $e_i$.

Ma allora nella serie di *interi*

$$\frac{H}{s_1}, \frac{H}{s_2}, \ldots, \frac{H}{s_t},$$

il cui prodotto è uguale (in valore assoluto) ad $N$, ciascun termine è divisibile per tutti quelli che lo seguono.

---

[36]) Vedi, per es., KRAZER, loc. cit. [10]), pag. 57.

[37]) Loc. cit. [35]).

Da ciò si deduce che se il valore assoluto di $\frac{H}{s_t}$ si indica con $q_t$ e il valore assoluto del quoziente di $\frac{H}{s_i}$ per $\frac{H}{s_{i+1}}$ $(i = 1, 2, \ldots, t-1)$ si indica con $q_i$, gli interi $q_1, q_2, \ldots, q_t$ sono legati ad $N$ dalla relazione

$$N = q_1 q_2^2 q_3^3 \ldots q_t^t .$$

Si vede pertanto che se $N$ e $t$ sono dati, il numero delle ipotesi differenti che possono esser fatte su $q_1, q_2, \ldots, q_t$ é assai ristretto.

Per es. se $N$ è un numero privo di divisori quadrati diversi da 1 è necessariamente

$$q_1 = N, \quad q_2 = q_3 = \ldots = q_t = 1 .$$

# INDICE